Trigonometrija
1. Adicione formule i primena

1. Izračunati
$$\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}\,.$$

2. Dokazati da je
$$(a)\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 2 \qquad (b)\ \frac{1-\operatorname{tg} 15^\circ}{1+\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

3. Neka su α i β oštri uglovi za koje važi $\operatorname{tg}\alpha = 3$ i $\operatorname{tg}\beta = 2$. Dokazati da je
$$\frac{\pi}{24} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{16}\,.$$

4. Ako su α, β uglovi za koje važi $\sin\beta = \dfrac{1}{5}\sin(2\alpha+\beta)$, dokazati da je
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\,.$$

5. Ako su α, β, γ uglovi trougla i
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma$$
onda je taj trougao pravougli. Dokazati.

6. Ako su α, β, γ oštri uglovi za koje važi
$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha = 1$$
dokazati da je $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Da li važi obrnuto tvrdjenje?

7. Neka su α, β i γ uglovi nekog trougla i n prirodan broj. Dokazati:
   (a) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$;
   (b) $\operatorname{ctg}^n\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n\dfrac{\gamma}{2} \geq 3^{\frac{n+2}{2}}$.

8. Dokazati da je $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, ako su α, β i γ uglovi nekog trougla i ni jedan od njih nije prav.

9. Uglovi trougla α, β i γ zadovoljavaju uslov $\alpha+\gamma = 2\beta$. Odrediti te uglove ako je zbir njihovih sinusa jednak $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

10. Dokazati identitete:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \dfrac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}=\dfrac{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}{3-\operatorname{tg}^2\alpha} \\
(b) & \operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x+4\operatorname{tg} 4x+8\operatorname{ctg} 8x=\operatorname{ctg} x \\
(c) & \cos\alpha+\cos 3\,\alpha+\cos 5\,\alpha+\cos 7\,\alpha=\dfrac{\sin 8\,\alpha}{2\sin\alpha} \\
(d) & \dfrac{\sin\alpha+\sin 3\,\alpha+\sin 5\,\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\,\alpha+\cos 5\,\alpha}=\operatorname{tg} 3\,\alpha \\
(e) & \sin^3\alpha\cos^3\alpha=\dfrac{3\sin 2\alpha-\sin 6\alpha}{32}
\end{array}
$$

11. Dokazati da za uglove α,β i γ nekog trougla važe sledeće jednakosti:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} \\
(b) & \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\
(c) & \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{array}
$$

12. Ako su α,β oštri uglovi za koje važi

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$$

tada je $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ ili $\alpha=\beta$. Dokazati.

13. Ako za uglove trougla α,β,γ važi

$$(a)\quad \cos\alpha+\cos\beta=\sin\gamma\,; \qquad (b)\quad \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2,$$

dokazati da je taj trougao pravougli.

14. Ako su α,β,γ uglovi trougla za koje važi

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sqrt{3}\,(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,,$$

tada je bar jedan od uglova α,β,γ jednak $\dfrac{\pi}{3}$. Dokazati.

15. Dokazati da su $\cos\dfrac{\pi}{7}$, $\cos\dfrac{3\pi}{7}$ i $\cos\dfrac{5\pi}{7}$ koreni polinoma $8x^3-4x^2-4x+1=0$.

16. Dokazati da je za svaki prirodan broj n, broj $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ iracionalan.