Glava 1

Određeni integral

1.1 Definicija određenog integrala. Ograničenost integrabilnih funkcija

Neka je f nenegativna neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ (to znači da se tačke njenog grafika nalaze na x-osi ili iznad x-ose). Ravna figura, ograničena intervalom $[a, b]$ na x-osi, pravama $x = a$, $x = b$ i grafikom funkcije f nad segmentom $[a, b]$, naziva se *krivolinijski trapez* nad $[a, b]$.

Problem određivanja površine krivolinijskog trapeza je doveo do definicije pojma određenog integrala koji je jedan od najvažnijih pojmova matematičke analize. Osim površine dela ravni ograničenog nekom krivom linijom, pomoću određenog integrala se računa i dužina luka krive, zapremina tela, koristi se u fizici za računanje dužine puta, rada sile, momenta inercije, i td. Može se reći da određeni integral spada u osnovnu aparaturu ne samo raznih matematičkih disciplina, već i fizike, mehanike i raznih tehničkih nauka.

Ova metoda se javila mnogo pre diferencijalnog računa. Problem površine ravne figure je bio aktuelan još u doba Arhimeda, velikog grčkog matematičara i fizičara iz trećeg veka pre naše ere, koji je u suštini koristio određeni intgral za rešavanje problema "kvadrature parabole" [1]. Nezavisno jedan od drugog, nemački matematičar i filozof Lajbnic (1646-1716) i engleski matematičar i fizičar Njutn (1642-1727) došli su do ove metode u savremenom obliku. Riman, nemački matematičar 19. veka, je dao definiciju određenog integrala kakvu ćemo upoznati u narednom tekstu, dok je samu oznaku uveo Furije, francuski matematičar 19. veka.

U cilju određivanja površine krivolinijskog trapeza, uvedimo najpre pojam podele segmenta $[a, b]$.

Definicija 1.1. Pod podelom segmenta $[a, b]$ podrazumevamo konačan skup tačaka $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ takav da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

[1] Problem kvadrature parabole: Neka je data parabola $y = x^2$ i pravougaonik sa temenima $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, a^2)$, $D(0, a^2)$, $a > 0$. Tada parabola deli pravougaonik na dve figure čije se površine odnose kao $1 : 2$.

Podelom P segment $[a,b]$ je podeljen na n podsegmenata:

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},x_n].$$

Označimo sa Δx_i dužinu i-tog podsegmenta: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\dots,n$. Dijametar podele P, u oznaci $d(P)$, je

$$d(P) = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i.$$

Skup svih podela segmenta $[a,b]$ označavamo sa $\mathcal{P}[a,b]$. Ako $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ i $P_1 \subsetneq P_2$, onda kažemo da je podela P_1 *grublja* od podele P_2, a podela P_2 *finija* od podele P_1. $\Box$

Jasno, ako je podela P_2 finija od podele P_1, onda je $d(P_2) \le d(P_1)$.‘

U svakom podsegmentu $[x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\dots,n$, izaberimo na proizvoljan način po jednu tačku ξ_i. Izabrane tačke $\xi_1,\dots,\xi_n$ formiraju uređenu n-torku $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$. Pravougaonik Π_i, čija je osnova segment $[x_{i-1},x_i]$, a visina $f(\xi_i)$, ima površinu $p(\Pi_i) = f(\xi_i)\Delta x_i$. "Stepenasta figura" S koju čine svi pravougaonici Π_i, $i = 1,\dots,n$, ima površinu koju je jednaka zbiru površina svih pravougaonika:

$$p(S) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1.1}$$

Primećujemo da stepenasta figura S zavisi od podele P segmenta $[a,b]$, kao i od izbora tačaka $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\dots,n$. Ako pođemo od podele P_1 koja je finija od podele P dobićemo stepenastu figuru koja se još manje razlikuje od krivolinijskog trapeza. Prema tome, ako se dijametar podele sve više i više smanjuje, onda se odgovarajuća stepenasta figura sve manje i manje razlikuje od krivolinijskog trapeza, pa će se i površina stepenaste figura će se sve manje i manje razlikovati od površine krivolinijskog trapeza. Intuitivno je jasno da za površinu krivolinijskog trapeza treba uzeti graničnu vrednost suma (1.1) kad dijametar podele teži 0.

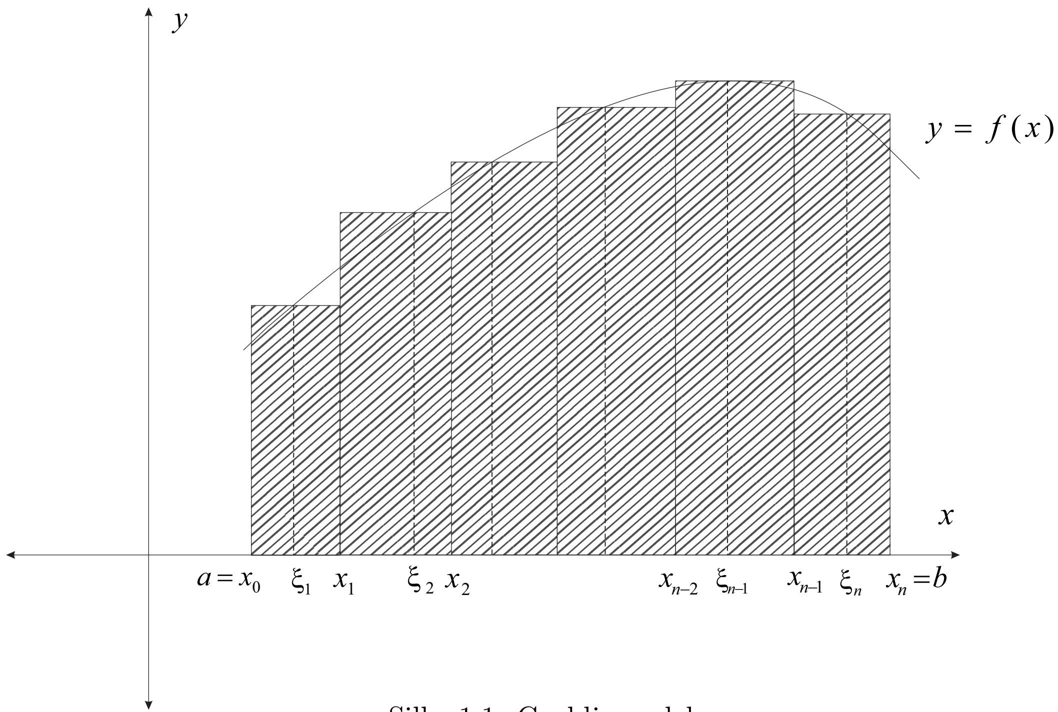
Ovakva razmatranja su dovela do sledeće definicije integralne sume i određenog integrala.

Definicija 1.2. Neka je data funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, podela $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a,b]$ i izbor $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ tačaka $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\dots,n$. Suma

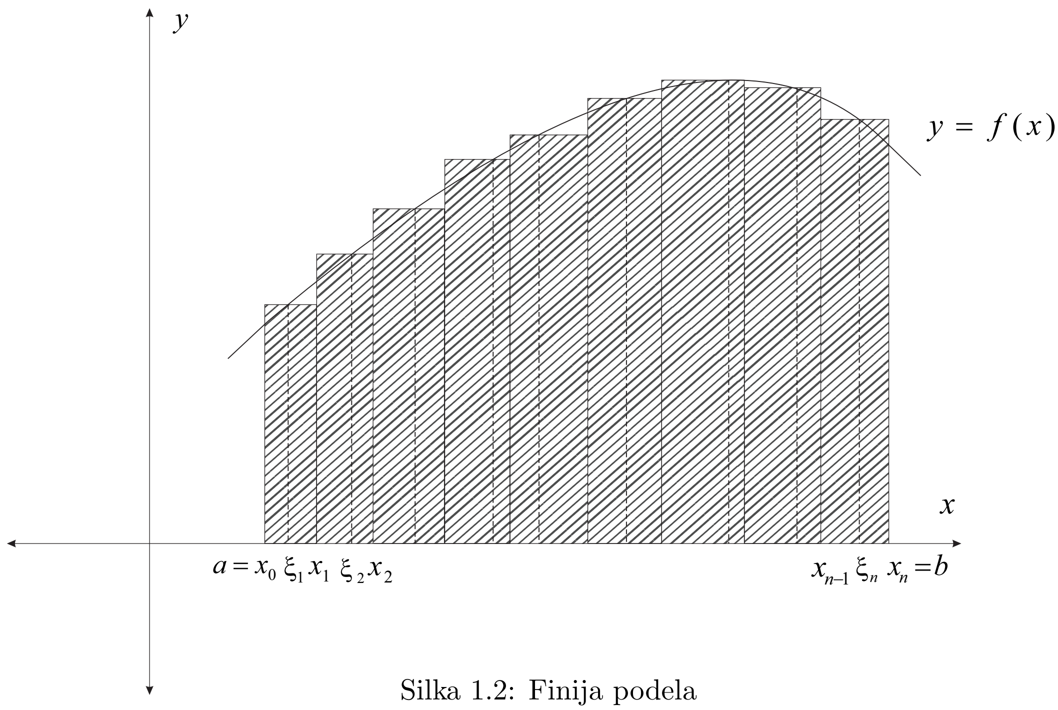
$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

zove se Rimanova integralna suma funkcije f za datu podelu P i izbor tačaka $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$. $\Box$

Očigledno, u slučaju kada je funkcija f nenegativna na segmentu $[a,b]$, Rimanova integralna suma funkcije f je jednaka površini odgovarajuće stepenaste figure.



Silka 1.1: Grublja podela



Silka 1.2: Finija podela

Definicija 1.3. Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funkcija f je *Riman integrabilna (integrabilna u Rimanovom smislu, ili kraće, integrabilna) na segmentu* $[a,b]$ ako postoji realan broj I takav da za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a,b]$ za koju je $d(P) < \delta$ i za proizvoljan izbor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ važi nejednakost

$$|\sigma(f,P,\xi) - I| < \epsilon,$$

tj.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \epsilon.$$

Broj I se zove *Rimanov integral ili određeni integral funkcije* f *na segmentu* $[a,b]$ i piše se

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Oznaka $\int_a^b f(x)dx$ se čita: "integral od a do b $f(x)dx$". Broj a se zove *donja granica integrala*, dok se broj b zove *gornja granica integrala.* Funkcija f se zove *podintegralna funkcija*, izraz $f(x)dx$ *podintegralni izraz*, a promenljiva x *integraciona promenljiva* (slovo x se može zameniti i nekim drugim slovom).

Skup svih Riman integrabilnih funkcija na segmentu $[a,b]$ označavamo sa $\mathcal{R}[a,b]$.
$\square$

Ako je broj I određeni integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ govorićemo još i da je I granična vrednost integralnih suma $\sigma(f,P,\xi)$ funkcije f kad $d(P) \to 0$ i pisati[2]

$$I = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi). \tag{1.2}$$

Kao što smo pojam granične vrednosti funkcije definisali na jeziku $\epsilon - \delta$-okolina, a takođe i na ekvivalentan način preko granične vrednosti nizova, tako i određeni integral možemo definisati preko granične vrednosti nizova integralnih suma. Sledeća definicija određenog integrala je ekvivalentna Definiciji 1.3 (ostavljamo čitaocu za vežbu da dokaže ekvivalentnost ovih dveju definicija[3]).

Definicija 1.4. Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Reći ćemo da je realan broj I određeni ili Rimanov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$, a funkcija f (Riman) integrabilna na segmentu $[a,b]$, ako za svaki niz podela

$$P_n = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\},\ a = x_0^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b,$$

[2]Jednakost u (1.2) znači upravo ono što je rečeno u Definiciji 1.3, da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a,b]$ za koju je $d(P) < \delta$ i za proizvoljan izbor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ važi nejednakost $|\sigma(f,P,\xi) - I| < \epsilon$. Limes u (1.2) treba shvatiti kao novu vrstu limesa, koja se razlikuje od limesa niza i limesa funkcije.

[3]Uputstvo: postupiti analogno dokazu ekvivalentnosti Košijeve i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije.

segmenta $[a, b]$ za koji važi da je

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n) = 0$$

i za svaki izbor tačaka

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)}),\ \xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1, \dots, k_n,\ n = 1, 2, \dots,$$

postoji granična vrednost niza integralnih suma $(\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}))_n$ i jednaka je broju I:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \Delta x_i^{(n)} = I,$$

gde je $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$.

Ovo kraće simbolički zapisujemo:

$$I = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi).\ \Box$$

U slučaju kada je funkcija f nenegativna na segmentu $[a, b]$, onda je određeni integral limes niza površina odgovarajućih stepenastih figura kada niz dijametara podela teži 0 i stoga je jednak površini krivolinijskog trapeza ograničenog grafikom funkcije f, x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$.

U Definicijama 1.3 i 1.4 srećemo se sa pojmom granične vrednosti integralnih suma, koji je, mada sličan sa pojmom granične vrednosti funkcije i pojmom granične vrednosti niza, ipak novi pojam. Shvatimo ovo kao još jednu vrstu limesa, koja, opet, ima sličnosti sa ranije uvedenim pojmovima limesa funkcije i limesa niza. Osim toga, s obzirom da se pojam određenog integrala, tj. limesa integralnih suma, definiše preko limesa nizova, to za ovu vrstu limesa važe mnoga svojstva slična onima koja važe za granične vrednosti nizova, odnosno funkcija, što ćemo videti u narednim sekcijama.

Primer 1.5. Neka je $f(x) = c$, $x \in [a, b]$ i neka je $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ proizvoljna podela segmenta $[a, b]$ i $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ proizvoljan izbor tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Kako je $f(\xi_i) = c$ za svako $i = 1, \dots, n$, to je

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Prema tome, za svaki niz podela $P_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\},\ a = x_0^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} = b$, segmenta $[a, b]$ za koji važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ i za svaki izbor tačaka $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)}),\ \xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1, \dots, k_n,\ n = 1, 2, \dots,$ niz integralnih suma $(\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}))_n$ je konstantan niz: $\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = c(b - a)$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je broj $c(b - a)$ granična vrednost ovog niza. Na osnovu definicije 1.4 sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\, dx = c(b - a).$$

Primer 1.6. Dirihleova funkcija je definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pokažimo da ova funkcija nije integrabilna na segmentu $[0,1]$. Pretpostavimo suprotno, da je f integrabilna na segmentu $[0,1]$ i da je realan broj I određeni integral funkcije f na na segmentu $[0,1]$. S oobzirom na Definiciju 1.3 za $\epsilon = \frac{1}{2}$ sledi da postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1)$ dijametra manjeg od δ i svaki izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_i, \xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, važi

$$|\sigma(f, P, \xi) - I| < \frac{1}{2}. \tag{1.3}$$

Pri tome, ako su tačke ξ_i racionalne, onda je $f(\xi_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$, i važi

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1,$$

pa iz (1.3) sledi $|1 - I| < \frac{1}{2}$, tj.

$$I \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right). \tag{1.4}$$

Ako su pak tačke ξ_i iracionalne, onda je $f(\xi_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, i važi $\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$, pa iz (1.3) sledi $|0 - I| < \frac{1}{2}$, tj. $I \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, što je u suprotnosti sa (1.4). Dobijena protivurečnost dokazuje da Dirihleova funkcija nije integrabilna na segmentu $[0,1]$. Slično se dokazuje da nije integrabilna na bilo kom segmentu $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Možemo koristiti i Definiciju 1.4 da bismo dokazali da ova funkcija nije integrabilna na segmentu $[a,b]$. Neka je (P_n) niz podela segmenta $[a,b]$,

$$P_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}, \ a = x_0^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} = b,$$

za koji važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ i neka je

$$\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)}), \ \xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}] \cap \mathbb{Q}$$

i

$$\xi^{(n)'} = (\xi_1^{(n)'}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)'}), \ \xi_i^{(n)'} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}], \ \xi_i^{(n)'} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \ i = 1, \dots, k_n, \ n = 1, 2, \dots.$$

Tada je

$$\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k_n} 1 \cdot (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = b - a, \text{ za svako } n \in \mathbb{N},$$

dok je

$$\sigma(f, P_n, \xi^{(n)\prime}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)\prime})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k_n} 0 \cdot (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = 0, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Stoga je

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = b - a,$$

dok je

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)\prime}) = 0.$$

Prema tome, ne postoji jedinstven realan broj I takav da, za proizvoljan niz podela (P_n) čiji dijametar teži 0 i za proizvoljan izbor tačaka $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)})$ iz podeonih segmenata, važi da niz integralnih suma $(\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}))_n$ konvergira ka I. Na osnovu Definicije 1.4 zaključujemo da Dirihleova funkcija nije integrabilna na segmentu $[a, b]$. •

Sledeća teorema nam govori da je ograničenost funkcije na nekom segmentu neophodan uslov da njenu untegrabilnost na tom segmentu.

Teorema 1.7. *Ako je funkcija integrabilna na nekom segmentu, onda je ona ograničena na tom segmentu.*

Dokaz. Neka je $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Pretpostavimo da funkcija f nije ograničena na segmentu $[a, b]$. Iz integrabilnosti funkcije sledi da za $\epsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, \ldots, x_m\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b)$ dijametra manjeg od δ i svaki izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, m$, važi

$$|\sigma(f, P, \xi) - I| < \epsilon = 1. \tag{1.5}$$

Fiksirajmo jednu podelu $P_0 = \{x_0, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ takvu da je $d(P_0) < \delta$. Tada za proizvoljan izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, na osnovu (1.5) zaključujemo da važi nejednakost:

$$|\sigma(f, P_0, \xi)| = |(\sigma(f, P_0, \xi) - I) + I| \leq |\sigma(f, P_0, \xi) - I| + |I| < 1 + |I|. \tag{1.6}$$

Kako je funkcija neograničena na $[a, b]$ sledi da postoji $k \in \{1, \ldots, n\}$ tako da funkcija nije ograničena na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$. U svakom od segmenata $[x_{i-1}, x_i]$, $i \neq k$, izaberimo na proizvoljan način tačku ξ_i i uočimo zbir:

$$\sigma^k = \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Budući da je funkcija neograničena na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$, postoji tačka $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ takva da je

$$|f(\xi_k)| > \frac{|\sigma^k| + 1 + |I|}{\Delta x_k}.$$

Odavde za $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ važi:[4]

$$\begin{aligned}|\sigma(f, P_0, \xi)| &= \left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = |\sigma^k + f(\xi_k)\Delta x_k| \geq \\ &\geq |f(\xi_k)\Delta x_k| - |\sigma^k| = |f(\xi_k)|\Delta x_k - |\sigma^k| \\ &> \frac{|\sigma^k| + 1 + |I|}{\Delta x_k} \cdot \Delta x_k - |\sigma^k| = 1 + |I|,\end{aligned}$$

što protivureči nejednakosti (1.6). Dobijena protivurečnost dokazuje da je funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$. ■

Da je ograničenost funkcije na segmentu potreban ali ne i dovoljan uslov integrabilnosti funkcije, pokazuje Primer 1.6. Naime, Dirihleova funkcija je ograničena na segmentu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ali nije integrabilna na njemu.

1.2 Gornje i donje Darbuove sume. Osnovna teorema

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena na segmentu $[a, b]$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$ podela segmenta $[a, b]$. Neka je

$$m = \inf_{[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{[a,b]} f(x)$$

i

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Sume

$$s_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

zovemo *donjom i gornjom Darbuovom sumom funkcije f za podelu P*, respektivno.

U narednim tvrđenjima dajemo neke osnovne osobine Darbuovih suma i to najpre njihov odnos sa integralnim sumama.

Tvrđenje 1.8. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena na segmentu $[a, b]$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$ podela segmenta $[a, b]$. Tada je*

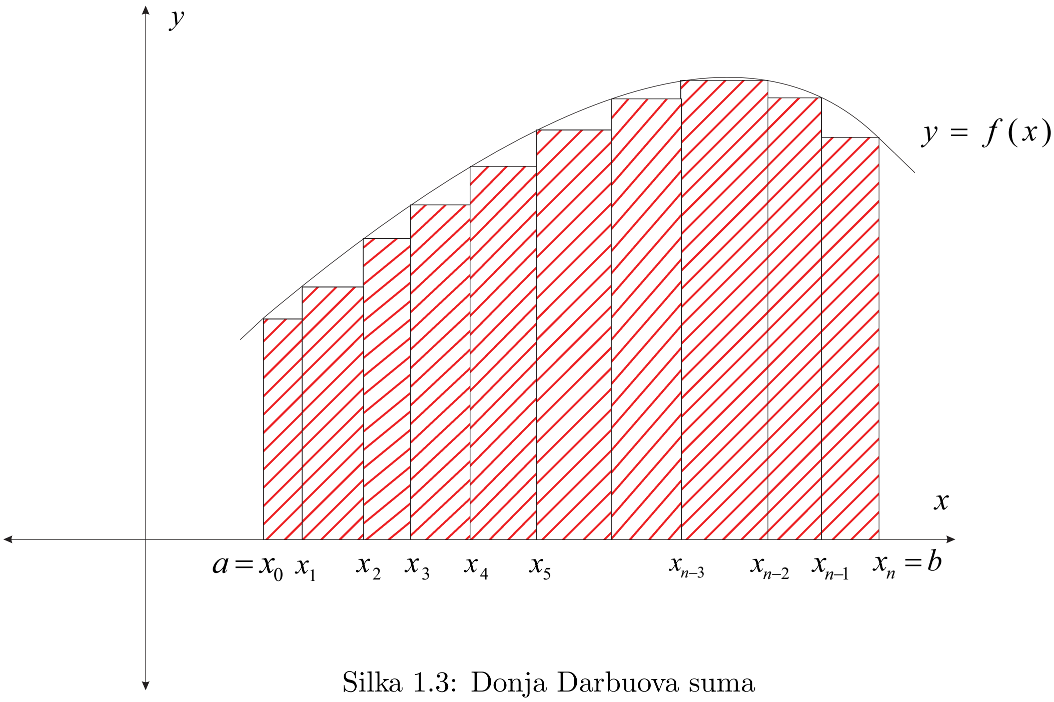
$$m(b - a) \leq s_P \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S_P \leq M(b - a), \tag{1.7}$$

za svaki izbor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

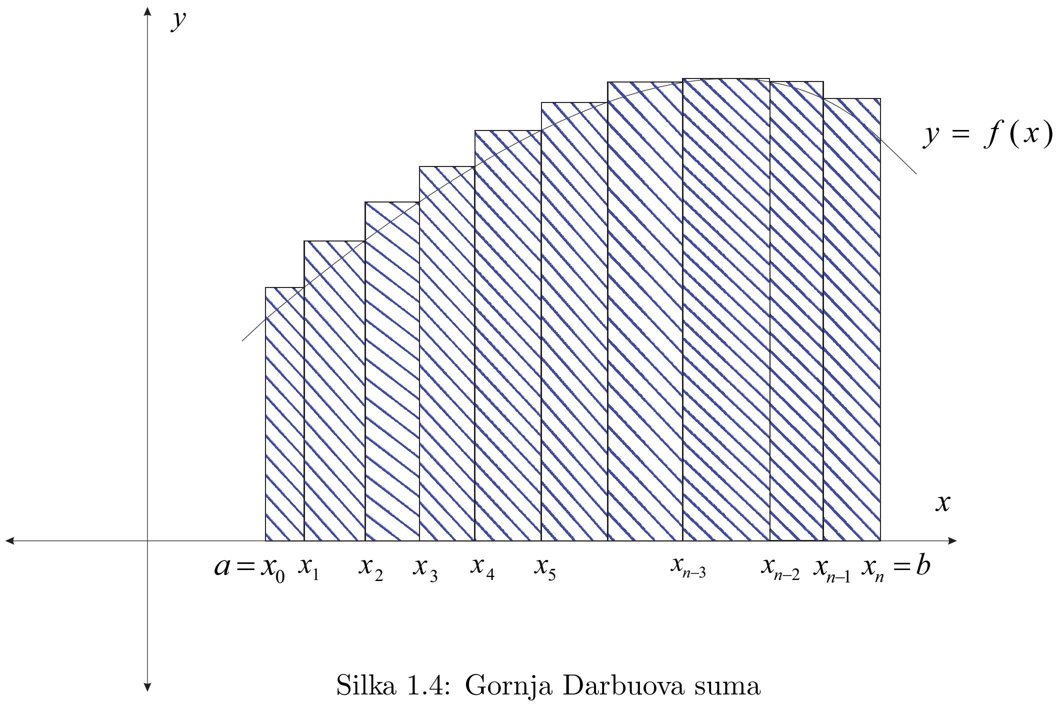
Osim toga,

$$s_P = \inf_{\xi} \sigma(f, P, \xi), \quad S_P = \sup_{\xi} \sigma(f, P, \xi). \tag{1.8}$$

[4]Koristimo nejednakost: $|a + b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$.



Silka 1.3: Donja Darbuova suma



Silka 1.4: Gornja Darbuova suma

Dokaz. Za svaki izbor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \dots, n$, važi:

$$m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M,$$

odakle množenjem sa Δx_i i sabiranjem dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i,$$

tj.

$$m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a) \le s_P \le \sigma(f, P, \xi) \le S_P \le M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a).$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Kako je $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, to postoji $\xi_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tako da je $f(\xi_i^*) > M_i - \dfrac{\epsilon}{b-a}$, $i = 1, \dots, n$. Množeći sa Δx_i i sabirajući dobijamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i &> \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\
&= S_P - \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) \\
&= S_P - \epsilon,
\end{aligned}$$

tj. $\sigma(f, P, \xi^*) > S_P - \epsilon$.

S obzirom da je na osnovu treće nejednakosti u (1.7) S_P gornja granica skupa $\{\sigma(f, P, \xi) : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n),\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \dots, n\}$ i budući da za svako $\epsilon > 0$ postoji izbor $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ tačaka $\xi_i^* \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \dots, n$, tako da je $\sigma(f, P, \xi^*) > S_P - \epsilon$, zaključujemo da je S_P najmanja gornja granica ovog skupa, tj. $S_P = \sup\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$.

Slično se dokazuje da je $s_P = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$. ■

Tvrđenje 1.9. *Neka je funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ograničena na segmentu* $[a, b]$ *i neka su* P *i* P' *podele segmenta* $[a, b]$*. Tada važi implikacija:*

$$P \subset P' \Longrightarrow s_P \le s_{P'} \le S_{P'} \le S_P.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvđenje za slučaj kada se P i P' razlikuju za jednu tačku. Neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$ i $P' = P \cup \{x'\}$ gde je $x_{k-1} < x' < x_k$ za neko $k \in \{1, \dots, n\}$. Tada je

$$\begin{aligned}
S_P &= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \sum_{i\ne k}^{n} M_i\Delta x_i + M_k\Delta x_k \\
&= \sum_{i\ne k}^{n} M_i\Delta x_i + M_k(x_k - x_{k-1}) \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

i

$$S_{P'} = \sum_{i \neq k}^{n} M_i \Delta x_i + M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x'), \tag{1.10}$$

gde je $M_k' = \sup\limits_{[x_{k-1}, x']} f(x)$ i $M_k'' = \sup\limits_{[x', x_k]} f(x)$.

Kako je $[x_{k-1}, x'] \subset [x_{k-1}, x_k]$ i $[x', x_k] \subset [x_{k-1}, x_k]$, to je

$$\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x']\} \subset \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i

$$\{f(x) : x \in [x', x_k]\} \subset \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Otuda

$$\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x']\} \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i

$$\sup\{f(x) : x \in [x', x_k]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

tj.

$$M_k' \leq M_k \text{ i } M_k'' \leq M_k.$$

Zbog toga je

$$M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x') \leq M_k(x' - x_{k-1}) + M_k(x_k - x') = M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{1.11}$$

Sada iz (1.10), (1.11) i (1.9) sledi

$$S_{P'} \leq S_P.$$

Slično se dokazuje da je $s_P \leq s_{P'}$. ■

Tvrđenje 1.10. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena na segmentu $[a, b]$ i neka su P i P' dve proizvoljne podele segmenta $[a, b]$. Tada je*

$$s_P \leq S_{P'}.$$

Dokaz. Neka je $P'' = P \cup P'$. Iz $P \subset P''$ i $P' \subset P''$ na osnovu Tvrđenja 1.9 sledi

$$s_P \leq s_{P''} \leq S_{P''} \leq S_{P'}. \ ■$$

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena i neka je

$$\underline{I} = \sup_P s_P, \quad \overline{I} = \inf_P S_P.$$

Iz Tvrđenja 1.10 sledi da je skup $\{s_P : P \in \mathcal{P}\}$ ograničen odozgo ma kojom gornjom Darbuovom sumom, pa je supremum ovog skupa, $\underline{I}$, konačan broj i važi

$$\underline{I} = \sup\{s_P : P \in \mathcal{P}\} \leq S_{P'}, \text{ za svaku podelu } P'$$

Odavde sledi da je $\{S_{P'} : P' \in \mathcal{P}\}$ ograničen odozdo sa $\underline{I}$, pa je infimum ovog skupa, $\overline{I}$, takođe konačan broj i važi nejednakost

$$\underline{I} \leq \inf\{S_{P'} : P' \in \mathcal{P}\} = \overline{I}.$$

Prema tome, za svaku podelu P segmenta $[a, b]$ važi nejednakost:

$$s_P \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_P.$$

Definicija 1.11. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ i $E \subset X$. *Oscilacija funkcije f na skupu E* je

$$\omega_E(f) = \sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in E\} = \sup_{x,x' \in E} |f(x) - f(x')|.\square$$

Primetimo da je

$$\omega_E(f) = \sup_{x,x' \in E} |f(x) - f(x')| = \sup_{x,x' \in E} (f(x) - f(x')). \tag{1.12}$$

Lema 1.12. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Tada je*

$$\omega_X(f) = M - m, \tag{1.13}$$

gde je $M = \sup_{x \in X} f(x)$ i $m = \sup_{x \in X} f(x)$.

Dokaz. Pokazaćemo da važi jednakost

$$\sup_{x,x' \in X} (f(x) - f(x')) = M - m, \tag{1.14}$$

što će zajedno sa (1.12) implicirati (1.13). Za svako $x, x' \in X$ važi $f(x) \leq M$ i $f(x') \geq m$ i prema tome, $-f(x') \leq -m$. Stoga je

$$f(x) - f(x') \leq M - m, \text{ za sve } x, x' \in X. \tag{1.15}$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji $x_1 \in X$ tako da je

$$f(x_1) > M - \frac{\epsilon}{2} \tag{1.16}$$

i postoji $x_2 \in X$ tako da je $f(x_2) < m + \frac{\epsilon}{2}$, tj.

$$-f(x_2) > -m - \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.17}$$

Iz (1.16) i (1.17), sabiranjem, dobijamo

$$f(x_1) - f(x_2) > M - m - \epsilon. \tag{1.18}$$

S obzirom na proizvoljnost $\epsilon > 0$, (1.18) zajedno sa (1.15) povlači (1.14). ∎

Tvrđenje 1.13. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena na segmentu $[a, b]$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$ podela segmenta $[a, b]$. Tada važi*

$$S_P - s_P = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i, \tag{1.19}$$

gde je $\omega_i(f)$ oscilacija funkcije f na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz. Kako je $S_P - s_P = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i$, gde je $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ i $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, i kako je na osnovu Leme 1.12, $M_i - m_i = \omega_{[x_{i-1},x_i]}(f) = \omega_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$, to zaključujemo da važi jednakost (1.19). ■

Teorema 1.14. *(Osnovna teorema) Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(i) $f \in R[a, b]$;

(ii)[5] *Za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu P segmenta $[a, b]$ za koju je $d(P) < \delta$ važi*

$$S_P - s_P < \epsilon;$$

(iii) Za svako $\epsilon > 0$ postoji podela P segmenta $[a, b]$ tako da je

$$S_P - s_P < \epsilon;$$

(iv) $\underline{I} = \overline{I}$.

Pri tome je $\int_a^b f(x)dx = \underline{I} = \overline{I}$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Neka je funkcija f Riman integrabilna na segmentu $[a, b]$ i neka je $I = \int_a^b f(x)dx$. Tada za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$ za koju je $d(P) < \delta$ i svaki izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, važi $|\sigma(f, P, \xi) - I| < \dfrac{\epsilon}{2}$, tj.

$$I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma(f, P, \xi) < I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Odavde sledi

$$I - \frac{\epsilon}{2} \le \inf_{\xi} \sigma(f, P, \xi) \le \sup_{\xi} \sigma(f, P, \xi) \le I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Kako je na osnovu (1.8) $s_P = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$ i $S_P = \sup\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$, dobijamo

$$I - \frac{\epsilon}{2} \le s_P \le S_P \le I + \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.20}$$

[5] Uslov (ii) simbolički zapisujemo: $\lim\limits_{d(P)\to 0}(S_P - s_P) = 0$.

Prema tome, za svaku podelu P takvu da je $d(P) < \delta$ važi $S_P - s_p \leq \epsilon$. [6]

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Neka je funkcija f ograničena i neka važi uslov (ii). Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$), za koju je $d(P) < \delta$, važi

$$S_P - s_P < \epsilon. \tag{1.21}$$

Kako je

$$s_P \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_P, \tag{1.22}$$

to je

$$\overline{I} - \underline{I} \leq S_P - s_P$$

i prema tome,

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \epsilon.$$

S obzirom na proizvoljnost $\epsilon > 0$, zaključujemo da je $\overline{I} - \underline{I} = 0$ i stoga, $\underline{I} = \overline{I}$. Neka je $I = \underline{I} = \overline{I}$. Sada iz (1.22) dobijamo

$$s_P \leq I \leq S_P. \tag{1.23}$$

Kako je

$$s_P \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S_P \tag{1.24}$$

za svaki izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, to iz (1.23) i (1.24) sledi

$$|\sigma(f, P, \xi) - I| \leq S_P - s_P < \epsilon.$$

Prema tome, za svako $\epsilon > 0$ našli smo $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$), za koju je $d(P) < \delta$ i za svaki izbor tačaka $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, važi $|\sigma(f, P, \xi) - I| < \epsilon$. To znači da je funkcija f Riman integrabilna na segmentu $[a, b]$ i da je $\int_a^b f(x)dx = I$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Očigledno.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Neka je $\epsilon > 0$ i neka je P^* podela segmenta $[a, b]$, $P^* = \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*\}$, $a = x_0^* < x_1^* < \cdots < x_n^* = b$, za koju važi $S_{P^*} - s_{P^*} < \epsilon$. Funkcija f je ograničena na segmentu $[a, b]$, pa postoji $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, tako da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in [a, b]$. Izaberimo $\delta > 0$ tako da je $\delta < \dfrac{1}{2}(x_i^* - x_{i-1}^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, i $\delta < \dfrac{\epsilon}{4nK}$. Neka je

[6] Na osnovu (1.20) zaključujemo da smo dokazali još i da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu P za koju je $d(P) < \delta$ važi

$$I - \epsilon < s_P < I + \epsilon, \text{ tj. } |s_P - I| < \epsilon$$

i

$$I - \epsilon < S_P < I + \epsilon, \text{ tj. } |S_P - I| < \epsilon,$$

što kraće zapisujemo:

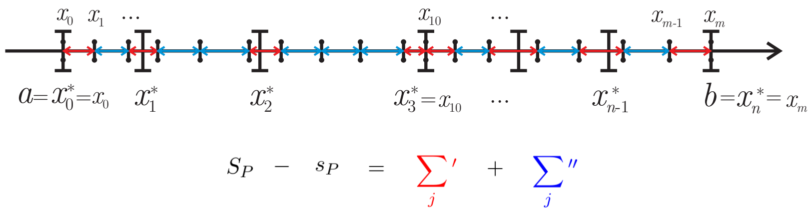
$$\lim_{d(P) \to 0} s_P = \lim_{d(P) \to 0} S_P = I.$$

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, podela segmenta $[a, b]$ takva da je $d(P) < \delta$. Pokazaćemo da je $S_P - s_P = \sum\limits_{j=1}^{m} (M_j - m_j)\Delta x_j < 2\epsilon$.

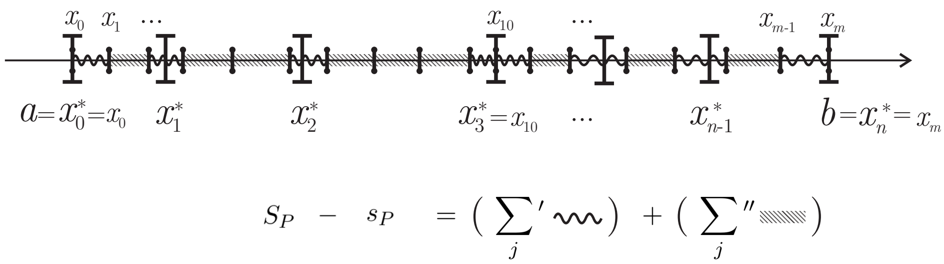
Sumu $S_P - s_P$ prikažimo u obliku

$$iS_P - s_P = \sum_j{}' (M_j - m_j)\Delta x_j + \sum_j{}'' (M_j - m_j)\Delta x_j,$$

pri čemu su u sumi $\sum\limits_j{}'$ nalaze sabirci (oblika $(M_j - m_j)\Delta x_j$) koji se odnose na one podsegmente podele P svaki od kojih sadrži jednu od tačaka podele P^*, dok se suma $\sum\limits_j{}''$ odnosi na ostale podsegmente podele P.



Crno - bela varijanta slike:



U sumi $\sum\limits_j{}'$ nema više od $2n$ sabiraka. Naime, jedan podsegment sadrži tačku a, jedan tačku b, a preostalih $n-1$ tačaka podele P^*, $x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$ pripadaju jednom ili dvoma podsegmentima podele P. Kako je $-K \leq f(x) \leq K$ za svako $x \in [a, b]$, to je $-K \leq m_j \leq M_j \leq K$, pa je $M_j - m_j \leq K - (-K) = 2K$, $j = 1, \ldots, m$. Prema tome,

$$\sum_j{}' (M_j - m_j)\Delta x_j < \sum_j{}' 2K\delta \leq 2n2K\delta = 4nK\delta < \epsilon.$$

Sumu $\sum\limits_j''$ zapišimo u obliku $\sum\limits_j'' = \sum\limits_{i=1}^n \sum^i$ gde se $\sum^i$ odnosi na one sabirke oblika $(M_j - m_j)\Delta x_j$ koji odgovaraju onim podsegmentima podele P, $[x_{j-1}, x_j]$, od kojih je svaki podskup jednog istog podsegmenta $[x_{i-1}^*, x_i^*]$ stare podele P^*:

$$\begin{aligned}\sum_j{}''(M_j - m_j)\Delta x_j &= \sum_{i=1}^n \sum{}^i (M_j - m_j)\Delta x_j \leq \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \sum{}^i \Delta x_j \\ &\leq \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* = S_{P^*} - s_{P^*} < \epsilon.\end{aligned}$$

Prema tome, $S_P - s_P < 2\epsilon$ za bilo koju podelu P segmenta $[a,b]$ dijametra manjeg od δ.

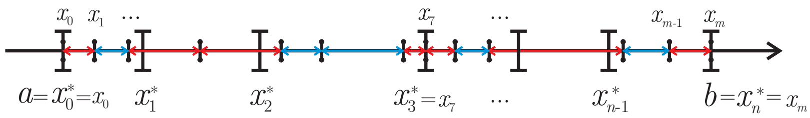
II način za (iii) $\Longrightarrow$ (ii):

Neka je $\epsilon > 0$ i neka je P^* podela segmenta $[a,b]$, $P^* = \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*\}$, $a = x_0^* < x_1^* < \cdots < x_n^* = b$, za koju važi $S_{P^*} - s_{P^*} < \epsilon$. Funkcija f je ograničena na segmentu $[a,b]$, pa postoji $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, tako da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in [a,b]$. Izaberimo $\delta > 0$ tako da je $\delta < \dfrac{\epsilon}{4nK}$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, podela segmenta $[a,b]$ takva da je $d(P) < \delta$. Pokazaćemo da je $S_P - s_P = \sum\limits_{j=1}^m (M_j - m_j)\Delta x_j < 2\epsilon$.

Sumu $S_P - s_P$ prikažimo u obliku

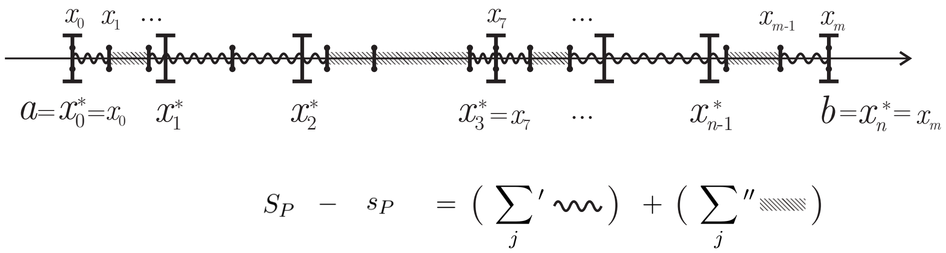
$$S_P - s_P = \sum_j{}'(M_j - m_j)\Delta x_j + \sum_j{}''(M_j - m_j)\Delta x_j,$$

pri čemu su u sumi $\sum\limits_j'$ nalaze sabirci (oblika $(M_j - m_j)\Delta x_j$) koji se odnose na one podsegmente podele P koji sadrže neku od tačaka podele P^*, dok se suma $\sum\limits_j''$ odnosi na ostale podsegmente podele P (može se desiti da svi podsegmenti podele P imaju neprazan presek sa podelom P^*, pa da u sumi $\sum\limits_j''$ nema nijednog sabirka).



$$S_P \;-\; s_P \;=\; \sum_j{}' \;+\; \sum_j{}''$$

Crno - bela varijanta slike:



U sumi $\sum\limits_j{}'$ nema više od $2n$ sabiraka. Naime, jedan podsegment sadrži tačku a, jedan tačku b, a preostalih $n-1$ tačaka podele P^*, $x_1^*, \dots, x_{n-1}^*$ pripadaju najviše dvoma podsegmentima podele P. Kako je $-K \le f(x) \le K$ za svako $x \in [a,b]$, to je $-K \le m_j \le M_j \le K$, pa je $M_j - m_j \le K - (-K) = 2K$, $j = 1, \dots, m$. Prema tome,

$$\sum_j{}'(M_j - m_j)\Delta x_j < \sum_j{}' 2K\delta \le 2n2K\delta = 4nK\delta < \epsilon.$$

Sumu $\sum\limits_j{}''$ zapišimo u obliku $\sum\limits_j{}'' = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum{}^i$ gde se $\sum{}^i$ odnosi na one sabirke oblika $(M_j - m_j)\Delta x_j$ koji odgovaraju onim podsegmentima podele P, $[x_{j-1}, x_j]$, od kojih je svaki podskup jednog istog podsegmenta $[x_{i-1}^*, x_i^*]$ stare podele P^* (može se desiti da u sumi $\sum{}^i$ za neko $i \in \{1, \dots, n\}$ nema nijednog sabirka):

$$\begin{aligned}
\sum_j{}''(M_j - m_j)\Delta x_j &= \sum_{i=1}^{n}\sum{}^i(M_j - m_j)\Delta x_j \le \sum_{i=1}^{n}(M_i^* - m_i^*)\sum{}^i \Delta x_j \\
&\le \sum_{i=1}^{n}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* = S_{P^*} - s_{P^*} < \epsilon.
\end{aligned}$$

(Čak i ako je neka od suma $\sum^i$ "prazna", $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, važiće da je $\sum_j''(M_j - m_j)\Delta x_j \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i^* = S_{P^*} - s_{P^*} < \epsilon$. Ako i cela suma $\sum_j''$ nema nijedan sabirak, opet je $S_P - s_P = \sum_j'(M_j - m_j)\Delta x_j < \epsilon < 2\epsilon$.) Prema tome, $S_P - s_P < 2\epsilon$ za bilo koju podelu P segmenta $[a, b]$ dijametra manjeg od δ.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Neka je $\epsilon > 0$ i neka je P podela segmenta $[a, b]$ za koju važi $S_P - s_P < \epsilon$. Kako je $s_P \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_P$, to je $\overline{I} - \underline{I} \leq S_P - s_P$, i prema tome, $0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \epsilon$. S obzirom da poslednja nejednakost važi za svako $\epsilon > 0$, zaključujemo da je $\overline{I} - \underline{I} = 0$, tj. $\underline{I} = \overline{I}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii): Pretpostavimo da je $\underline{I} = \overline{I}$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Kako je $\underline{I} = \sup_P s_P$, postoji podela P_1 tako da je $\underline{I} - \frac{\epsilon}{2} < s_{P_1}$, a kako je $\overline{I} = \inf_P S_P$, postoji podela P_2 za koju je $S_{P_2} < \overline{I} + \frac{\epsilon}{2}$. Tada za podelu $P = P_1 \cup P_2$ na osnovu Tvrđenja 1.9 važi

$$\underline{I} - \frac{\epsilon}{2} < s_{P_1} \leq s_P \leq S_P \leq S_{P_2} < \overline{I} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Odavde, s obzirom da je $\underline{I} = \overline{I}$, sledi $S_P - s_P < \epsilon$. ■

Posledica 1.15. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(i) $f \in \mathcal{R}[a, b]$;

(ii) Za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$) za koju je $d(P) < \delta$ važi

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \epsilon,$$

gde je $\omega_i(f)$ oscilacija funkcije f na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$;[7]

(iii) Za svako $\epsilon > 0$ postoji podela $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$) tako da je

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \epsilon.$$

Dokaz. Sledi iz ekvivalencija (i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) u Teoremi 1.14 i Tvrđenja 1.13. ■

Teorema 1.16. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena i neka je (P_n) niz podela segmenta $[a, b]$, $P_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$, $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$, takav da je $\lim_{n\to\infty} d(P_n) = 0$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

[7] Ovaj uslov kraće zapisujemo:

$$\lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = 0.$$

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *tj. postoji* $I = \int_a^b f(x)dx$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} S_{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{P_n} = I$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{P_n} - s_{P_n}) = 0$.

Dokaz. (i)$\Longrightarrow$(ii): Pretpostavimo da je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i neka je $I = \int_a^b f(x)dx$. Tada na osnovu Definicije 1.4, za proizvoljan izbor tačaka $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$, $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, \dots, k_n$, $n = 1, 2, \dots$, važi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = I. \tag{1.25}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Iz (1.25) sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, važi

$$I - \epsilon < \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) < I + \epsilon.$$

Odavde sledi

$$I - \epsilon \leq \inf_{\xi^{(n)}} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) \leq \sup_{\xi^{(n)}} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) \leq I + \epsilon, \text{ za } n \geq n_0,$$

tj.

$$I - \epsilon \leq s_{P_n} \leq S_{P_n} \leq I + \epsilon, \text{ za } n \geq n_0.$$

Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{P_n} = I$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{P_n} = I$. Budući da je razlika dva konvergentna niza (S_{P_n}) i (s_{P_n}) takođe konvergentan niz čija je granična vrednost jednaka razlici graničnih vrednosti nizova (S_{P_n}) i (s_{P_n}), dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} (S_{P_n} - s_{P_n}) = \lim_{n\to\infty} S_{P_n} - \lim_{n\to\infty} s_{P_n} = I - I = 0.$$

(iii)$\Longrightarrow$(i): Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{P_n} - s_{P_n}) = 0$. Tada za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $S_{P_n} - s_{P_n} < \epsilon$. Budući da je ispunjen uslov (iii) Teoreme 1.14 zaključujemo da je $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ■

Iz Teoreme 1.16 sledi da je dovoljno da bismo pokazali da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ naći jedan niz podela (P_n) segmenta $[a,b]$ za koji $d(P_n) \to 0$, $n \to \infty$, i pokazati da važi (ii) ili (iii). Na primer, može se uzeti da P_n bude podela "na n jednakih delova", preciznije, $P_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\}$.

Primer 1.17. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Za proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[0,1]$ $(0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1)$ imamo da je

$$s_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (-1) \cdot \Delta x_i = -\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = -1$$

i

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1,$$

pa je

$$\underline{I} = \sup_P s_P = -1 \quad \text{i} \quad \overline{I} = \inf_P S_P = 1.$$

Iz $\underline{I} \neq \overline{I}$, na osnovu Teoreme 1.14 (ekvivalencija (i) $\Longleftrightarrow$ (iv)), sledi da funkcija f nije integrabilna.

Slično, za Dirihleovu funkciju na segmentu $[0,1]$ imamo da je $\underline{I} = 0 < 1 = \overline{I}$, pa je ovo još jedan način da se pokaže da ova funkcija nije integrabilna. •

1.3 Integrabilnost neprekidnih i monotonih funkcija

Da bismo dokazali integrabilnost neprekidnih funkcija biće nam potreban pojam ravnomerno neprekidnih funkcija.

Definicija 1.18. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je *ravnomerno neprekidna na skupu* X ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svake dve tačke $x \in X$, $x' \in X$, takve da je $|x' - x| < \delta$, važi nejednakost $|f(x') - f(x)| < \epsilon$.

Uslov ravnomerne neprekidnosti funkcije f na skupu X zapisujemo:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in X)(|x' - x| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x)| < \epsilon). \tag{1.26}$$

Ako je funkcija f ravnomerno neprekidna na skupu X, onda je očigledno ona ravnomerno neprekidna na svakom podskupu skupa X.

Primetimo da ako je funkcija f ravnomerno neprekidna na skupu X, onda je ona neprekidna na skupu X, tj. neprekidna je u svakoj tački skupa X. Obrnuto u opštem slučaju ne važi kao što ćemo videti u narednim Primerima 1.23 i 1.24.

Ako je funkcija f neprekidna u svakoj tački $x \in X$, onda za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ koje zavisi od tog ϵ ali i od tačke x skupa X, tako da za sve $x' \in X$ takve da je $|x' - x| < \delta$ važi $|f(x') - f(x)| < \epsilon$. Napominjemo da u slučaju ravnomerno neprekidne funkcije f, izbor broja δ zavisi samo od ϵ, a ne i od tačke x skupa X. Da bismo još jasnije uvideli razliku uslova neprekidnosti funkcije f na skupu X i uslova ravnomerne neprekidnosti (1.26), zapišimo uslov neprekidnosti funkcije f na skupu X logičkim simbolima:

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in X)(|x' - x| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x)| < \epsilon). \tag{1.27}$$

Primer 1.19. Funkcija $f(x) = x$ je ravnomerno neprekidna na skupu $\mathbb{R}$, jer je za proizvoljno $\epsilon > 0$ dovoljno izabrati $\delta = \epsilon$, te će za sve $x, x' \in \mathbb{R}$ takve da je $|x - x'| < \delta$ važiti $|f(x) - f(x')| = |x - x'| < \delta = \epsilon$. •

Primer 1.20. Funkcija $f(x) = \cos x$ je ravnomerno neprekidna na skupu $\mathbb{R}$. Zaista, budući da je

$$|\cos x - \cos x'| = \left|-2 \sin \frac{x - x'}{2}\right| \left|\sin \frac{x + x'}{2}\right| \leq 2 \frac{|x - x'|}{2} = |x - x'|, \quad x, x' \in \mathbb{R},$$

za proizvoljno $\epsilon > 0$ treba uzeti $\delta = \epsilon$, pa će za sve $x, x' \in \mathbb{R}$ takve da je $|x - x'| < \delta$ važiti

$$|f(x) - f(x')| = |\cos x - \cos x'| \leq |x - x'| < \delta = \epsilon. \; \bullet$$

Za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ kažemo da zadovoljava Lipšicov uslov na skupu X ako postoji konstanta $L > 0$, tako da za sve $x, x' \in X$ važi

$$|f(x) - f(x')| \leq L\,|x - x'|.$$

Tvrđenje 1.21. *Ako funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ zadovoljava Lipšicov uslov na skupu X, onda je ona ravnomerno neprekidna na skupu X.*

Dokaz. Neka funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom L na skupu X. Tada je za proizvoljno $\epsilon > 0$ dovoljno uzeti $\delta = \dfrac{\epsilon}{L}$, pa će za sve $x, x' \in X$ takve da je $|x - x'| < \delta$ važiti

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'| < L\delta = \epsilon. \; \blacksquare$$

Neka je I jedan od intervala oblika $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$.

Tvrđenje 1.22. *Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu I i neka ima ograničen izvod u svim unutrašnjim tačkama intervala I. Tada je funkcija f ravnomerno neprekidna na intervalu I.*

Dokaz. Određenosti radi neka je $I = [a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Postoji $L > 0$ tako da je $|f'(x)| \leq L$ za svaku unutrašnju tačku x intervala I. Neka su x_1 i x_2 proizvoljne tačke iz intervala I i neka je $x_1 < x_2$. Tada je $a \leq x_1 < x_2 < b$ i s obzirom da je funkcija neprekidna na segmentu $[x_1, x_2]$ i diferencijabilna u intervalu (x_1, x_2) ona ispunjava uslove Lagranžove teoreme na segmentu $[x_1, x_2]$, odakle onda sledi da postoji tačka $\xi \in (x_1, x_2)$ tako da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \tag{1.28}$$

Budući da je ξ unutrašnja tačka intervala I, sledi $|f'(\xi)| \leq L$. Sada iz (1.28) dobijamo

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Prema tome, funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu I, pa je ravnomerno neprekidna na intervalu I na osnovu Tvrđenja 1.21.

Za ostale tipove intervala tvrđenje se dokazuje analogno. ∎

Primetimo da funkcija iz Primera 1.19, kao i funkcija iz Primera 1.20, ima ograničen izvod na skupu $\mathbb{R}$.

Primer 1.23. Funkcija $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ nije ravnomerno neprekidna na intervalu $(0, 1]$. Zaista, za $\epsilon = 2$ i svako $\delta > 0$ postoje tačke $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ i $x'_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, takve da je $|x_n - x'_n| < \delta$ za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ i

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = |\cos 2n\pi - \cos(2n+1)\pi| = |1 - (-1)| = 2 \geq \epsilon.$$

Napomenimo da je ova funkcija, kao elementarna, neprekidna u svakoj tački svog domena. •

Primer 1.24. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je ravnomerno neprekidna na intervalu $[1, +\infty)$. Zaista, za proizvoljno $\epsilon > 0$ dovoljno je uzeti $\delta = \epsilon$, pa će za sve $x, x' \in [1, +\infty)$ takve da je $|x - x'| < \delta$ važiti nejednakost:

$$|f(x) - f(x')| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = \frac{|x' - x|}{|x'||x|} \leq |x' - x| < \delta = \epsilon.$$

Ravnomernu neprekidnost ove funkcije na intervalu $[1, +\infty)$ smo mogli dobiti i na osnovu Tvrđenja 1.22 jer je izvodna funkcija $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ograničena na intervalu $[1, +\infty)$: $|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \leq 1.$

Međutim ova funkcija nije ravnomerno neprekidna na intervalu $(0, 1]$. Zaista, za $\epsilon = 1$ i svako $\delta > 0$ postoje brojevi $x_n = \frac{1}{n}$ i $x'_n = \frac{1}{2n}$ takvi da je $|x_n - x'_n| < \delta$ za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ i

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = |n - 2n| = n \geq 1 = \epsilon. \bullet$$

Primećujemo da ukoliko na malim po dužini intervalima dolazi do relativno velikih promena (oscilacija) funkcje, onda funkcija nije ravnomerno neprekidna.

Videli smo da neprekidnost funkcije na skupu X potreban ali ne i dovoljan uslov za njenu ravnomernu neprekidnost na skupu X. Međutim u slučaju kada je skup X segment, ova dva uslova su ekvivalentna, što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1.25. *(Kantorova teorema) Neprekidna funkcija na segmentu je ravnomerno neprekidna.*

Dokaz. Dokaz izvodimo metodom svođenja na apsurd. Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i pretpostavimo da nije ravnomerno neprekidna. Tada postoji $\epsilon_0 > 0$ tako da za svako $\delta > 0$ postoje tačke $x'_\delta, x''_\delta \in [a, b]$ [8] takve da je $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ i

[8] Indeks δ označava da ove tačke zavise od izbora δ.

$|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \epsilon_0$. Prema tome, za $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ postoje tačke $x'_n = x'_{\delta_n}$, $x''_n = x''_{\delta_n} \in [a,b]$ takve da je

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \tag{1.29}$$

i

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon_0. \tag{1.30}$$

Niz $(x'_n)_n$ je ograničen i na osnovu Bolcano-Vaještrasove teoreme postoji konvergentan podniz $(x'_{n_k})_k$ niza $(x'_n)_n$. Neka je $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Naravno, $x_0 \in [a,b]$. Dokažimo da i odgovarajući podniz $(x''_{n_k})_k$ niza $(x''_n)_n$ konvergira ka tački x_0. Na osnovu 1.29 imamo da za svako $k \in \mathbb{N}$ važi:

$$0 \leq |x''_{n_k} - x_0| = |(x''_{n_k} - x'_{n_k}) + (x'_{n_k} - x_0)| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x_0| \leq \frac{1}{n_k} + |x'_{n_k} - x_0|,$$

a kako je $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{n_k} = 0$ i $\lim\limits_{k\to\infty} |x'_{n_k} - x_0| = 0$, to na osnovu teoreme o dva policajca zaključujemo da je

$$\lim_{k\to\infty} |x''_{n_k} - x_0| = 0,$$

tj. $\lim\limits_{k\to\infty} x''_{n_k} = x_0$. Sada na osnovu neprekidnosti funkcije f u tački $x_0 \in [a,b]$ sledi

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0),$$

i prema tome,

$$\lim_{k\to\infty} (f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})) = 0. \tag{1.31}$$

Međutim, na osnovu (1.30) imamo da važi nejednakost

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \epsilon_0, \text{ za svako } k \in \mathbb{N},$$

što protivureči uslovu (1.31). ■

Sada smo spremni da dokažemo da je svaka neprekidna funkcija na segmentu integrabilna.

Teorema 1.26. *Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada je f integrabilna na $[a,b]$.*

Dokaz. Budući da je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$, ona je ograničena na osnovu Vajerštraove teoreme i ravnomerno neprekidna na osnovu Kantorove teoreme. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Zbog ravnomerne neprekidnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$ postoji $\delta > 0$ tako da za svake dve tačke $x', x'' \in [a,b]$ važi

$$|x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{1.32}$$

Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$ podela segmenta $[a,b]$ dijametra $d(P) < \delta$. Neka je $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Kako je funkcija f neprekidna na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, to opet na osnovu Vajerštrasove teoreme ona dostiže svoj supremum i svoj infimum na tom segmentu, tj. postoje tačke $\lambda_i, \mu_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takve da je $f(\lambda_i) = M_i$ i $f(\mu_i) = m_i$. Kako $\lambda_i, \mu_i \in [x_{i-1}, x_i]$, to je

$$|\lambda_i - \mu_i| \leq \Delta x_i \leq d(P) < \delta$$

i stoga na osnovu (1.32) sledi

$$M_i - m_i = f(\lambda_i) - f(\mu_i) = |f(\lambda_i) - f(\mu_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Otuda

$$S_P - s_P = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon.$$

Prema tome, funkcija f je ograničena na segmentu $[a, b]$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ našli smo $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ za koju je $d(P) < \delta$ važi $S_P - s_P < \epsilon$, što na osnovu Teoreme 1.14 znači da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$. ■

Teorema 1.27. *Monotona funkcija na segmentu je integrabilna.*

Dokaz. Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotono rastuća na segmentu $[a, b]$. Tada za svako $x \in [a, b]$ $(a \leq x \leq b)$ važi nejednakost $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, pa je funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$. Ako je $f(a) = f(b)$, onda je $f(x) = f(a) = f(b)$ za svako $x \in [a, b]$, tj. funkcija je konstantna, pa je integrabilna. Pretpostavimo da je $f(a) \neq f(b)$. Tada je $f(b) - f(a) > 0$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno i neka je $\delta = \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$. Tada je $\delta > 0$ i za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ za koju je $d(P) < \delta$ važi

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1}), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i)$$

i

$$\begin{aligned} S_P - s_P &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \\ &\leq d(P) \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = d(P)(f(b) - f(a)) \\ &< \delta(f(b) - f(a)) = \epsilon. \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija f je ograničena na segmentu $[a, b]$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ dijametra $d(P) < \delta$ važi $S_P - s_P < \epsilon$, te iz Teoreme 1.14 sledi da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$.

Slično se dokazuje integrabilnost monotono opadajuće funkcije. [9] ■

[9] Za slučaj monotone opadajuće funkcije može se iskoristiti već dokazani deo tvrđenja. Naime,

1.4 Osobine određenog integrala

Tvrđenje 1.28. *Neka je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i neka $[c,d] \subset [a,b]$. Tada je $f \in \mathcal{R}[c,d]$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Iz $f \in \mathcal{R}[a,b]$, na osnovu Teoreme 1.7 sledi da je funkcija f ograničena na segmentu $[a,b]$, pa je ograničena i na segmentu $[c,d]$, dok na osnovu Teoreme 1.14 (ekvivalencija (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)) sledi da postoji podela P segmenta $[a,b]$ tako da važi nejednakost

$$S_P - s_P < \epsilon. \tag{1.33}$$

Neka je $P_1 = P \cup \{c,d\}$. Iz $P \subset P_1$, na osnovu Tvrđenja 1.9, sledi

$$s_P \le s_{P_1} \le S_{P_1} \le S_P,$$

pa je $S_{P_1} - s_{P_1} \le S_P - s_P$. Odavde, s obzirom na (1.33), sledi

$$S_{P_1} - s_{P_1} < \epsilon. \tag{1.34}$$

Neka je $P^* = P_1 \cap [c,d]$. Jasno, P^* je podela segmenta $[c,d]$ i označimo sa S^* i s^* gornju i donju Darbuovu sumu funkcije f na segmentu $[c,d]$ u odnosu na podelu P^*. Kako je $S^* - s^* \le S_{P_1} - s_{P_1}$, iz (1.34) sledi

$$S^* - s^* < \epsilon. \tag{1.35}$$

Prema tome, funkcija f je ograničena na segmentu $[c,d]$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ našli smo podelu P^* segmenta $[c,d]$ tako da važi nejednakost (1.35), te na osnovu Teoreme 1.14 (ekvivalencija (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)) sledi da je $f \in \mathcal{R}[c,d]$. ■

Tvrđenje 1.29. *Neka je $a < c < b$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, i neka je $f \in \mathcal{R}[a,c]$ i $f \in \mathcal{R}[c,b]$. Tada je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i važi jednakost:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1.36}$$

Dokaz. Iz $f \in \mathcal{R}[a,c]$ i $f \in \mathcal{R}[c,b]$ sledi da je funkcija f ograničena na segmentu $[a,c]$, a takođe i na segmentu $[c,b]$, pa je ograničena na segmentu $[a,b]$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno izabrano. Na osnovu Teoreme 1.14 (ekvivalencija (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)) sledi da postoji podela P_1 segmenta $[a,c]$ i podela P_2 segmenta $[c,b]$ tako da je

$$S_{P_1} - s_{P_1} < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ i } \ S_{P_2} - s_{P_2} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.37}$$

Neka je $P = P_1 \cup P_2$. Jasno, P je podela segmenta $[a,b]$ i važi da je $S_P = S_{P_1} + S_{P_2}$ i $s_P = s_{P_1} + s_{P_2}$. Odavde i iz (1.37) sledi

$$S_P - s_P = (S_{P_1} + S_{P_2}) - (s_{P_1} + s_{P_2}) = (S_{P_1} - s_{P_1}) + (S_{P_2} - s_{P_2}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

---

ako je funkcija f monotono opadajuća na segmentu $[a,b]$, onda se funkcija $-f$ monotono rastuća na segmentu $[a,b]$ i na osnovu prethodno dokazanog dela integrabilna. Sada na osnovu Tvrđenja sledi da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$.

Prema tome, funkcija f je ograničena na segmentu $[a, b]$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ našli smo podelu P segmenta $[a, b]$ tako da važi nejednakost $S_P - s_p < \epsilon$, te opet na osnovu Teoreme 1.14 (ekvivalencija (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)) sledi da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$.

Da bismo dokazali jednakost (1.36) uočimo jedan niz (P_n) podela segmenta $[a, b]$ takvih da $c \in P_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$. Neka je $P'_n = P_n \cap [a, c]$ i $P''_n = P_n \cap [c, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Jasno, P'_n je podela segmenta $[a, c]$, P''_n je podela segmenta $[c, b]$ i važi jednakost

$$S_{P_n} = S_{P'_n} + S_{P''_n}. \tag{1.38}$$

Kako je

$$0 < d(P'_n) \leq d(P_n) \quad \text{i} \quad 0 < d(P''_n) \leq d(P_n),$$

iz $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} d(P''_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(P'_n) = 0$. Sada na osnovu Teoreme 1.16 zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} S_{P_n} = \int_a^b f(x)dx, \ \lim_{n\to\infty} S_{P'_n} = \int_a^c f(x)dx \text{ i } \lim_{n\to\infty} S_{P''_n} = \int_c^b f(x)dx.$$

Prelaskom na graničnu vrednost u jednakosti (1.38), kad $n \to \infty$, dobijamo jednakost (1.36). ■

Kad smo uvodili pojam određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ pretpostavljali smo da je $a < b$. Sada ćemo dati definiciju oznake $\int_a^b f(x)dx$ i za slučaj kada je $a \geq b$.

Definicija 1.30. Ako je funkcija f definisana u tački a, onda je

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Ako je $a < b$ i funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$, onda je

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx. \ \square$$

Ova definicija je prirodna s te strane, što se u prvom slučaju, kada je $a = b$, segment $[a, b]$ svodi na tačku, te se i podsegmenti odredjeni proizvoljnom podelom svode na tačku, pa su njihove dužine Δx_i jednake 0 i proizvoljna integralna suma je onda jednaka 0. U drugom slučaju kada je $a < b$, za podelu $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ važi $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = -\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, tj. integralne sume integrala $\int_b^a f(x)dx$ razlikuju se samo u znaku od odgovarajućih integralnih suma integrala $\int_a^b f(x)dx$.

Tvrđenje 1.31. *Neka su tačke $a, b, c \in \mathbb{R}$ krajevi triju segmenata i neka je funkcija f integrabilna na najvećem među njima. Tada je funkcija f integrabilna i na ostala dva segmenta i važi jednakost:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1.39}$$

Dokaz. S obzirom da je funkcija f integrabilna na najvećem od tih triju segmenata, na osnovu Tvrđenja 1.28, integrabilna je i na ostala dva. Za dokaz jednakosti (1.39), neka je, recimo, $a < b < c$. Iz Tvrđenja 1.29 sledi

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx,\end{aligned}$$

odakle dobijamo (1.39). ■

Tvrđenje 1.32. *Neka je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i neka je $k \in \mathbb{R}$. Tada je $kf \in \mathcal{R}[a,b]$ i važi jednakost:*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Dokaz. Neka je (P_n) niz podela segmenta $[a,b]$, $P_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$, $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$, za koji važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ i neka je $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$ proizvoljan izbor tačaka $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, \dots, k_n$, $n = 1, 2, \dots$. Budući da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$, niz integralnih suma $(\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}))_n$ konvergira ka $\int_a^b f(x)dx$. Kako je

$$\begin{aligned}\sigma(kf, P_n, \xi^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{k_n} kf(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = k\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \\ &= k\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}),\end{aligned}$$

sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(kf, P_n, \xi^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} k\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = k\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = k\int_a^b f(x)dx.$$

Na osnovu Definicije 1.4 zaključujemo da je funkcija kf integrabilna na segmentu $[a,b]$ i da je $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$. ■

Tvrđenje 1.33. *Neka su $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Tada je $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ i važi jednakost:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Neka je (P_n) niz podela segmenta $[a,b]$, $P_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$, $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$, za koji važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ i neka je $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$ proizvoljan izbor tačaka $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, \dots, k_n$, $n = 1, 2, \dots$. Iz $f, g \in$

$\mathcal{R}[a,b]$ sledi da su nizovi $(\sigma(f,P_n,\xi^{(n)}))_n$ i $(\sigma(g,P_n,\xi^{(n)}))_n$ konvergentni i da je $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(f,P_n,\xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(g,P_n,\xi^{(n)}) = \int_a^b g(x)dx$. Budući da je

$$\begin{aligned}
\sigma(f+g,P_n,\xi^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{k_n}(f(\xi_i^{(n)})+g(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}) + \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}) \\
&= \sigma(f,P_n,\xi^{(n)}) + \sigma(g,P_n,\xi^{(n)}),
\end{aligned}$$

zaključujemo da je niz $(\sigma(f+g,P_n,\xi^{(n)}))_n$ konvergentan kao suma dva konvergentna niza i da je

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f+g,P_n,\xi^{(n)}) = \lim_{n\to\infty}\sigma(f,P_n,\xi^{(n)}) + \lim_{n\to\infty}\sigma(g,P_n,\xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Sada na osnovu Definicije 1.4 zaključujemo da je funkcija $f+g$ integrabilna na segmentu $[a,b]$ i da je $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. ■

Iz Tvrđenja 1.32 i 1.33 sledi svojstvo linearnosti određenog integrala.

Posledica 1.34. *(Linearnost određenog integrala) Neka su* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *i* $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$. *Tada je* $k_1f_1 + k_2f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ *i*

$$\int_a^b (k_1f_1(x)+k_2f_2(x))dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

Tvrđenje 1.35. *Neka su* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. *Tada je* $f\cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$.

Dokaz. Iz integrabilnosti funkcija f i g na segmentu $[a,b]$ sledi da su one ograničene na tom segmentu, te postoje realni brojevi $L_1 > 0$ i $L_2 > 0$ takvi da je

$$|f(x)| \le L_1, \quad |g(x)| \le L_2, \quad \text{za sve } x \in [a,b]. \tag{1.40}$$

Odavde sledi $|f(x)g(x)| \le L_1L_2$, za sve $x \in [a,b]$, i prema tome, funkcija $f\cdot g$ je ograničena na segmentu $[a,b]$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna podela segmenta $[a,b]$ i neka su x, x' dve proizvoljne tačke iz segmenta $[x_{i-1}, x_i]$, gde $i \in \{1,\ldots,n\}$. Iz (1.40) sledi

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(x')g(x')| &= |f(x)g(x) - f(x')g(x) + f(x')g(x) - f(x')g(x')| \\
&= |(f(x)-f(x'))g(x) + f(x')(g(x)-g(x'))| \\
&\le |f(x)-f(x')||g(x)| + |f(x')||g(x)-g(x')| \\
&\le L_2|f(x)-f(x')| + L_1|g(x)-g(x')| \\
&\le L_2\omega_i(f) + L_1\omega_i(g),
\end{aligned}$$

odakle dobijamo

$$\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| \le L_2\omega_i(f) + L_1\omega_i(g),$$

tj.

$$\omega_i(fg) \leq L_2\omega_i(f) + L_1\omega_i(g),\ i = 1, \ldots, n.$$

Množenjem svake od ovih nejednakosti sa Δx_i i sabiranjem dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(fg)\Delta x_i \leq L_2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i + L_1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i. \tag{1.41}$$

Neka je $\epsilon > 0$. Iz integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a, b]$, na osnovu Posledice 1.15 (ekvivalencija (i)$\Longleftrightarrow$(ii)), sledi da postoji $\delta_1 > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ takvu da je $d(P) < \delta_1$ važi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2L_2}, \tag{1.42}$$

dok iz integrabilnosti funkcije g sledi da postoji $\delta_2 > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ takvu da je $d(P) < \delta_2$ sledi

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2L_1}. \tag{1.43}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ takvu da je $d(P) < \delta$, na osnovu (1.41), (1.42) i (1.43), važi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(fg)\Delta x_i < L_2\frac{\epsilon}{2L_2} + L_1\frac{\epsilon}{2L_1} = \epsilon. \tag{1.44}$$

S obzirom da je funkcija $f \cdot g$ ograničena na segmentu $[a, b]$ i da smo za proizvoljno $\epsilon > 0$ pokazali da postoji $\delta > 0$, tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ za koju je $d(P) < \delta$ važi nejednakost (1.44), na osnovu Posledice 1.15 (ekvivalencija (i)$\Longleftrightarrow$(ii)), sledi $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$. ■

Primetimo da smo prethodno tvrđenje mogli dokazati koristeći ekvivalenciju (i)$\Longleftrightarrow$(iii) Teoreme 1.14, odnosno Posledice 1.15. Zaista, neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Iz integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a, b]$, na osnovu Teoreme 1.14 ili Posledice 1.15 (ekvivalencija (i)$\Longleftrightarrow$(iii)) sledi da postoji podela P_1 segmeta $[a, b]$ tako da je

$$S_{P_1}(f) - s_{P_1}(f) = \sum_{i} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{2L_2}, \tag{1.45}$$

dok iz integrabilnosti funkcije g na segmentu $[a, b]$ sledi da postoji podela P_2 segmeta $[a, b]$ tako da je

$$S_{P_2}(g) - s_{P_2}(g) = \sum_{j} \omega_j(g)\Delta x_j < \frac{\epsilon}{2L_1}. \tag{1.46}$$

Neka je $P = P_1 \cup P_2$. Tada iz (1.41) sledi

$$\begin{aligned} S_P(fg) - s_P(fg) &= \sum_k \omega_k(fg)\Delta x_k \\ &\leq L_2 \sum_k \omega_k(f)\Delta x_k + L_1 \sum_k \omega_k(g)\Delta x_k \qquad (1.47) \\ &= L_2(S_P(f) - s_P(f)) + L_1(S_P(g) - s_P(g)). \end{aligned}$$

Na osnovu Tvrđenja 1.9, iz $P_1 \subset P$ sledi

$$s_{P_1}(f) \leq s_P(f) \leq S_P(f) \leq S_{P_1}(f),$$

dok iz $P_2 \subset P$ sledi

$$s_{P_2}(g) \leq s_P(g) \leq S_P(g) \leq S_{P_2}(g).$$

Stoga je

$$S_P(f) - s_P(f) \leq S_{P_1}(f) - s_{P_1}(f) \ \text{ i } \ S_P(g) - s_P(g) \leq S_{P_2}(g) - s_{P_2}(g). \tag{1.48}$$

Sada, na osnovu (1.47) i (1.48) sledi

$$S_P(fg) - s_P(fg) \leq L_2(S_{P_1}(f) - s_{P_1}(f)) + L_1(S_{P_2}(g) - s_{P_2}(g)),$$

što zajedno sa (1.45) i (1.46) povlači nejednakost:

$$S_P(fg) - s_P(fg) < L_2\frac{\epsilon}{2L_2} + L_1\frac{\epsilon}{2L_1} = \epsilon.$$

Dakle, funkcija fg je ograničena na segmentu $[a,b]$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji podela P segmenta $[a,b]$ tako da važi $S_P(fg) - s_P(fg) < \epsilon$, odakle na osnovu Teoreme 1.14 ((i)$\Longleftrightarrow$(iii)) sledi da $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

Tvrđenje 1.36. *Neka je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i neka postoji $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, tako da je*

$$|f(x)| \geq m \text{ za sve } x \in [a,b]. \tag{1.49}$$

Tada je $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}[a,b]$.

Dokaz. Iz $|f(x)| \geq m$ sledi da je $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \leq \dfrac{1}{m}$ za sve $x \in [a,b]$, pa je funkcija $\dfrac{1}{f}$ ograničena na segmentu $[a,b]$. Neka je $\epsilon > 0$. Iz integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$, na osnovu Posledice 1.15 ((i)$\Longleftrightarrow$(iii)), sledi da postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a,b]$ takva da je

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < m^2\epsilon. \tag{1.50}$$

Neka su x, x' dve proizvoljne tačke iz segmenta $[x_{i-1}, x_i]$, gde $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada iz (1.49) sledi

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')}\right| = \frac{|f(x') - f(x)|}{|f(x')||f(x)|} \leq \frac{1}{m^2}|f(x') - f(x)| \leq \frac{1}{m^2}\omega_i(f),$$

pa je

$$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{m^2}\omega_i(f), \ i = 1, \dots, n.$$

Odavde množenjem sa Δx_i i sabiranjem, $i = 1, \ldots, n$, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\frac{1}{f}\right) \Delta x_i \leq \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i,$$

što zajedno sa (1.50) povlači nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\frac{1}{f}\right) \Delta x_i < \frac{1}{m^2} m^2 \epsilon = \epsilon. \tag{1.51}$$

Prema tome, funkcija $\frac{1}{f}$ je ograničena na segmentu $[a, b]$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ pokazali smo da postoji podela P segmenta $[a, b]$ tako da važi nejednakost (1.51), pa je, na osnovu Posledice 1.15 ((i)$\Longleftrightarrow$(iii)), funkcija $\frac{1}{f}$ integrabilna na tom segmentu. $\blacksquare$

U dokazu Tvrđenja 1.36 se može umesto ekvivalencije (i)$\Longleftrightarrow$(iii) iz Posledice 1.15 koristiti i ekvivalencija (i)$\Longleftrightarrow$(ii).

Tvrđenje 1.37. *Neka su $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ i neka postoji $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, tako da je $|g(x)| \geq m$ za sve $x \in [a, b]$. Tada je $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Dokaz. Iz Tvrđenja 1.36 sledi da je funkcija $\frac{1}{g}$ integrabilna na segmentu $[a, b]$. Sada na osnovu Tvrđenja 1.35 sledi da je funkcija $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ integrabilna na segmentu $[a, b]$, kao proizvod dve integrabilne funkcije na tom segmentu. $\blacksquare$

Tvrđenje 1.38. *Neka su $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ i*

$$f(x) \geq g(x) \text{ za sve } x \in [a, b]. \tag{1.52}$$

Tada je

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz. Neka je (P_n) niz podela segmenta $[a, b]$, $P_n = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}$, $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$, za koji važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ i neka je $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)})$ proizvoljan izbor tačaka $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, \ldots, k_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Iz $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ sledi da su nizovi $(\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}))_n$ i $(\sigma(g, P_n, \xi^{(n)}))_n$ konvergentni i da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(g, P_n, \xi^{(n)}) = \int_a^b g(x)dx$, dok iz uslova (1.52) sledi da je $f((\xi_i^{(n)}) \geq g(\xi_i^{(n)})$, $i = 1, \ldots, k_n$, $n \in \mathbb{N}$, i stoga

$$\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \geq \sum_{i=1}^{k_n} g(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \sigma(g, P_n, \xi^{(n)}).$$

Odavde, prelaskom na limes, dobijamo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) \geq \lim_{n\to\infty} \sigma(g, P_n, \xi^{(n)}) = \int_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

Osobina integrala, iskazana u Tvrđenju 1.38, zove se *monotonost integrala.*

Posledica 1.39. *Neka je* $f \in \mathcal{R}[a,b]$*. Ako je*

$$f(x) \geq 0 \text{ za sve } x \in [a,b], \tag{1.53}$$

onda je

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Ako je

$$f(x) \leq 0 \text{ za sve } x \in [a,b],$$

onda je

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

Dokaz. Neka važi (1.53). Ako se uzme da je $g(x) = 0,\ x \in [a,b]$, na osnovu Primera 1.5 sledi da je $g \in \mathcal{R}[a,b]$ i da je $\int_a^b g(x)dx = 0$. Sada iz Tvrđenja 1.38, budući da je, na osnovu (1.53), $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$, dobijamo $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = 0$.

Ostatak tvrđenja se slično dokazuje. ■

Tvrđenje 1.40. *Neka je* $f \in \mathcal{R}[a,b]$*. Tada je* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *i važi nejednakost*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a), \tag{1.54}$$

gde je $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$*.*

Dokaz. Iz integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$ sledi da je f ograničena funkcija na segmentu $[a,b]$, pa je stoga i funkcija $|f|$ ograničena na tom segmentu i $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$ je konačan broj. Neka je $\epsilon > 0$. Na osnovu Posledice 1.15 ((i)$\Longleftrightarrow$(iii)), sledi da postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a,b]$ takva da je

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \epsilon. \tag{1.55}$$

Za dve proizvoljne tačke x, x' iz segmenta $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, važi

$$||f(x)| - |f(x')|| \leq |f(x) - f(x')|,$$

odakle prelaskom na supremum dobijamo

$$\sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} ||f(x)| - |f(x')|| \leq \sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(x')|$$

tj.

$$\omega_i(|f|) \le \omega_i(f),\ i = 1, \dots, n.$$

Sada monoženjem sa Δx_i i sabiranjem, $i = 1, \dots, n$, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(|f|)\, \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \Delta x_i,$$

što zajedno sa (1.55) povlači nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(|f|)\, \Delta x_i < \epsilon. \tag{1.56}$$

Prema tome, funkcija $|f|$ je ograničena na segmentu $[a, b]$ i za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \dots < x_n = b)$ segmenta $[a, b]$ takva da važi nejednakost (1.56), i stoga, na osnovu Posledice 1.15 ((i)$\Longleftrightarrow$(iii)), zaključujemo da je funkcija $|f|$ integrabilna na segmentu $[a, b]$.[10]

Iz Tvrđenja 1.32 sledi da je funkcija $-|f|$ integrabilna na segmentu $[a, b]$ i da je $\int_a^b (-|f(x)|)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$. Kako je

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,\ x \in [a, b],$$

na osnovu Tvrđenja 1.38 dobijamo

$$-\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b (-|f(x)|)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{1.57}$$

Iz $|f(x)| \ge 0$, $x \in [a, b]$, na osnovu Posledice 1.39 imamo da je $\int_a^b |f(x)|dx \ge 0$, pa iz (1.57) sledi

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{1.58}$$

Kako je $\mathbf{f}(x)| \le M$ za svako $x \in [a, b]$, to opet iz Tvrđenja 1.32 i Primera 1.5 dobijamo

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b M dx = M(b - a). \tag{1.59}$$

(1.58) i (1.59) zajedno daju (1.54). ■

U opštem slučaju, za bilo koje a i b, $a < b$ ili $a = b$ ili $a > b$, umesto nejednakosti (1.54) važiće nejednakost:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \left| \int_a^b |f(x)|dx \right| \le M|b - a|. \tag{1.60}$$

[10] U prethodnom delu dokazu smo mogli umesto ekvivalencije (i)$\Longleftrightarrow$(iii) iz Posledice 1.15 koristiti ekvivalenciju (i)$\Longleftrightarrow$(ii).

Zaista, ako je $a < b$, onda je $\int_a^b |f(x)|dx \geq 0$, pa je $\left|\int_a^b |f(x)|dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$, $|b-a| = b-a$ i nejednakost (1.60) se poklapa sa nejednakošću (1.54). Ako je $a = b$, nejednakost (1.60) je očigledna.

Neka je $a > b$. Tada, koristeći Definiciju 1.30 i nejednakost (1.54), dobijamo

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|-\int_b^a f(x)dx\right| = \left|\int_b^a f(x)dx\right| \\ &\leq \int_b^a |f(x)|dx = \left|\int_b^a |f(x)|dx\right| = \left|-\int_a^b |f(x)|dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|.\end{aligned}$$

Dalje,

$$\left|\int_a^b |f(x)|dx\right| = \int_b^a |f(x)|dx \leq M(a-b) = M|b-a|,$$

i prema tome, važi nejednakost (1.60).

Primetimo da umesto M u nejednakosti (1.60) može da stoji bilo koji broj L za koji je $|f(x)| \leq L$, $x \in [a,b]$, tj. bilo koji broj L takav da je $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq L$.

Tvrđenje 1.41. *Neka je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$. Ako postoji tačka $x_0 \in [a,b]$ u kojoj je funkcija f neprekidna i za koju je $f(x_0) > 0$, tada je*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Dokaz. Iz neprekidnosti funkcije f u tački x_0 sledi da za $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ važi $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, tj.

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}.$$

Prema tome, za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$ važi $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$. Postoje $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 < b_0$, takvi da je $[a_0, b_0] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$. Iz Tvrđenja 1.28 i 1.29 sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_0} f(x)dx + \int_{a_0}^{b_0} f(x)dx + \int_{b_0}^b f(x)dx,$$

a iz nenegativnosti funkcije f, na osnovu Tvrđenja 1.38, sledi $\int_a^{a_0} f(x)dx \geq 0$ i $\int_{b_0}^b f(x)dx \geq 0$. Stoga je

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{a_0}^{b_0} f(x)dx. \tag{1.61}$$

Budući da za svako $x \in [a_0, b_0]$ važi $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$, to opet na osnovu Tvrđenja 1.38 sledi

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx \geq \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x_0)}{2}dx = \frac{f(x_0)}{2}(b_0 - a_0) > 0. \tag{1.62}$$

Sada iz (1.61) i (1.62) sledi $\int_a^b f(x)dx > 0$. ■

Napomenjemo da je uslov neprekidnosti funkcije u tački x_0, u kojoj je funkcija pozitivna, bitan za važenje tvrđenja. Sledeći primer pokazuje da se može desiti da integrabilna nenegativna funkcija na segmentu, pozitivna u nekoj tački segmenta, ali ne i neprekidna u toj tački, ima integral na tom segmentu jednak 0.

Primer 1.42. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

i neka je (P_n) niz podela segmenta $[0,1]$, $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $d(P_n) = \frac{1}{n} \to 0$,

$$S_{P_n} = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} f(x)) \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + 0 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

i

$$s_{P_n} = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} f(x)) \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + 0 \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ i $\lim_{n\to\infty} S_{P_n} = \lim_{n\to\infty} s_{P_n} = 0$, na osnovu Teoreme 1.16 (ekvivalencija (i)$\Longleftrightarrow$(ii)) sledi da je funkcija f integrabilna[11] i da je $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Osim toga, funkcija je nenegativna na segmentu $[0,1]$ i jedina tačka u kojoj je funkcija pozitivna je 1, međutim funkcija f nije neprekidna u toj tački. •

1.5 Prva teorema o srednjoj vrednosti

Teorema 1.43. *Neka su funkcije f i g integrabilne na segmentu $[a,b]$ i neka je funkcija g ne menja znak na segmentu $[a,b]$, tj. neka je ili nenegativna ili nepozitivna na segmentu $[a,b]$. Tada postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takvo da je*

$$m \le \mu \le M$$

i

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \tag{1.63}$$

gde je

$$m = \inf_{a \le x \le b} f(x), \quad M = \sup_{a \le x \le b} f(x).$$

[11] Integrabilnost funkcije f sledi i iz činjenice da je ova funkcija monotono rastuća.

Dokaz. Iz integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$, na osnovu Teoreme 1.7, sledi da je funkcija f ograničena na tom segmentu. Prema tome, $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$ i $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ su konačni brojevi, i za sve $x\in[a,b]$ važi nejednakost

$$m \le f(x) \le M.$$

Odavde, za slučaj da je $g(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$, dobijamo nejednakost

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),$$

dok za slučaj da je $g(x)\le 0$, $x\in[a,b]$, dobijamo nejednakost

$$mg(x) \ge f(x)g(x) \ge Mg(x).$$

Sada, na osnovu Tvrđenja 1.38 i Tvrđenja 1.32, u prvom slučaju sledi nejednakost:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx, \tag{1.64}$$

a u drugom slučaju nejednakost:

$$m\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)g(x)dx \ge M\int_a^b g(x)dx. \tag{1.65}$$

Ako je $\int_a^b g(x)dx = 0$, onda i u prvom i u drugom slučaju, na osnovu nejednakosti (1.64) i (1.65), zaključujemo da je $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, pa jednakost (1.63) važi za bilo koji realan broj μ, pa i za ono μ za koje važi $m\le\mu\le M$.

Ako je $\int_a^b g(x)dx \ne 0$, onda za slučaj da je $g(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$, budući da iz Posledice 1.39 sledi $\int_a^b g(x)dx \ge 0$, dobijamo $\int_a^b g(x)dx > 0$, dok za slučaj da je $g(x)\le 0$, $x\in[a,b]$, zbog $\int_a^b g(x)dx \le 0$, dobijamo $\int_a^b g(x)dx < 0$. Otuda, deobom nejednakosti (1.64) i (1.65) sa $\int_a^b g(x)dx$ dobijamo u oba slučaja nejednakost

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M. \tag{1.66}$$

Neka je

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \tag{1.67}$$

Tada zbog (1.66) važi nejednakost $m\le\mu\le M$, a iz (1.67) sledi (1.63). ■

Posledica 1.44. *Neka je uz pretpostavke Teoreme 1.43 funkcija f još i neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada postoji tačka $\xi\in[a,b]$ tako da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \tag{1.68}$$

Dokaz. Iz neprekidnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$, budući da je $m \le \mu \le M$, na osnovu posledice Bolcano-Košijeve teoreme (Posledica 3.109 iz Mat. analize 1) sledi da postoji $\xi \in [a,b]$ tako da je $f(\xi) = \mu$, pa iz (1.63) dobijamo (1.68). ∎

Posledica 1.45. *Neka je $f \in C[a,b]$. Tada postoji $\xi \in [a,b]$ tako da je*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{1.69}$$

Dokaz. Iz Teoreme 1.26 sledi da je $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Neka je $g(x) = 1$, $x \in [a,b]$. Funkcija g je nenegativna i integrabilna na segmentu $[a,b]$, $\int_a^b g(x)dx = b-a$ (Primer 1.5). Prema tome, funkcije f i g zadovoljavaju pretpostavke Posledice 1.44, odakle sledi da postoji tačka $\xi \in [a,b]$ tako da važi jednakost

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx = f(\xi)(b-a). \blacksquare$$

U slučaju kada je funkcija f neprekidna i nenegativna na segmentu $[a,b]$, formula (1.69) ima jednostavno geometrijsko tumačanje: površina krivolinijskog trapeza, ograničenog grafikom funkcije f, x-osom i pravama $x=a$ i $x=b$, jednaka je površini pravougaonika čija je osnova dužine $b-a$, a visina dužine $f(\xi)$.

1.6 Integrabilnost deo po deo neprekidnih funkcija

Definicija 1.46. Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *deo po deo neprekidna* na segmentu $[a,b]$ ako postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a,b]$ tako da je funkcija f neprekidna na svakom intervalu (x_{i-1}, x_i) i postoje konačne granične vrednosti

$$f(x_{i-1}+0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x)$$

i

$$f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x).$$

Drugim rečima, funkcija f je deo po deo neprekidna na segmentu $[a,b]$ ako ima samo konačno mnogo prekida i pri tom samo prekide prve vrste.

Primer 1.47. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = -3 \\ -x+1, & -3 < x < -1, \\ x^3, & -1 \le x < 1 \\ x+1, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

je deo po deo neprekidna na segmentu $[-3,2]$ jer je f neprekidna na intervalima $(-3,-1)$, $(-1,1)$ i $(1,2)$, i postoje konačne granične vrednosti:
$\lim_{x\to-3+0} f(x) = 4$, $\lim_{x\to-1-0} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-1+0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to1-0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to1+0} f(x) = 2$, $\lim_{x\to2-0} f(x) = 3$.

Sledeća lema govori o tome da promena vrednosti integrabilne funkcija na krajevima segmenta, ne utiče ni na integrabilnost, ni na vrednost integrala, tj. novodobijena funkcija je opet integrabilna sa integralom koji se poklapa sa integralom polazne funkcije.

Lema 1.48. *Neka je su funkcije f i g definisane na $[a,b]$ i neka je $f(x) = g(x)$ za $x \in (a,b)$. Ako je funkcija f integrabilna na $[a,b]$, onda je i funkcija g integrabilna na $[a,b]$ i važi*

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Dokaz. Neka je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i neka je $I = \int_a^b f(x)dx$. Iz integrabilnosti funkcije f sledi da je ona ograničena na segmentu $[a,b]$, tj. postoji broj $M > 0$ tako da je $|f(x)| \leq M$ za sve $x \in [a,b]$. Neka je $K = \max\{M, |g(a)|, |g(b)|\}$. Neka je (P_n) niz podela segmenta $[a,b]$, $P_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$, i neka je $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$ proizvoljan izbor tačaka $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, \dots, k_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)} = I, \tag{1.70}$$

gde je $\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots k_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Kako je

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\sigma(g, P_n, \xi^{(n)}) - I| \leq |\sigma(g, P_n, \xi^{(n)}) - \sigma(f, P_n, \xi^{(n)})| + |\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) - I| \\
&= |\sum_{i=1}^{k_n} g(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)} - \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}| + |\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) - I| \\
&= |g(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)} + g(\xi_{k_n}^{(n)})\Delta x_{k_n}^{(n)} - f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)} - f(\xi_{k_n}^{(n)})\Delta x_{k_n}^{(n)}| + |\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) - I| \\
&\leq |g(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)}| + |g(\xi_{k_n}^{(n)})\Delta x_{k_n}^{(n)}| + |f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)}| + |f(\xi_{k_n}^{(n)})\Delta x_{k_n}^{(n)}| + |\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) - I|
\end{aligned}$$

i kako je

$$\begin{aligned}
|g(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)}| \leq Kd(P_n), \quad |g(\xi_{k_n}^{(n)})\Delta x_{k_n}^{(n)}| \leq Kd(P_n), \\
|f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1^{(n)}| \leq Kd(P_n), \quad |f(\xi_{k_n}^{(n)})\Delta x_{k_n}^{(n)}| \leq Kd(P_n),
\end{aligned}$$

to je

$$0 \leq |\sigma(g, P_n, \xi^{(n)}) - I| \leq 4Kd(P_n) + |\sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) - I|. \tag{1.71}$$

S obzirom da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$, iz (1.70) i (1.71) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = I,$$

što znači da je funkcija g integrabilna na segmentu $[a,b]$ i da je

$$\int_a^b g(x)dx = I = \int_a^b f(x)dx.\square$$

Dokaz. (II način) Neka je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i neka je $I = \int_a^b f(x)dx$. Iz integrabilnosti funkcije f sledi da je ona ograničena na segmentu $[a,b]$, tj. postoji broj $M > 0$ tako da je $|f(x)| \leq M$ za sve $x \in [a,b]$. Neka je $K = \max\{M, |g(a)|, |g(b)|\}$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji $\delta^* > 0$ tako da za svaku podelu $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a,b]$ takvu da je $d(P) < \delta^*$ i za svaki izbor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ važi nejednakost

$$|\sigma(f,P,\xi) - I| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.72}$$

Neka je $\delta = \min\left\{\delta^*, \dfrac{\epsilon}{8K}\right\}$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ podela segmenta $[a,b]$ takva da je $d(P) < \delta$ i neka je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ proizvoljan izbor tačaka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Tada je

$$\begin{aligned}
|\sigma(g,P,\xi) - I| &\leq |\sigma(g,P,\xi) - \sigma(f,P,\xi)| + |\sigma(f,P,\xi) - I| \\
&\leq |\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i| + |\sigma(f,P,\xi) - I| \\
&\leq |g(\xi_1)\Delta x_1 + g(\xi_n)\Delta x_n - f(\xi_1)\Delta x_1 - f(\xi_n)\Delta x_n| + |\sigma(f,P,\xi) - I|
\end{aligned}$$

i kako je

$$\begin{aligned}
&|g(\xi_1)\Delta x_1| \leq Kd(P) < K\delta, \quad |g(\xi_n)\Delta x_n| \leq Kd(P) < K\delta, \\
&|f(\xi_1)\Delta x_1| \leq Kd(P) < K\delta, \quad |f(\xi_n)\Delta x_n| \leq Kd(P) < K\delta,
\end{aligned}$$

to je, s obzirom na (1.72),

$$|\sigma(g,P,\xi) - I| < 4K\delta + |\sigma(f,P,\xi) - I| < 4K\frac{\epsilon}{8K} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ovo znači da je funkcija g integrabilna na segmentu $[a,b]$ i da je $\int_a^b g(x)dx = I = \int_a^b f(x)dx$. ■

Teorema 1.49. *Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deo po deo neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada je f integrabilna na $[a,b]$.*

Dokaz. Neka je $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ podela segmenta $[a,b]$ takva da je funkcija f neprekidna na svakom intervalu (x_{i-1}, x_i) i da postoje konačne granične vrednosti $f(x_{i-1}+0) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x)$ i $f(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x)$, $i = 1, \dots, n$. Neka je

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ f(x_{i-1}+0), & x = x_{i-1} \\ f(x_i - 0), & x = x_i. \end{cases}$$

Funkcija f_i je neprekidna na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, te je na osnovu Teoreme 1.26 integrabilna na tom segmentu. Funkcija f se na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ razlikuje od integrabilne funkcije f_i samo na krajevima segmenta, pa je na osnovu Leme 1.48 i ona integrabilna na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ i važi jednakost

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)dx.$$

Sada na osnovu Tvrđenja 1.29 sledi da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ i da važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)dx. \blacksquare$$

Napomenimo da važi i opštije tvrđenje od tvrđenja Teoreme 1.49. Naime, ako je funkcija ograničena na segmentu $[a, b]$ i ako je neprekidna u svim tačkama segmenta $[a, b]$ sa izuzetkom eventualno konačno mnogo tačaka (tačke prekida funkcije mogu biti i tačke prekida druge vrste), onda je ona integrabilna na segmentu $[a, b]$.

1.7 Određeni integral sa promenljivom gornjom granicom

Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$. Ako je $x \in [a, b]$, onda je na osnovu Tvrđenja 1.28, funkcija f integrabilna na segmentu $[a, x]$, tj. za svako $x \in [a, b]$ ima smisla integral $\int_a^x f(t)dt$, pa je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1.73}$$

definisana na segmentu $[a, b]$. Funkcija F se zove *integral sa promenljivom gornjom granicom.*

Teorema 1.50. *Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$. Tada je funkcija F, definisana u (1.73), neprekidna na segmentu $[a, b]$.*

Dokaz. Iz integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a, b]$, na osnovu Teoreme 1.7 sledi da je funkcija f ograničena na segmentu $[a, b]$ i $M = \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ je konačan broj. Neka $x, x + \Delta x \in [a, b]$. Tada je

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

pa je

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Odavde, koristeći nejednakost (1.60), dobijamo

$$|\Delta F| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leq M|x+\Delta x - x| = M|\Delta x|.$$

Iz poslednje nejednakosti zaključujemo da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$ za svako $x \in [a, b]$, što znači da je funkcija F neprekidna u svakoj tački $x \in [a, b]$. ■

Sledeća teorema je jedna od centralnih teorema integralnog računa i omogućuje vezu između neodređenog i određenog integrala. Naime, pokazuje da je, u slučaju neprekidnosti podintegralne funkcije, izvod integrala po gornjoj granici jednak vrednosti podintegralne funkcije u toj gornjoj granici.

Teorema 1.51. *Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ i neka je neprekidna u tački $x_0 \in [a, b]$. Tada funkcija $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ ima izvod u tački x_0 i* [12]

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dokaz. I način: Pretpostavimo da $x_0 \in (a, b)$. Pokažimo da je $F'(x_0) = f(x_0)$, tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0). \tag{1.74}$$

Neka je $\Delta x \neq 0$ takvo da $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Tada je

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}. \tag{1.75}$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Iz neprekidnosti funkcije f u tački x_0 sledi da postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija:

$$t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Longrightarrow f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon. \tag{1.76}$$

Neka je $0 < |\Delta x| < \delta$.

Ako je $\Delta x > 0$, onda je $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, te za $t \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ iz (1.76) sledi

$$f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon,$$

odakle, zbog monotonosti određenog integrala (Tvrđenje 1.38) sledi

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x_0) - \epsilon)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(x_0) + \epsilon)dt.$$

Odavde (videti Primer 1.5) dobijamo

$$(f(x_0) - \epsilon)(x_0 + \Delta x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \leq (f(x_0) + \epsilon)(x_0 + \Delta x - x_0),$$

[12] Ako se x_0 poklapa sa jednim od krajeva segmenta, a ili b, onda se pod izvodom $f'(x_0)$ podrazumeva odgovarajući jednostrani izvod.

tj.

$$(f(x_0)-\epsilon)\Delta x \le \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \le (f(x_0)+\epsilon)\Delta x, \tag{1.77}$$

Deobom (1.77) sa Δx ($\Delta x > 0$) dobijamo

$$f(x_0)-\epsilon \le \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \le f(x_0)+\epsilon$$

što zajedno sa (1.75) daje

$$-\epsilon \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \le \epsilon.$$

Prema tome,

$$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \epsilon. \tag{1.78}$$

Ako je $0 < |\Delta x| < \delta$ i $\Delta x < 0$, onda je $[x_0+\Delta x, x_0] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta)$, te za $t \in [x_0+\Delta x, x_0]$ iz (1.76) sledi

$$f(x_0)-\epsilon < f(t) < f(x_0)+\epsilon,$$

odakle zbog monotonosti integrala sledi

$$\int_{x_0+\Delta x}^{x_0} (f(x_0)-\epsilon)dt \le \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \le \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} (f(x_0)+\epsilon)dt.$$

Odavde imamo

$$(f(x_0)-\epsilon)(x_0-(x_0+\Delta x)) \le \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \le (f(x_0)+\epsilon)(x_0-(x_0+\Delta x)),$$

tj.

$$(f(x_0)-\epsilon)(-\Delta x) \le \int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt \le (f(x_0)+\epsilon)(-\Delta x).$$

Delenjem ove nejednakosti sa $-\Delta x$ ($\Delta x < 0$) dobijamo

$$f(x_0)-\epsilon \le \frac{\int_{x_0+\Delta x}^{x_0} f(t)dt}{-\Delta x} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \le f(x_0)+\epsilon,$$

tj.

$$f(x_0)-\epsilon \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0)+\epsilon,$$

odakle opet sledi (1.78).

Prema tome, dokazali smo da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako Δx takvo da je $0 < |\Delta x| < \delta$ važi $\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \epsilon$, što znači da važi (1.74), tj. $F'(x_0) = f(x_0)$.

Za slučaj da je $x_0 = a$ ($x_0 = b$), pokazuje se da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako Δx takvo da je $|\Delta x| < \delta$ i $\Delta x > 0$ ($\Delta x < 0$) važi nejednakost $\left|\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \epsilon$, pa je $\lim\limits_{\Delta x\to+0} \dfrac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x} = f(a)$ ($\lim\limits_{\Delta x\to-0} \dfrac{F(b+\Delta x)-F(b)}{\Delta x} = f(b)$), tj. $F'_+(a) = f(a)$ ($F'_-(b) = f(b)$). ■

II način: *Dokaz.* Pretpostavimo da $x_0 \in (a,b)$. Pokažimo da je $F'(x_0) = f(x_0)$, tj.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0). \tag{1.79}$$

Neka je $\Delta x \neq 0$ takvo da $x_0 + \Delta x \in [a,b]$. Kako je $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$, to je $\dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$ i stoga, $\dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt = f(x_0)$. Odavde (koristeći prvu nejednakost u (1.60)) dobijamo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt}{\Delta x}\right| \\
&= \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt\right|}{|\Delta x|} \\
&\le \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|dt\right|}{|\Delta x|}.
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Iz neprekidnosti funkcije f u tački x_0 sledi da postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{1.81}$$

Neka je $0 < |\Delta x| < \delta$. Tada za t iz segmenta sa krajevima u x_0 i $x_0 + \Delta x$ važi

$$|t - x_0| \le |\Delta x| < \delta,$$

pa na osnovu (1.81) sledi

$$|f(t) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{1.82}$$

Sada iz (1.80) i (1.82) (koristeći drugu nejednakost u (1.60)) dobijamo

$$\left|\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{\left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|dt\right|}{|\Delta x|} \le \frac{\epsilon|x_0+\Delta x - x_0|}{|\Delta x|} = \epsilon.$$

Prema tome, dokazali smo da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako Δx takvo da je $|\Delta x| < \delta$ važi $\left|\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \epsilon$, i prema tome, važi (1.79).

Ako je $x_0 = a$ ($x_0 = b$), onda se analogno dokazuje da je $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\Delta x} = f(a)$ ($\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{F(b+\Delta x) - F(b)}{\Delta x} = f(b)$), tj. $F'_+(a) = f(a)$ ($F'_-(b) = f(b)$), samo je u ovom slučaju $\Delta x > 0$ ($\Delta x < 0$). ■

Dokaz. III način: Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno. Iz neprekidnosti funkcije f u tački x_0 sledi da postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija:

$$x \in [a, b] \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{1.83}$$

Neka je $\Delta x \neq 0$ takvo da $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Kako je $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$, to je $\dfrac{1}{\Delta x} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = 1$ i stoga, $\dfrac{1}{\Delta x} \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0) dt = f(x_0)$. Odavde (koristeći prvu nejednakost u (1.60)) dobijamo

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} - f(x_0) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0) dt}{\Delta x} \right| \\
&= \frac{\left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt \right|}{|\Delta x|} \\
&\leq \frac{\left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt \right|}{|\Delta x|}.
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Neka je $\Delta x \neq 0$ takvo da $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ i neka je još $|\Delta x| < \delta$. Tada za t iz segmenta sa krajevima u x_0 i $x_0 + \Delta x$ važi $t \in [a, b]$ (jer $x_0, x_0 + \Delta x \in [a, b]$) i

$$|t - x_0| \leq |\Delta x| < \delta,$$

pa na osnovu (1.83) sledi

$$|f(t) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{1.85}$$

Sada iz (1.84) i (1.85) (koristeći drugu nejednakost u (1.60)) dobijamo

$$\left| \frac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leq \frac{\left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt \right|}{|\Delta x|} \leq \frac{\epsilon |x_0 + \Delta x - x_0|}{|\Delta x|} = \epsilon.$$

Za slučaj da je $x_0 \in (a, b)$, ovo znači da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x_0+\Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$, tj, $F'(x_0) = f(x_0)$, dok za slučaj da je $x_0 = a$, ovo znači $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\Delta x} = f(a)$, tj. $F'_+(a) = f(a)$. Ako je pak $x_0 = b$, onda imamo $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{F(b+\Delta x) - F(b)}{\Delta x} = f(b)$, tj. $F'_-(b) = f(b)$. ■

Podsetimo se definicije primitivne funkcije:

Sa I označavamo je jedan od intervala oblika $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$, gde su $a,b \in \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ neprekidna na I, ukoliko je neprekidna u svakoj unutrašnjoj tački intervala I, za slučaj da $a \in I$, neprekidna zdesna u a, i za slučaj da $b \in I$, neprekidna sleva u b.

Definicija 1.52. Za funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je *primitivna (prvobitna) funkcija funkcije f na intervalu I* ako važi sledeće:

(i) funkcija F je neprekidna na intervalu I;

(ii) funkcija F u svakoj unutrašnjoj tački x intervala I ima izvod i pri tom je $F'(x) = f(x)$.

Ako levi kraj intervala, tačka a, pripada intervalu I, onda je primitivna funkcija F neprekidna zdesna u tački a ali u tački a može i ne mora da ima jednostrani izvod. Za slučaj da ima desni izvod u tački a, ovaj izvod se ne mora poklapati sa vrednošću funkcije f u tački a.

Teorema 1.53. *Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na segmentu $[a,b]$ i neprekidna na intervalu (a,b), onda je $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

Dokaz. Iz integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$ na osnovu Teoreme 1.50 sledi da je funkcija F neprekidna na segmentu $[a,b]$, dok iz neprekidnosti funkcije f u svakoj unutrašnjoj tački x segmenta $[a,b]$ na osnovu Teoreme 1.51 važi da je $F'(x) = f(x)$. Prema tome, F je primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$. ■

Napomenimo da ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu (a,b), onda je integrabilnost ove funkcije na segmentu $[a,b]$ ekvivalentna njenoj ograničenosti na $[a,b]$, što sledi iz napomene na kraju sekcije 1.6 i Teoreme 1.7.

Posledica 1.54. *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$, onda je $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

Dokaz. Iz $f \in C[a,b]$, na osnovu Teoreme 1.26, sledi da je f integrabilna na segmentu $[a,b]$, pa iz Teoreme 1.53 dobijamo da je $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$. ■

Prema tome, ako je $f \in C[a,b]$, tada je

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),\ x \in [a,b], \tag{1.86}$$

tj. operacija integraljenja sa pomenljivom gornjom granicom primenjana na neprekidnu funkciju daje primitivnu funkciju, što znači da je ta operacija inverzna operaciji diferenciranja[13].

[13]Formula (1.86) je poznata pod nazivom formula diferenciranja određenog integrala po gornjoj granici.

Bilo koja primitivna funkcija Φ neprekidne funkcije f na segmentu $[a,b]$ razlikuje se od funkcije $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ za konstantu, tj. oblika je:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \ x \in [a,b].$$

Tako dobijamo vezu između neodređenog i određenog integrala:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \ x \in [a,b].$$

Teorema 1.50 i Teorema 1.51 pokazuju da operacija integraljenja sa promenljivom gornjom granicom "poboljšava" osobine funkcije, naime od integrabilne funkcije na segmentu, dobija se neprekidna funkcija, dok se od neprekidne funkcije dobija diferencijabilna. S druge strane, operacija diferenciranja dovodi do "pogoršanja" svojstva funkcije. Tako, na primer, izvodna funkcija neprekidne funkcije može biti funkcija koja ima tačke prekida. Primer koji to ilustuje je sledeća funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $\mathbb{R}$ i ima izvod u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ (neprekidnost inače sledi iz diferencijabilnosti). Naime, za $x \neq 0$ je $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ i

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Budući da ne postoji ni $\lim\limits_{x \to -0} \cos \dfrac{1}{x}$ ni $\lim\limits_{x \to +0} \cos \dfrac{1}{x}$, zaključujemo da ne postoji ni $\lim\limits_{x \to -0} f'(x)$ ni $\lim\limits_{x \to +0} f'(x)$, pa izvodna funkcija f' nije neprekidna u 0 (0 je tačka prekida druge vrste izvodne funkcije).

Iz formule (1.86) se može dobiti formula diferenciranja po donjoj granici. Neka je funkcija $f; [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna na segmentu $[a,b]$. Tada je za svako $x \in [a,b]$ definisana funkcija

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt,$$

pri čemu iz jednakosti

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = F(x) + G(x),$$

dobijamo

$$G(x) = \int_a^b f(t)dt - F(x). \tag{1.87}$$

Ako je funkcija f neprekidna u tački $x \in [a,b]$, onda na osnovu Teoreme 1.51 funkcija F ima izvod u toj tački, pa iz jednakosti (1.87) sledi da i funkcija G ima izvod u toj tački i pri tom važi jednakost

$$G'(x) = -F'(x) = -f(x),$$

tj.

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x). \tag{1.88}$$

Iz formula diferenciranja integrala neprekidne funkcije po donjoj i gornjoj granici, (1.86) i (1.88), sledi da svaka funkcija neprekidna na nekom intervalu I (I može biti oblika $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$, gde su $a,b \in \mathbb{R}$) ima primitivnu funkciju na tom intervalu. Zaista, neka je, na primer, funkcija f definisana i neprekidna na intervalu $I=(a,b)$, neka je $x_0 \in (a,b)$ i

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Za $x \geq x_0$ iz formule (1.86) sledi da je $F'(x) = f(x)$. Ako je $x < x_0$, onda iz formule (1.88) sledi

$$F'(x) = \left(\int_{x_0}^x f(t)dt\right)' = \left(-\int_x^{x_0} f(t)dt\right)' = -(-f(x)) = f(x).$$

Prema tome, F je primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a,b).

Njutn-Lajbnicova formula

Teorema 1.55. *Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ i neprekidna na intervalu (a,b). Ako je Φ proizvoljna primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$, onda je*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1.89}$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.53 funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ je primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$. Kako je i Φ primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$, to se F i Φ razlikuju za konstantu na segmentu $[a,b]$, odnosno postoji $C \in \mathbb{R}$ tako da je

$$F(x) = \Phi(x) + C,\ x \in [a,b],$$

tj.

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C,\ x \in [a,b].$$

Stavljajući u prethodnoj jednakosti $x=a$ dobijamo

$$0 = \int_a^a f(t)dt = \Phi(a) + C,\ x \in [a,b],$$

odakle sledi $C = -\Phi(a)$. Prema tome,

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a),\ x \in [a,b],$$

odakle za $x = b$ dobijamo jednakost (1.89). ■

Formula (1.89) se zove Njutn-Lajbnicova formula. Zbog kratkoće zapisa, za izraz $\Phi(b) - \Phi(a)$ upotrebljavamo oznaku $\Phi(x)\Big|_a^b$, pa se Njutn-Lajbnicova formula često piše u obliku

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Primetimo da Njutn-Lajbnicova formula važi i kad je $a > b$, jer u ovom slučaju je $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -(\Phi(a) - \Phi(b)) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Teorema 1.56. *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ i neka je Φ proizvoljna primitivna funkcija funkcije f na segmentu $[a,b]$. Tada važi Njutn-Lajbnicova formula.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.26 sledi da je $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Sada na osnovu Teoreme 1.55 sledi formula (1.89). ■

nnn

Primeri 1.57. (i) Kako je $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + C$, na osnovu Njutn-Lajbnicove formule dobijamo

$$\int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}.$$

(ii) Iz $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ sledi

$$\int_2^8 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_2^8 = \ln 8 - \ln 2 = \ln\frac{8}{2} = \ln 4.\ \bullet$$

Teorema 1.58. *Neka je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $F \in C[a,b]$ i neka je $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in [a,b]$ sa izuzetkom konačno mnogo tačaka. Tada važi Njutn-Lajbnicova formula:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Neka su $a_1, \ldots, a_m \in [a,b]$ tačke u kojima ne važi jednakost $F'(x) = f(x)$. Neka je (P_n) niz podela segmenta $[a,b]$, $P_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}$, $a = x_0^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b$, $n \in \mathbb{N}$, takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$ i da tačke $a_1, \ldots, a_m \in [a,b]$ pripadaju svakoj podeli P_n, $n \in \mathbb{N}$. Tada je na svakom segmentu $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$, $i = 1, \ldots, k_n$, $n \in \mathbb{N}$, funkcija F neprekidna, a u unutršnjim tačkama segmenta difrencijabilna, te ispunjava uslove Lagranževe teoreme, na osnovu koje onda sledi da postoji tačka $\xi_i^{(n)} \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$ za koju važi jednakost

$$F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)}) = F'(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = F'(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}, \quad i = 1, \dots, k_n. \tag{1.90}$$

Kako $\xi_i^{(n)} \notin P_n$, to $\xi_i^{(n)} \notin \{a_1, \dots, a_m\}$, pa je $F'(\xi_i^{(n)}) = f(\xi_i^{(n)})$. Sada iz (1.90) sledi

$$F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)}) = f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}, \quad i = 1, \dots, k_n. \tag{1.91}$$

Sabirajući jednakosti u (1.91) dobijamo

$$\sum_{i=1}^{k_n}(F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}. \tag{1.92}$$

Suma na levoj strani jednakosti u (1.92) je jednaka razlici $F(b) - F(a)$, dok je suma na desnoj strani integralna suma funkcije f koja odgovara podeli P_n i izboru tačaka $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{k_n}^{(n)})$. Prema tome,

$$F(b) - F(a) = \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}). \tag{1.93}$$

Kako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$, a (P_n) niz podela čji dijametar teži 0, to je $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f, P_n, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx$. Zato prelaskom na limes u jednakosti (1.93) kad $n \to \infty$, dobijamo $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. ■

Definicija 1.59. Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je *glatka* ili *neprekidno diferencijabilna na segmentu* $[a, b]$ ako ima neprekidan izvod na segmentu $[a, b]$. Pri tom se pod izvodom u tački a podrazumeva desni izvod u tački a, dok se pod izvodom u tački b podrazumeva levi izvod u ovoj tački.

Prema tome, funkcija f je glatka na segmentu $[a, b]$ ako je neprekidna na $[a, b]$, ima neprekidan izvod na (a, b) i postoje konačne granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)$ (na osnovu Tvrđenja 4.61 i 4.62 ove granične vrednosti su jednake, respektivno, desnom izvodu u tački a i levom izvodu u tački b, tj. važe jednakosti: $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = f'_+(a)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x) = f'_-(b)$.) Sa $C^1[a, b]$ označavamo skup svih glatkih funkcija na segmentu $[a, b]$.

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je deo po deo neprekidna na segmentu $[a, b]$. To znači da postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a, b]$ tako da je funkcija f neprekidna na svakom intervalu (x_{i-1}, x_i) i postoje konačne granične vrednosti

$$f(x_{i-1} + 0) = \lim_{x\to x_{i-1}+0} f(x)$$

i

$$f(x_i - 0) = \lim_{x\to x_i-0} f(x).$$

Neka je

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & x_{i-1} \le x < x_i, \\ f(x_{i-1}+0), & x = x_{i-1} \\ f(x_i-0), & x = x_i. \end{cases} \tag{1.94}$$

Definicija 1.60. Ako je svaka od funkcija f_i, $i = 1, 2, \dots, n$, glatka (neprekidno diferencijabilna) na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, onda za funkciju f kažemo da je *deo po deo glatka* ili *deo po deo neprekidno diferencijabilna na segmentu* $[a, b]$.

Prema tome, funkcija f je deo po deo glatka funkcija na segmentu $[a, b]$ ako i samo ako postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a, b]$ tako da je funkcija f neprekidna zajedno sa svojim izvodom na svakom od intervala (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \dots, n$, i postoje konačne granične vrednosti $f(x_{i-1}+0) = \lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f(x)$, $f(x_i - 0) = \lim\limits_{x \to x_i - 0} f(x)$, $f'(x_{i-1}+0) = \lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f'(x)$ i $f'(x_i - 0) = \lim\limits_{x \to x_i - 0} f'(x)$ (Budući da se funkcije f i f_i poklapaju na intervalu (x_{i-1}, x_i) sledi da je $\lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f_i'(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_i - 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to x_i - 0} f_i'(x)$ i kako je funkcija f_i neprekidna zdesna u tački x_{i-1} i sleva u tači x_i, na osnovu Tvrđenja 4.61 i 4.62 imamo da je $\lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f_i'(x) = (f_i)'_+(x_{i-1})$ i $\lim\limits_{x \to x_i - 0} f_i'(x) = (f_i)'_-(x_i)$. Prema tome, važe jednakosti

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_{i-1}+0} f'(x) = \lim_{x \to x_{i-1}+0} f_i'(x) = (f_i)'_+(x_{i-1}) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f_i(x_{i-1}+\Delta x) - f_i(x_{i-1})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_{i-1}+\Delta x) - f(x_{i-1}+0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_i - 0} f'(x) = \lim_{x \to x_i - 0} f_i'(x) = (f_i)'_-(x_i) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f_i(x_i+\Delta x) - f_i(x_i)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_i+\Delta x) - f(x_i-0)}{\Delta x}.) \end{aligned}$$

Ako za deo po deo glatku funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ važi još i da je neprekidna na segmentu $[a, b]$, onda postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \cdots < x_n = b)$ segmenta $[a, b]$ tako da je izvodna funkcija f' neprekidna na svakom od intervala (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \dots, n$, postoje konačne granične vrednosti $\lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} f'(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_i - 0} f'(x)$ i važe jednakosti

$$\lim_{x \to x_{i-1}+0} f'(x) = f'_+(x_{i-1}) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_{i-1}+\Delta x) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

i

$$\lim_{x \to x_i - 0} f'(x) = f'_-(x_i) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_i+\Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}.$$

Primetimo da se u ovom slučaju funkcija f_i definisana u (1.94) poklapa sa funkcijom f na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$.

Primer 1.61. Funkcija

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & -3\le x<-1,\\ x^2, & -1\le x<2\\ 5-x, & 2\le x<3,\\ 1, & x=3.\end{cases}$$

je deo po deo glatka na segmentu $[-3,3]$. Zaista, uočimo podelu $P=\{-3,-1,2,3\}$ segmenta $[-3,3]$. Funkcija f je neprekidna na intervalima $(-3,-1)$, $(-1,2)$ i $(2,3)$, i postoje konačne granične vrednosti: $f(-3+0)=-1$, $f(-1-0)=1$, $f(-1+0)=1$, $f(2-0)=4$, $f(2+0)=3$, $f(3-0)=2$, a takođe i izvodna funkcija

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & -3<x<-1,\\ 2x, & -1<x<2\\ -1, & 2<x<3,\end{cases}$$

je neprekidna na svakom od intervala $(-3,-1)$, $(-1,2)$ i $(2,3)$ i postoje konačne granične vrednosti: $f'(-3+0)=\lim\limits_{x\to-3+0}f'(x)=1$, $f'(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1-0}f'(x)=1$, $f'(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1+0}f'(x)=-2$, $f'(2-0)=\lim\limits_{x\to2-0}f'(x)=4$, $f'(2+0)=\lim\limits_{x\to2+0}f'(x)=-1$ i $f'(3-0)=\lim\limits_{x\to3-0}f'(x)=-1$

Slično, funkcija

$$g(x)=\begin{cases} x+2, & -3\le x<-1,\\ x^2, & -1\le x\le 2\\ 6-x, & 2\le x\le 3.\end{cases}$$

je neprekidna i deo po deo glatka na segmentu $[-3,3]$.

Teorema 1.62. *Neka je g neprekidna deo po deo glatka funkcija na segmentu $[a,b]$. Tada je*

$$\int_a^b g'(x)dx=g(b)-g(a). \tag{1.95}$$

Dokaz. Budući da je g neprekidna deo po deo glatka funkcija na segmentu $[a,b]$, postoji podela $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ $(a=x_0<\dots<x_n=b)$ segmenta $[a,b]$ takva da je izvodna funkcija g' neprekidna na svakom od intervala (x_{i-1},x_i), $i=1,\dots,n$, i da postoje konačne granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_{i-1}+0}g'(x)=g'_+(x_{i-1})$ i $\lim\limits_{x\to x_i-0}g'(x)=g'_-(x_i)$. Funkcija g' nije definisana u tačkama $x_1,\dots,x_{n-1}$ (pod izvodom u tački a se podrazumeva desni izvod u tački a, dok se pod izvodom u tački b podrazumeva levi izvod u ovoj tački). Međutim, ma kako da definišemo funkciju g' u tim tačkama, dobićemo deo po deo neprekidnu funkciju koja je na osnovu Teoreme 1.49 integrabilna na segmentu $[a,b]$ i način na koji smo dodefinisali ovu funkciju u tačkama $x_1,\dots,x_{n-1}$ ne utiče na vrednost integrala na osnovu Leme 1.48 (zbog toga u integralu $\int_a^b g'(x)dx$ funkciju g' možemo ostaviti i nedefinisanu u tačkama $x_1,\dots,x_{n-1}$). Ako stavimo da je $f=g'$, a $F=g$, onda je f integrabilna na segmentu $[a,b]$, a F neprekidna na $[a,b]$ i $F'(x)=f(x)$ za sve $x\in[a,b]$ sa izuzetkom konačno mnogo

tačaka $x_1, \dots, x_{n-1}$. Sada na osnovu Teoreme 1.58 sledi $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, tj. važi formula (1.95). ■

Dokaz. II način: Budući da je g neprekidna deo po deo glatka funkcija na segmentu $[a, b]$, postoji podela $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ $(a = x_0 < \dots < x_n = b)$ segmenta $[a, b]$ takva da je izvodna funkcija g' neprekidna na svakom od intervala (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \dots, n$, i da postoje konačne granične vrednosti $\lim\limits_{x \to x_{i-1}+0} g'(x) = g'_+(x_{i-1})$ i $\lim\limits_{x \to x_i - 0} g'(x) = g'_-(x_i)$. Funkcija g' nije definisana u tačkama $x_1, \dots, x_{n-1}$ (pod izvodom u tački a se podrazumeva desni izvod u tački a, dok se pod izvodom u tački b podrazumeva levi izvod u ovoj tački). Definišemo funkciju g' u tim tačkama na proizvoljan način, dobićemo deo po deo neprekidnu funkciju koja je na osnovu Teoreme 1.49 integrabilna na segmentu $[a, b]$ i takođe na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ (način na koji smo dodefinisali ovu funkciju u tačkama $x_1, \dots, x_{n-1}$ ne utiče na vrednost integrala na osnovu Leme 1.48 i zbog toga u integralu $\int_a^b g'(x)dx$ funkciju g' možemo ostaviti i nedefinisanu u tačkama $x_1, \dots, x_{n-1}$). Funkcija g je neprekidna na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ i u unutrašnjim tačkama ovog segmenta ima izvod, pa je g primitivna funkcija funkcije g' na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ i budući da je funkcija g' integrabilna na $[x_{i-1}, x_i]$ i neprekidna na intervalu (x_{i-1}, x_i), to primenom Teoreme 1.55 zaključujemo da važi jednakost

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x)dx = g(x_i) - g(x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Odavde sabiranjem dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) \tag{1.96}$$

Kako je $\int_a^b g'(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x)dx$ i $\sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) = g(b) - g(a)$, to iz (1.96) dobijamo jednakost (1.95). ■

1.8 Smena promenljive

U sledećoj teoremi dajemo formulu smene promenljive kod određenog integrala.

Teorema 1.63. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu (a, b), funkcija $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna na intervalu (α, β) i za sve $t \in (\alpha, \beta)$ važi $\varphi(t) \in (a, b)$. Tada, ako $\alpha_0, \beta_0 \in (\alpha, \beta)$ i ako je $\varphi(\alpha_0) = a_0$ i $\varphi(\beta_0) = b_0$, onda je*

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1.97}$$

Dokaz. Budući da je $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$, to je na intervalu (α, β) definisana kompozicija $f \circ \varphi$. Funkcija φ je neprekidna na intervalu (α, β) jer je diferencijabilna na ovom intervalu, i budući da je i f neprekidna funkcija na intervalu (a, b), sledi da je kompozicija $f \circ \varphi$ neprekidna na intervalu (α, β). Stoga je i funkcija $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$, kao proizvod neprekidnih funkcija $t \mapsto f(\varphi(t))$ i $t \mapsto \varphi'(t)$ na intervalu (α, β), neprekidna na tom intervalu. Prema tome, podintegralne funkcije kod oba integrala u formuli (1.97) su neprekidne, pa oba integrala postoje.

Neka je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a, b) (funkcija f je neprekidna na intervalu (a, b) i stoga ima primitivnu funkciju na tom intervalu). Kompozicija $F \circ \varphi$ je definisana na intervalu (α, β) i za svako $t \in (\alpha, \beta)$ važi da je[14] $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, te je $F \circ \varphi$ primitivna funkcija funkcije $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α, β). Stoga na osnovu Njutn-Lajbnicove formule (Teorema 1.56) sledi

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F\circ\varphi)(\beta_0)-(F\circ\varphi)(\alpha_0) = F(\varphi(\beta_0))-F(\varphi(\alpha_0)) = F(b_0)-F(a_0) \tag{1.98}$$

i

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx = F(b_0) - F(a_0). \tag{1.99}$$

Iz (1.99) i (1.98) sledi (1.97). ∎

Primetimo da formula (1.97) važi kako za slučaj da je $\alpha_0 \le \beta_0$, tako i za slučaj da je $\alpha_0 > \beta_0$. Takođe, za neke tačke t iz intervala, sa krajevima u α_0 i β_0, vrednosti funkcije $\varphi(t)$ mogu i da ne pripadaju segmentu $[a_0, b_0]$.

Sledeće tvrđenje dajemo bez dokaza.

Teorema 1.64. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$. Neka je funkcija φ neprekidno diferencijabilna na segmentu sa krajevima α i β, neka je njen kodomen segment $[a, b]$ i neka je pri tome $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$.*[15] *Tada je*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1.100}$$

Napomenimo i ovde da formula (1.100) važi kako za slučaj da je $\alpha \le \beta$, tako i za slučaj da je $\alpha > \beta$.

Kao i kod formule smene promenljive kod neodređenog integrala, formule (1.97) i (1.100) je moguće primenjivati, kako sleva udesno, tako i zdesna ulevo. Međutim, za razliku od formule smene promenljive kod neodređenog integrala, gde smo imali "vraćanje na staru promenljivu", ovde toga nema, jer je cilj naći broj koji je, kao što smo videli u dokazu Teoreme 1.63, jednak vrednosti svakog od razmatranih integrala formule (1.97) ((1.100)).

[14] Funkcija φ ima izvod u svakoj tački intervala (α, β). Funkcija F ima izvod u svakoj tački intervala (a, b), a za sve $t \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi(t) \in (a, b)$, pa funkcija F ima izvod u tački $\varphi(t)$ za sve $t \in (\alpha, \beta)$. Stoga na osnovu teoreme o izvodu složene funkcije sledi da funkcija $F \circ \varphi$ ima izvod u svakoj tački $t \in (\alpha, \beta)$ i da je

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

[15] Zbog neprekidnosti funkcije φ na segmentu sa krajevima α i β, na osnovu Bolcano-Košijeve teoreme, sledi da je φ surjekcija.

Primer 1.65. Za izračunavanje $\int_0^2 e^{x^2} x dx$ primenićemo formulu (1.97) zdesna ulevo (ovde ulogu promenljive t ima promenljiva x):

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{x^2} x dx &= \left| \begin{array}{c} x^2 = y \Longrightarrow 2xdx = dy \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}dy \\ x = 0 \Longrightarrow y = 0 \\ x = 2 \Longrightarrow y = 4 \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 e^y dy = \frac{1}{2} e^y \Big|_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}.\end{aligned}$$

Primer 1.66. Izračunajmo $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

Ovog puta formulu (1.100) primenjujemo sleva udesno. Koristimo smenu $x = r\sin t$. Da bi bilo $x = -r$ $(x = r)$, tj. $r\sin t = -r$ $(r\sin t = r)$, tj. $\sin t = -1$ $(\sin t = 1)$ dovoljno je da bude $t = -\frac{\pi}{2}$ $(t = \frac{\pi}{2})$. Funkcija $t \mapsto r\sin t$ je neprekidno diferencijabilna na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i ovaj segment slika na segment $[-r, r]$, gde je funkcija $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ neprekidna. Sada primenom Teoreme 1.64, tj. formule (1.100) sleva udesno, dobijamo:[16]

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\, dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t\, dt \\ &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt \\ &= r^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{r^2 \pi}{2}.\end{aligned}$$

Primer 1.67. Izračunajmo $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$.

Koristimo smenu $x = \sin t$. Naime, za $\varphi(t) = \sin t$ imamo da je $\varphi(-\frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ i $\varphi(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Funkcija φ je neprekidno diferencijabilna na segmentu $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ i ovaj segment slika na segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, gde je funkcija $f(x) =$

[16] Mogli smo postupiti i na sledeći način:

Da bi bilo $x = -r$ $(x = r)$, tj. $r\sin t = -r$ $(r\sin t = r)$, tj. $\sin t = -1$ $(\sin t = 1)$ dovoljno je da bude $t = \frac{3\pi}{2}$ $(t = \frac{\pi}{2})$. Funkcija $t \mapsto r\sin t$ je neprekidno diferencijabilna na segmentu $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ i ovaj segment slika na segment $[-r, r]$, gde je funkcija $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ neprekidna. Sada primenom formule (1.100) sleva udesno dobijamo:

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\; r\cos t\, dt = r^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t\, dt \\ &= -r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos t| \cos t\, dt = -r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos t) \cos t\, dt \\ &= r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt \\ &= r^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = r^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{r^2 \pi}{2}.\end{aligned}$$

$\sqrt{1-x^2}$ neprekidna. Sada primenom Teoreme 1.64, tj. formule (1.100) sleva udesno, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} |\cos t|\cos t\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
&= (\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{6}-\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big)+\frac{1}{4}\Big(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big) \\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Primetimo da je moguće birati interval za t tako da za neke tačke t iz tog intervala vrednosti funkcije $\varphi(t)=\sin t$ mogu i da ne pripadaju segmentu $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Na primer, $\varphi(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$ i $\varphi(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ i u nekim tačkama intervala $\big[\frac{\pi}{6},2\pi-\frac{\pi}{6}\big]$ funkcija φ ima vrednosti koje ne pripadaju intervalu $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ (funkcija φ slika segment $[\frac{\pi}{6},2\pi-\frac{\pi}{6}]$ na segment $[-1,1]$). Primenom Teoreme 1.63, tj. formule (1.97) sleva udesno, dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{2\pi-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\,dt \\
= \ & \int_{2\pi-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} |\cos t|\cos t\,dt = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}} |\cos t|\cos t\,dt \\
= \ & -\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}} |\cos t|\cos t\,dt\right) \\
= \ & -\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt\right) \\
= \ & -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
= \ & -(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + (\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - (\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}} \\
= \ & -(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(\pi)) + (\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}) + (\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(3\pi)) - (\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi) \\
- \ & (\frac{1}{2}(2\pi-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}\sin(4\pi-\frac{\pi}{3})) + (\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(3\pi)) \\
= \ & -\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\sin(-\frac{\pi}{3}) \\
= \ & \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

1.9 Parcijalna integracija

Teorema 1.68. *Neka su funkcije u i v neprekidno diferencijabilne na segmentu $[a,b]$. Tada je*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \tag{1.101}$$

Dokaz. Koristeći formulu za izvod proizvoda dobijamo

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),\ x \in [a,b].$$

Sve funcije u prethodnoj formuli su neprekidne na segmentu $[a,b]$, pa su integrabilne, tj. postoje integrali $\int_a^b (u(x)v(x))'dx$, $\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b v(x)du(x)$ i $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b u(x)dv(x)$, i na osnovu Tvrđenja 1.33 važi jednakost:

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b v(x)du(x) + \int_a^b u(x)dv(x). \tag{1.102}$$

Kako je funkcija $(uv)'$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i da je uv njena primitivna funkcija na tom segmentu, na osnovu Njutn-Lajbnicove formule (Teorema 1.56) sledi da je

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = [u(x)v(x)]_a^b. \tag{1.103}$$

Sada iz (1.102) i (1.103) sledi formula (1.101). ■

Primer 1.69. Izračunajmo $\int_1^2 \ln x dx$. Budući da su funkcija $u(x) = \ln x$ i $v(x) = x$ neprekidno diferencijabilna na segmentu $[1,2]$, to primenom formule (1.101) dobijamo

$$\int_1^2 \ln x dx = x \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - \ln 1 - 1 = 2\ln 2 - 1.$$

Teorema 1.70. *Neka su funkcije u i v neprekidne deo po deo neprekidno diferencijabilne na segmentu $[a,b]$. Tada je*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \tag{1.104}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo kao i dokaz Teoreme 1.68. Funkcije u' i v' nisu definisane evetualno u konačno mnogo tačaka segmenta $[a,b]$, ali kako god da ih dodefinišemo u tim tačkama, dobićemo deo po deo neprekidne funkcije, a takođe će i funkcije $(uv)'$, uv' i $u'v$ biti deo po deo neprekidne i stoga i integrabilne na segmentu $[a,b]$ (Teorema 1.49). Iz jednakosti $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),\ x \in [a,b]$ sledi

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b v(x)du(x) + \int_a^b u(x)dv(x). \tag{1.105}$$

Budući da su funkcije u i v neprekidne deo po deo glatke na segmentu $[a,b]$, onda je i njihov proizvod uv neprekidna deo po deo glatka funkcija na segmentu $[a,b]$, pa na osnovu Teoreme 1.95 sledi

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = [u(x)v(x)]_a^b. \tag{1.106}$$

Iz (1.105) i (1.106) sledi formula (1.104). ■

1.10 Druga teorema o srednjoj vrednosti

U ovoj sekciji ćemo koristiti formulu parcijalne integracije da bismo dokazali još neka svojstva određenog integrala.

Lema 1.71. *Neka je f neprekidna, a g rastuća, nenegativna i glatka funkcija na segmentu $[a,b]$. Tada postoji $\xi \in [a,b]$ tako da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{1.107}$$

Dokaz. Neka je $F(x) = \int_x^b f(t)dt,\ x \in [a,b]$. Budući da je f neprekidna na segmentu $[a,b]$, sledi da je F diferencijabilna na segmentu $[a,b]$ i na osnovu formule (1.88) sledi $F'(x) = -f(x)$. Sada na osnovu formule parcijalne integracije primenjene na funkcije g i F koje su neprekidno diferencijabilne na segmentu $[a,b]$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= \left| \begin{array}{c} dv(x) = f(x)dx \Longrightarrow v(x) = \int f(x)dx = -F(x) \\ u(x) = g(x) \Longrightarrow du(x) = g'(x)dx \end{array} \right| \\
&= (-g(x)F(x))\Big|_a^b + \int_a^b F(x)g'(x)dx \\
&= -(g(b)F(b) - g(a)F(a)) + \int_a^b F(x)g'(x)dx \\
&= g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)dx, \qquad (1.108)
\end{aligned}$$

jer je $F(b) = \int_b^b f(t)dt = 0$.

Budući da je funkcija F neprekidna na segmentu $[a,b]$, na osnovu Vajerštrasove teoreme sledi da na segmentu $[a,b]$ dostiže svoj supremum i infimum. Neka je $M = \max\limits_{a\le x\le b} F(x)$ i $m = \min\limits_{a\le x\le b} F(x)$. Tada je

$$m \le F(x) \le M,\ x \in [a,b], \tag{1.109}$$

i prema tome,

$$m \le F(a) \le M. \tag{1.110}$$

Funkcija g je nenegativna, pa je $g(a) \ge 0$. Množeći nejednakost (1.110) sa $g(a)$ dobijamo

$$mg(a) \le g(a)F(a) \le Mg(a). \tag{1.111}$$

Kako je g rastuća i diferencijabilna funkcija na segmentu $[a, b]$, to na osnovu Teoreme **??** i komentara nakon ove Teoreme sledi da je $g'(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Stoga iz (1.109), množenjem sa $g'(x)$ dobijamo

$$mg'(x) \leq F(x)g'(x) \leq Mg'(x), \; x \in [a, b],$$

odakle zbog monotonosti određenog integrala (Tvrđenje 1.38) sledi

$$m \int_a^b g'(x)dx \leq \int_a^b F(x)g'(x)dx \leq M \int_a^b g'(x)dx. \tag{1.112}$$

Kako je funkcija g glatka, to je g' neprekidna na segmentu $[a, b]$, pa na osnovu Njutn-Lajbnicove formule (Teorema 1.56) sledi

$$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a). \tag{1.113}$$

Iz (1.112) i (1.113) sledi

$$m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b F(x)g'(x)dx \leq M(g(b) - g(a)). \tag{1.114}$$

Sada iz (1.111) i (1.114) sabiranjem dobijamo

$$mg(a) + m(g(b) - g(a)) \leq g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)dx \leq Mg(a) + M(g(b) - g(a)),$$

što zajedno sa (1.108) daje

$$mg(b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(b). \tag{1.115}$$

Ako je $g(b) = 0$, onda zbog monotonosti i nenegativnosti funkcije g na segmentu $[a, b]$ sledi $0 \leq g(a) \leq g(x) \leq g(b)$ za sve $x \in [a, b]$, pa je $g(x) = 0$ za sve $x \in [a, b]$ i jednakost (1.107) važi za svako $\xi \in [a, b]$. Pretpostavimo sada da je $g(b) > 0$. Deljenjem nejednakosti (1.115) sa $g(b)$ dobijamo

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(b)} \leq M.$$

Sada primenom posledice Bolcano-Košijeve i Vajerštrasove teoreme (Posledica **??**) na funkciju F koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$, dobijamo da postoji $\xi \in [a, b]$ tako da je $F(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(b)}$, tj. $\int_\xi^b f(x)dx = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{g(b)}$ i važi jednakost (1.107). ■ Sledeća teorema je poznata pod nazivom druga teorema o srednjoj vrednosti.

Teorema 1.72. *(Bone[17]) Neka je f neprekidna, a g monotona i glatka funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada postoji $\xi \in [a, b]$ tako da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx. \tag{1.116}$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je funkcija g rastuća na segmentu $[a, b]$. Neka je $h(x) = g(x) - g(a)$, $x \in [a, b]$. Funkcije h je rasuća, nenegativna i glatka na segmentu $[a, b]$, te se na nju može primeniti prethodna lema i postoji $\xi \in [a, b]$ tako da je

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = h(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$

Stavljajući u poslednjoj jednakosti $h(x) = g(x) - g(a)$ dobijamo

$$\int_a^b f(x)(g(x) - g(a))dx = (g(b) - g(a)) \int_\xi^b f(x)dx,$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= g(a) \int_a^b f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx - g(a) \int_\xi^b f(x)dx \\
&= g(a) \left(\int_a^b f(x)dx - \int_\xi^b f(x)dx \right) + g(b) \int_\xi^b f(x)dx \\
&= g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Ovim je dokaz gotov za slučaj da je g rastuća funkcija na $[a, b]$. Ako je g opadajuća funkcija na segmentu $[a, b]$, onda je $-g$ rastuća funkcija na $[a, b]$ i primenom prethodno dokazanog dela teoreme na funkcije f i $-g$, zaključujemo da postoji $\xi \in [a, b]$ tako da je

$$\int_a^b f(x)(-g(x))dx = (-g(a)) \int_a^\xi f(x)dx + (-g(b)) \int_\xi^b f(x)dx.$$

Odavde množenjem sa -1 dobijamo formulu (1.116). ■

[17]P. O. Bonnet (1819-1892, francuski matematičar