Glava 1

Granične vrednosti nizova

1.1 Polje realnih brojeva

Skup realnih brojeva uvodimo aksiomatski.

Definicija 1.1. Polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ naziva se *polje realnih brojeva* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1.1.1) Na skupu $\mathbb{R}$ je definisana relacija totalnog poretka $\leq$, za koju važi:

(1.1.1.1) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c)$,

(1.1.1.2) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(0 \leq a \wedge 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq a \cdot b)$.

(1.1.2) Za svaka dva neprazna podskupova A i B skupa $\mathbb{R}$, takva da je $a \leq b$ za sve $a \in A$, $b \in B$, postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je $a \leq c \leq b$ za sve $a \in A$, $b \in B$.

Osobine (1.1.1.1) i (1.1.1.2) govore da je relacija totalnog uređenja saglasna sa operacijama $+$ i $\cdot$. Za polje sa takvim osobinama kažemo da je *uređeno polje*. Aksioma (1.1.2) se zove *aksioma neprekidnosti* ili *aksioma potpunosti*. Napomenimo da se aksioma neprekidnosti ne može izvesti iz ostalih aksioma polja realnih brojeva, i jedino ju je moguće zameniti nekim njoj ekvivalentnim iskazom. Inače za skup realnih brojeva kažemo da je *neprekidno uređeno polje*.

Neka je $A \subset \mathbb{R}$. Za element $m \in \mathbb{R}$ kažemo da je *gornja granica* ili *majoranta* skupa A ako za svako $a \in A$ važi $a \leq m$. Za element $n \in \mathbb{R}$ kažemo da je *donja granica* ili *minoranta* skupa A ako za svako $a \in A$ važi $n \leq a$.

Ako postoji gornja granica skupa A koja pripada skupu A, onda se ona zove *maksimum skupa* A i obeležava sa $\max A$. Za donju granicu skupa A koja pripada skupu A kažemo da je *minimum skupa* A i obeležavamo je sa $\min A$.

Na primer, ako posmatramo skup $A = (0, 1]$, onda je 1 gornja granica skupa A i pripada skupu A, pa je $\max A = 1$. Međutim skup $B = [0, 1)$ nema maksimum, jer skup gornjih granica skupa B je interval $[1, +\infty)$ i nijedna gornja granica skupa B ne pripada skupu B. Primetimo još da skup A nema minimum, dok je $\min B = 0$.

Ako skup A ima maksimum, onda je on jedinstven. Zaista, neka su m_1 i m_2 dva maksimuma skupa A. To znači da su m_1 i m_2 gornje granice skupa A i da pripadaju skupu A. Iz činjenice da je m_2 gornja granica skupa A i da $m_1 \in A$ sledi $m_1 \leq m_2$, dok iz činjenice da je m_1 gornja granica skupa A, a $m_2 \in A$, sledi $m_2 \leq m_1$. Prema tome, $m_1 = m_2$.

Slično se dokazuje da je minimum skupa, ukoliko postoji, jedinstven.

Za skup A kažemo da je *ograničen odozgo (odozdo)* ako ima barem jednu gornju (donju) granicu. Skup A je *ograničen* ako je odozdo i odozgo ograničen.

Ako skup gornjih granica skupa A ima minimum, onda se taj element zove *supremum skupa* A i obeležava sa $\sup A$. Možemo reći da je supremum najmanja među svim gornjim granicama skupa A-govorićemo jednostavno da je supremum skupa A najmanja gornja granica skupa A.

Ako skup donjih granica skupa A ima maksimum, onda se taj element zove *infimum skupa* A i obeležava sa $\inf A$. Možemo jednostavno reći da je infimum skupa A najveća donja granica skupa A.

Prema tome, element $b \in \mathbb{R}$ je supremum skupa A, $b = \sup A$, ako i samo važe sledeća dva uslova:

(s_1) $(\forall a \in A)(a \leq b)$;

(s_2) $(\forall a \in A)(a \leq c) \Longrightarrow b \leq c$.

Uslov (s_1) znači da je b gornja granica skupa A, a uslov (s_2) znači da za proizvoljnu gornju granicu c skupa A važi $b \leq c$.

Element $b \in \mathbb{R}$ je infmum skupa A, $b = \inf A$, ako i samo ako važe sledeća dva uslova:

(i_1) $(\forall a \in A)(b \leq a)$;

(i_2) $(\forall a \in A)(c \leq a) \Longrightarrow c \leq b$.

Iz definicije sledi da ako postoji supremum (infimum) skupa A, onda je jedinstven.

Napomenimo da maksimum (minimum) skupa A postoji ako i samo ako postoji supremum (infimum) skupa A koji još i pripada skupu A. Zaista, neka je m maksimum skupa A. Tada je m gornja granica skupa A i $m \in A$. Prema tome, važi uslov (s_1) i ako je c proizvoljna gornja granica skupa A, onda budući da $m \in A$ sledi $m \leq c$, pa je zadovoljen i uslov (s_2). Dakle, m je supremum skupa A koji pripada skupu A. Obrnuto, pretpostavimo da je $m = \sup A$ i $m \in A$. Tada je m gornja granica skupa A koja pripada skupu A, pa je $m = \max A$.

Na primer, posmatrajmo skupove $A = (0, 1]$ i $B = [0, 1)$. Skup gornjih granica i za jedan i za drugi skup je interval $[1, +\infty)$. Ovaj skup ima minimum, to je 1, pa je $\sup A = \sup B = 1$. Kao što smo već uočili skup A ima maksimum, to je 1 (supremum skupa A pripada skupu A), dok skup B nema maksimum (supremum skupa B ne pripada skupu B).

Prema tome, maksimum skupa (ukoliko postoji) je i supremum skupa, dok obrnuto u opštem slučaju ne važi. Samo supremum skupa koji pripada skupu je maksimum skupa.

Neka je $A \subset \mathbb{R}$. Za element $b \in \mathbb{R}$ važi $b = \sup A$ ako i samo ako su ispunjena sledeća dva uslova:

(s_1) $(\forall a \in A)\, a \leq b$;

(s_2') $(\forall b' < b)(\exists a \in A)\, b' < a$. [1]

[1] Da bismo dokazali prethodnu ekvivalenciju, pretpostavimo najpre da je $b = \sup A$. Tada važi

Takodje, $b = \sup A$ ako i samo ako su ispunjena sledeća dva uslova:
(s_1) $(\forall a \in A)\, a \leq b$;
(s_2'') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\, b - \varepsilon < a$.

Uslov (s_2'') je ekvivalentan uslovu (s_2'). Zaista, ako uzmemo da je $b' = b - \varepsilon$, onda je uslov $b' < b$ ekvivalentan uslovu $\varepsilon > 0$.

Slično, ako je $A \subset \mathbb{R}$, za element $b \in \mathbb{R}$ važi $b = \inf A$ ako i samo ako su ispunjena sledeća dva uslova:
(i_1) $(\forall a \in A)\, b \leq a$;
(i_2') $(\forall b' > b)(\exists a \in A)\, a < b'$.

Osim toga, $b = \inf A$ ako i samo važe uslovi:
(i_1) $(\forall a \in A)\, b \leq a$;
(i_2'') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\, a < b + \varepsilon$.

Na kraju ove sekcije navodimo dva ekvivalenata aksiome neprekidnosti.

Aksioma suoremuma: Svaki neprazan, odozgo ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

Aksioma infimuma: Svaki neprazan, odozdo ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$.

Iz aksiome supremuma sledi Arhimedov princip.

Teorema 1.2. *(Arhimedov princip) Za svaki realan broj a postoji prirodan broj n takav da je $n > a$, tj.*

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\, n > a. \tag{1.1}$$

1.2 Prošireni skup realnih brojeva i okoline tačaka

Pre nego što uvedemo pojam intervala i okoline, napomenimo da postoji bijekcija između skupa realnih brojeva i skupa tačaka neke prave, koja se onda naziva *brojna osa*. Tako dobijeni geometrijski model skupa $\mathbb{R}$ koristićemo da bismo lakše zamišljali određene odnose među elementima i podskupovima skupa $\mathbb{R}$. Umesto realan broj često ćemo govoriti realna tačka.

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Otvoren interval je skup

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

uslov (s_1) i dokažimo da važi uslov (s_2'). Pretpostavimo suprotno, tj. da važi negacija:

$$\neg(\forall b' < b)(\exists a \in A)\, b' < a.$$

Ovo je ekvivalentno uslovu:

$$(\exists b' < b)(\forall a \in A)\neg(b' < a).$$

Prema tome, postoji $b' < b$ tako da za svako $a \in A$ važi $a \leq b'$, tj. b' je gornja granica skupa A za koju ne važi relacija $b \leq b'$. Ovo je u suprotnosti sa tim da je b, kao supremum skupa A, minimum skupa gornjih granica skupa A. Dobijena protivurečnost dokazuje da važi uslov (s_2').

Obrnuto, pretpostavimo da važe uslovi (s_1) i (s_2'). Neka je $c \in \mathbb{R}$ gornja granica skupa A. Tada važi $b \leq c$, jer u protivnom bi bilo $c < b$ pa bi prema uslovu (s_2') postojao element $a \in A$ takav da je $c < a$, što je u suprotnosti sa tim da je c gornja granica skupa A. Prema tome, ispunjeni su uslovi (s_1) i (s_2), pa je $b = \sup A$.

a segment (odsečak, zatvoren interval) je skup

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Poluinterval zatvoren sleva je skup

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

a poluinterval zatvoren zdesna je skup

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Često se intervali i poluintervali nazivaju jednim imenom intervali. Broj a se naziva levi kraj intervala, a broj b se naziva desni kraj intervala. Tačke a i b se takođe jednim imenom nazivaju *rubne tačke* intervala, dok se svaka tačka x za koju važi da je $a < x < b$ zove *unutrašnja tačka* intervala. Broj $b - a$ je dužina intervala.

Okolina tačke (broja) $a \in \mathbb{R}$ je bilo koji otvoreni interval skupa $\mathbb{R}$ koji tu tačku sadrži. Za okolinu tačke a koristi se oznaka $U(a)$. [2]

Za $\varepsilon > 0$, pod ε-*okolinom* tačke a podrazumevamo otvorni interval oblika

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Budući da svaka okolina tačke a sadrži neku njenu ε-okolinu, to je u radu sa okolinama uvek dovoljno posmatrati ε-okoline.

Iz tehničkih razloga, radi jednostavnijeg izražavanja, skup realnih brojeva se proširuje sa još dva elementa $+\infty$ i $-\infty$, koji se čitaju redom sa "plus beskonačno" i "minus beskonačno". Tako dobijamo prošireni skup realnih brojeva

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Ako je $a \in \mathbb{R}$, govorićemo da je *a konačan broj.*

Relacija poretka sa skupa $\mathbb{R}$ proširuje se na skup $\overline{\mathbb{R}}$ na sledeći način:

$$\begin{gathered}(\forall x \in \mathbb{R})(-\infty < x)\\ (\forall x \in \mathbb{R})(x < +\infty)\\ -\infty < +\infty.\end{gathered}$$

Na taj način je skup $\overline{\mathbb{R}}$ linearno uređen. Svaki podskup A skupa $\overline{\mathbb{R}}$ je odozgo (odozdo) ograničen sa $+\infty$ $(-\infty)$, tj. $+\infty$ $(-\infty)$ je gornja (donja) granica skupa A. Ako je $A \subset \mathbb{R}$ odozgo ograničen u $\mathbb{R}$, onda on ima supremum u $\mathbb{R}$, i to je supremum i u $\overline{\mathbb{R}}$, a ako A nije odozgo ograničen u $\mathbb{R}$, onda smatramo da je $\sup A = +\infty$. Takođe ako je $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ i $+\infty \in A$, onda uzimamo da je $\sup A = +\infty$. Dakle svaki neprazan podskup u $\overline{\mathbb{R}}$ ima supremum.

Slično, svaki neprazan podskup u $\overline{\mathbb{R}}$ ima infimum.

[2] Oznaka U za okolinu potiče od nemačke reči Umgebung što znači okolina.

Koristićemo sledeće oznake:

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \text{ i } [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \tag{1.2}$$

i

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \text{ i } (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \tag{1.3}$$

gde je $a \in \mathbb{R}$. Skupove u (1.2) zvaćemo okolinama tačke $+\infty$, dok ćemo skupove u (1.3) zvati okolinama $-\infty$. Takođe je i skup $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ okolina tačke $+\infty$, kao i tačke $-\infty$. Primetimo da same tačke $+\infty$ i $-\infty$ ne pripadaju sopstvenim okolinama.

1.3 Pojam granične vrednosti realnog niza i osobine

Definicija 1.3. Neka je A neprazan skup. Funkcija $a : \mathbb{N} \to A$ zove se *niz* elemenata skupa A. Vrednost $a(n)$ funkcije a u tački $n \in \mathbb{N}$ označavamo sa a_n i zovemo *n-tim članom* ili *opš timčlanom* niza, dok se sam niz obeležava sa (a_n), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ili sa $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Na primer $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ je opšti član niza $a = \left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \ldots\right)$. Niz se često obeležava i sa (x_n), (y_n), (b_n).

U ovoj sekciji izućavaćemo isključivo nizove realnih brojeva.

Pojam granične vrednosti ili limesa niza je osnovni pojam matematičke analize (limes je latinska reč i znači granica).

Definicija 1.4. Tačka $x \in \overline{\mathbb{R}}$ je *granična vrednost* ili *granica* ili *limes niza* (x_n) ako za svaku okolinu U tačke x postoji prirodan broj n_0 tako da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$ i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Prema tome,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff (\forall U)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies x_n \in U).$$

U tom slučaju kažemo da niz (x_n) teži ka x kad n teži beskonačnosti i pišemo još i $x_n \to x$, $n \to \infty$. Ako je x konačan broj, za niz (x_n) kažemo da je *konvergentan* ili da *konvergira ka* x, a ako je $x = -\infty$ ili $x = +\infty$ ili ako granična vrednost ne postoji, onda ćemo reći da taj niz *divergira* ili da je *divergentan.* Pri tom, za nizove koji teže ka $+\infty$ ili $-\infty$ kažemo da *određeno divergiraju* ili da su *određeno divergentni.*

Prema tome, niz (x_n) teži ka x, ako se u svakoj okolini tačke x nalaze *svi članovi niza počev od nekog* ili *skoro svi članovi niza*-svi sem njih konačno mnogo.

S obzirom na definicije okolina konačnih i beskonačnih elemenata skupa $\overline{\mathbb{R}}$, uslov dat u definiciji se može protumačiti na sledeće načine.

Ako je $x \in \mathbb{R}$, tada

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = x &\Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon)\\ &\Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon.)\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ako je $x = +\infty$, onda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Longleftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow x_n > M). \tag{1.5}$$

Dakle, za niz (x_n) kažemo da teži ka $+\infty$, i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, ako za svako $M \in \mathbb{R}$ postoji prirodan broj n_0 tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n > M$.

Slično, ako je $x = -\infty$, onda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longleftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow x_n < M), \tag{1.6}$$

tj. za niz (x_n) kažemo da teži ka $-\infty$, i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, ako za svako $M \in \mathbb{R}$ postoji prirodan broj n_0 tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n < M$.

Napomena 1.5. Da bismo dokazali da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dovoljno je dokazati da za svaki realan broj $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n > M$.

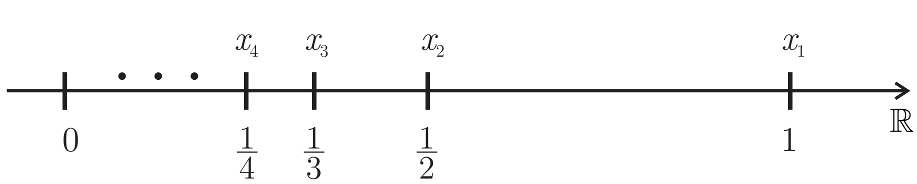
Zaista, neka za svako $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n > M$. Pokažimo da onda za svako $K \in \mathbb{R}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n > K$. Ovo je jasno za $K > 0$. Ako je $K \leq 0$, onda iz pretpostavke sledi da za $M = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n > M = 1 > 0 \geq K$.

Slično, da bismo dokazali da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dovoljno je dokazati da za svaki realan broj $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n < M$. □

Primer 1.6. Za $c \in \mathbb{R}$ i niz čiji je opšti član $x_n = c$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Zaista, za svako $\varepsilon > 0$ biće $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ za svako $n \in \mathbb{N}$. •

Primer 1.7. Posmatrajmo sada niz ciji je opšti član $x_n = \dfrac{1}{n}$.



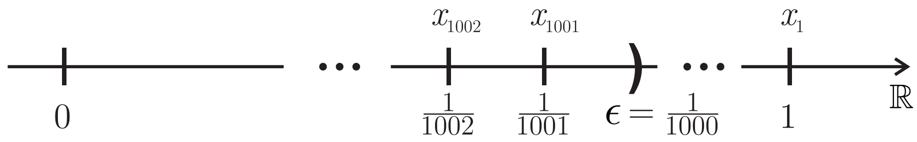
Kako je

$$0 < \cdots < \frac{1}{102} < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} < \cdots < \frac{1}{12} < \frac{1}{11} < \frac{1}{10},$$

odnosno

$$0 < \cdots < x_{102} < x_{101} < \frac{1}{100} < \cdots < x_{12} < x_{11} < \frac{1}{10},$$

primetimo da za $\varepsilon = \frac{1}{10}$ važi da se svi članovi niza čiji je indeks veći ili jednak od 11 nalaze u ε-okolini broja 0: $x_n \in (0 - \frac{1}{10}, 0 + \frac{1}{10})$ za $n \geq 11$, dok za $\varepsilon = \frac{1}{100}$ važi da se svi članovi niza čiji je indeks veći ili jednak od 101 nalaze u ε-okolini broja 0: $x_n \in (0 - \frac{1}{100}, 0 + \frac{1}{100})$ za $n \geq 101$.



Dokažimo da ovaj niz konvergira ka 0. U tom cilju dokažimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 tako da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, tj. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Na osnovu Arhimedovog principa postoji prirodan broj n_0 takav da je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Sada za svako $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $n \geq n_0$ važi $n > \frac{1}{\varepsilon}$, odakle $\frac{1}{n} < \varepsilon$, tj. $|x_n - 0| < \varepsilon$. Primetimo da je za zadato $\varepsilon > 0$ dovoljno uzeti $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Zaista, $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ i za svako $n \geq n_0$ takođe će važiti $n > \frac{1}{\varepsilon}$, i prema tome, $\frac{1}{n} < \varepsilon$, tj. $|x_n - 0| < \varepsilon$. •

Primer 1.8. Pokazaćmo da je

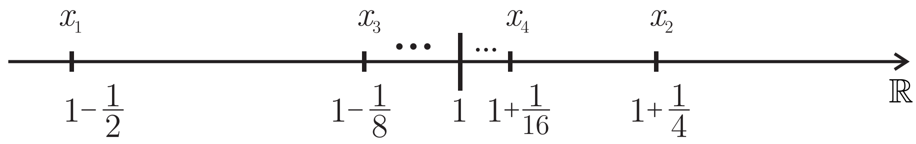
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+5} = 2.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Treba naći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$ važi $\left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| < \varepsilon$. Iz

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| &= \left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| = \frac{7}{n+5} < \varepsilon \iff \frac{n+5}{7} > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\iff n+5 > \frac{7}{\varepsilon} \iff n > \frac{7}{\varepsilon} - 5,
\end{aligned}$$

zaključujemo da za $n_0 = \max\left\{\left[\frac{7}{\varepsilon} - 5\right] + 1, 1\right\}$ važi $n_0 \in \mathbb{N}$ i $n_0 > \frac{7}{\varepsilon} - 5$, pa i za svako $n \geq n_0$ važi $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5$, i stoga, $\left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| < \varepsilon$. •

Primer 1.9. Pokažimo da niz čiji je opšti član $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}$ konvergira ka 1.



U tom cilju dokažimo da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$ važi $\left|1 + (-1)^n \dfrac{1}{2^n} - 1\right| < \varepsilon$. Kako je

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Longleftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon},$$

zaključujemo da je za n_0 dovoljno uzeti $n_0 = \max\left\{\left[\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1, 1\right\}$, jer je $n_0 > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$, i zato i za svako $n \geq n_0$ važi $n > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$, tj. $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ i prema tome, $\left|1 + (-1)^n \dfrac{1}{2^n} - 1\right| < \varepsilon$. •

Primer 1.10. Dokažimo da niz $x_n = 3^n$ teži ka $+\infty$.

Neka je $M > 0$ proizvoljno. Pokažimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ povlači $3^n > M$. Budući da je

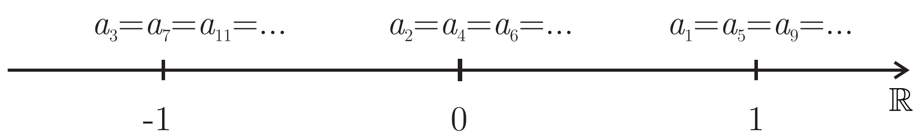
$$3^n > M \Longleftrightarrow n > \log_3 M,$$

zaključujemo da je za n_0 dovoljno uzeti $n_0 = \max\{[\log_3 M] + 1, 1\}$, jer je $n_0 > \log_3 M$ i za svako $n \geq n_0$ važi $n > \log_3 M$, tj. $x_n = 3^n > M$. •

Primer 1.11. Pokažimo da niz čiji je opšti član $a_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ nije konvergentan.

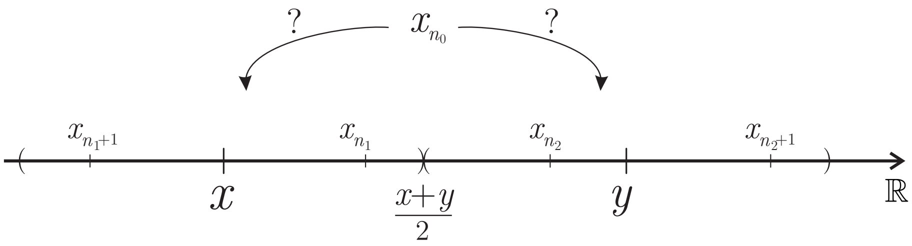
Primetimo najpre da je $a_{2k} = \sin k\pi = 0$, $a_{4k+1} = \sin \dfrac{(4k+1)\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, $a_{4k+3} = \sin \dfrac{(4k+3)\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$, $k \in \mathbb{N}$. Za svaki broj $a \in \mathbb{R}$ van njegove ε-okoline, gde je $0 < \varepsilon < 1$, nalazi se beskonačno mnogo elemenata niza, i zato a nije granična vrednost niza (a_n).

Primetimo da ovaj niz nema graničnu vrednost. U okolini $(2, +\infty)$ tačke $+\infty$ nema nijednog člana niza, pa $+\infty$ nije granica niza. Takođe, u okolini $(-\infty, -2)$ tačke $-\infty$ nema članova niza (a_n), pa ni $-\infty$ nije granica niza. •



Tvrđenje 1.12. *Ako postoji granična vrednost niza, onda je ona jedinstvena.*

Dokaz. Pretostavimo da niz (x_n) ima dve različite granične vrednosti x i y i neka su, na primer, obe konačne. Za $\varepsilon = \dfrac{|x-y|}{2} > 0$ okoline $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ i $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ su disjunktne. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, sledi postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_1$ važi $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Takođe, iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ sledi da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_2$ važi $x_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada za svako $n \geq n_0$ važi $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, što protivureči činjenici da su okoline $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ i $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ disjunktne. (Za slučaj da bar jedna od graničnih vrednosti x i y nije konačan broj, takođe možemo naći njihove disjunktne okoline, i analogno kao u prethodnom rasuđivanju doći do protivurečnosti). ■

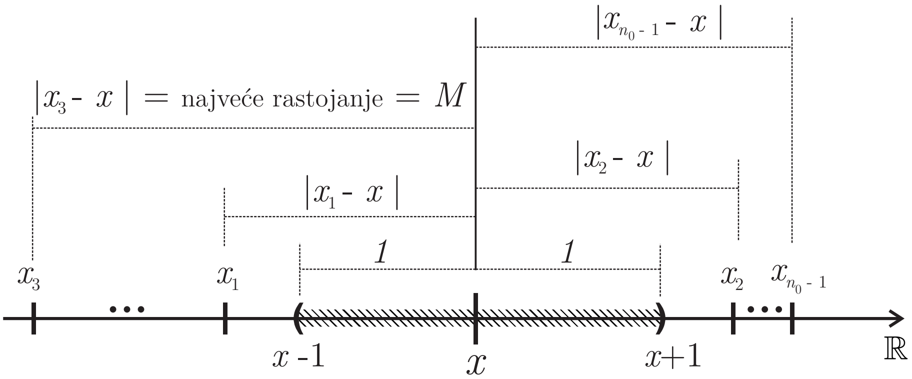


Definicija 1.13. Za niz (x_n) kažemo da je *odozgo (odozdo) ograničen* ako je odozgo (odozdo) ograničen skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Niz (x_n) je *ograničen* ako je odozgo i odozdo ograničen.

Tvrđenje 1.14. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je (x_n) konvergentan niz i neka je x granična vrednost ovog niza. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $n \geq n_0$ važi $|x_n - x| < 1$. Neka je $M = \max\{1, |x_1 - x|, |x_2 - x|, \ldots, |x_{n_0-1} - x|\}$. Tada je $|x_n - x| \leq M$, tj. $x_n \in [x-M, x+M]$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, niz (x_n) je ograničen. ■



Primetimo da obrat Tvrđenja 1.14 ne važi, tj. postoje nizovi koji su ograničeni ali nisu konvergentni. Na primer niz čiji je opšti član $x_n = (-1)^n$ je ograničen ali nije konvergentan. Takođe i niz iz Primera 1.11 je ograničen i nije konvergentan.

Tvrđenje 1.15. *Neka su* $b,\ c \in \mathbb{R}$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Ako je $x < b$*, tada postoji* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tako da za svako* $n \geq n_1$ *važi* $x_n < b$*.*
Ako je $x > c$*, tada postoji* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tako da za svako* $n \geq n_2$ *važi* $x_n > c$*.*

Dokaz. Neka je $x < b$ i $\varepsilon = b - x$. Tada je $\varepsilon > 0$ i iz (1.7) i (1.4) sledi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_1$, $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (x-\varepsilon, b)$. Prema tome, $x_n < b$ za $n \geq n_1$.

Neka je $x > c$ i $\varepsilon = x - c$. Kako je $\varepsilon > 0$, iz (1.7) i (1.4) sledi da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_2$, $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (c, x+\varepsilon)$. Prema tome, $x_n > c$ za $n \geq n_2$. ■

Tvrđenje 1.16. *Neka su* $b,\ c \in \mathbb{R}$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Ako je $x_n \geq b$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *(ili počev od nekog* n*), tada je* $x \geq b$*.*
Ako je $x_n \leq c$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *(ili počev od nekog* n*), tada je* $x \leq c$*.*

Dokaz. Neka je $x_n \geq b$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako bi bilo $x < b$, tada bi na osnovu Tvrđenja 1.15 sledilo da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $x_n < b$ za svako $n \geq n_1$, što je suprotno pretpostavci.

Analogno, ako je $x_n \leq c$ za svako $n \in \mathbb{N}$, na osnovu Tvrđenja 1.15, zaključujemo da je $x \leq c$. ■

Tvrđenje 1.16, za konvergentan niz (x_n), primenjivaćemo koristeći implikacije:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \geq b \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \geq b, \tag{1.9}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq c \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leq c. \tag{1.10}$$

Primetimo da je moguća striktna nejednakost na levoj strani gornjih implikacija, a jednakost na njihovoj desnoj strani, odnosno čak iako je $x_n > b$ ($x_n < c$) za svako $n \in \mathbb{N}$, ne mora biti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > b$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n < c$). Za slučaj implikacije (1.9) to pokazuje primer:

$$x_n = \frac{1}{n},\ b = 0,\ x_n > 0 \text{ za svako } n \in \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

a za slučaj implikacije (1.10) to pokazuje primer:

$$x_n = -\frac{1}{n},\ c = 0,\ x_n < 0 \text{ za svako } n \in \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Ujedno ovi primeri pokazuju da obrat Tvrđenja 1.15 ne važi.

Sledeća tvrdjenje je uopštenje Tvrđenja 1.15.

Tvrđenje 1.17. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $x,\ y \in \overline{\mathbb{R}}$, *i* $x < y$, *tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $x_n < y_n$ *za svako* $n \geq n_0$.

Dokaz. Neka su, na primer, x i y konačni brojevi. Za $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2} > 0$ važi $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap(y-\varepsilon, y+\varepsilon) = \emptyset$. Takođe za svako $t \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ i svako $s \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ važi nejednakost $t < s$ (Za slučaj da je bar jedna od granica x i y beskonačna, takođe je moguće naći okolinu $U(x)$ tačke x i okolinu $V(y)$ tačke y tako da za svako $s \in U(x)$ i svako $t \in V(y)$ važi nejednakost $t < s$). Iz $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ sledi da postoje $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ za $n \geq n_1$ i $y_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ za $n \geq n_2$. Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Za $n \geq n_0$ imamo da $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ i $y_n \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, te je $x_n < y_n$. ■

Naredna tvrđenje je uopštenje Tvrđenja 1.16.

Tvrđenje 1.18. *Neka je* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $x,\ y \in \overline{\mathbb{R}}$, *i* $x_n \geq y_n$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *(ili počev od nekog* n*). Tada je* $x \geq y$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $x < y$. Na osnovu Tvrđenja 1.17 sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $x_n < y_n$ za svako $n \geq n_0$. Ovo protivureči pretpostavci da je $x_n \geq y_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dobijena protivurečnost dokazuje da je $x \geq y$. ■

Tvrđenje 1.18, za nizove (x_n) i (y_n), od kojih svaki ponaosob ima graničnu vrednost, zapisivaćemo kraće pomoću implikacije

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \geq y_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{1.11}$$

Primetimo da je moguća striktna nejednakost na levoj strani implikacije (1.11), a jednakost na njenoj desnoj strani, odnosno čak iako je $x_n > y_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, ne mora da bude $\lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n$. To pokazuju sledeći primeri:

$$(i)\ x_n = \frac{1}{2^n},\ y_n = 0,\ x_n > y_n \text{ za svako } n \in \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

i

$$(ii)\ x_n = \frac{1}{2^n},\ y_n = -\frac{1}{2^n},\ x_n > y_n \text{ za svako } n \in \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

Ovi primeri ujedno pokazuju da ne važi obrat Tvrđenja 1.17.

Tvrđenje 1.19. *Ako nizovi* (x_n) *i* (y_n) *konvergiraju, tada konvergiraju i nizovi* $(x_n + y_n)$ *i* $(x_n - y_n)$ *i važi*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,\\
\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.
\end{aligned}$$

Dokaz. Neka je je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ i neka je $\varepsilon > 0$ poizvoljno. Tada postoje $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $n \geq n_1$ i $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $n \geq n_2$. Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Za $n \geq n_0$ važi

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

i

$$|(x_n - y_n) - (x - y)| = |(x_n - x) - (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema tome,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

i

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n. \ \blacksquare$$

Ako nizovi (x_n) i (y_n) nisu konvergentni, njihov zbir odnosno razlika ne mora da bude divergentan niz. Na primer nizovi $x_n = n+5$ i $y_n = -n+3$ nisu konvergentni, ali je njihov zbir $(x_n + y_n)$ konvergentan niz ($x_n + y_n = 8$, $n \in \mathbb{N}$). Takođe, nizovi $a_n = n+5$ i $b_n = n$ nisu konvergentni, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, ali je njihova razlika $(a_n - b_n)$ konvergentan niz ($a_n - b_n = 5$, $n \in \mathbb{N}$). Ovi primeri pokazuju da obrat Tvrđenja 1.19 ne važi, tj. da iz konvergencije zbira (razlike) dva niza, ne sledi konvergencija svakog od njih ponaosob.

Posledica 1.20. *Ako niz (x_n) konvergira i $c \in \mathbb{R}$, tada konvergira i niz $(c + x_n)$ i važi*

$$\lim_{n\to\infty}(c + x_n) = c + \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.19 i Primera 1.6. $\blacksquare$

Tvrđenje 1.21. (1.21.1) *Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, onda je $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.*

(1.21.2) *Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, onda je $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.*

(1.21.3) *Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i (y_n) odozdo ograničen niz, onda je $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.*

(1.21.4) *Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ i (y_n) odozgo ograničen niz, onda je $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.*

(1.21.5) *Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$) i $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, onda je $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$ ($\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$).*

Dokaz. (1.21.1): Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, i $M \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Iz $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ sledi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ povlači

$x_n > \dfrac{M}{2}$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ sledi da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, iz $n \geq n_2$ sledi $y_n > \dfrac{M}{2}$. Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ povlači $x_n + y_n > \dfrac{M}{2} + \dfrac{M}{2} = M$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

(1.21.2): Slično dokazu za (1.21.1).

(1.21.3): Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i (y_n) odozdo ograničen niz. Tada postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da je $y_n \geq m$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je $M \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve prirodne brojeve n takve da je $n \geq n_0$ važi $x_n > M - m$. Onda će za svako $n \geq n_0$ važiti $x_n + y_n > (M - m) + m = M$, i prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

(1.21.4): Slično dokazu za (1.21.3).

(1.21.5) sledi iz (1.21.3) i (1.21.4) i činjenice da je svaki konvergentan niz ograničen (Tvrđenje 2.10). ■

Primer 1.22. Na osnovu (1.21.3) sledi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 + \sin\dfrac{n\pi}{2}\right) = +\infty$ jer $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, a niz $\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$ je ograničen, dok na osnovu (1.21.4) imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n + \sin\dfrac{n\pi}{2}\right) = -\infty$, jer je $\lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

Takođe, iz (1.21.3) sledi

$$\lim_{n\to\infty}\left(n + n^{(-1)^n}\right) = +\infty$$

jer je $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, a niz $(n^{(-1)^n})$ ograničen odozdo nulom. •

Posledica 1.23. (1.23.1) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *i* $c \in \mathbb{R}$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty}(c+x_n) = +\infty$.
(1.23.2) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *i* $c \in \mathbb{R}$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty}(c + x_n) = -\infty$.

Dokaz. Sledi iz (1.21.5) i Primera 1.6. ■

Primetimo da ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, u opštem slučaju ne možemo ništa zaključiti o konvergenciji niza $(x_n - y_n)$-ovaj niz može težiti konačnom realnom broju, može težiti $+\infty$ ili $-\infty$, a može se desiti i da nema graničnu vrednost. Na primer, ako je $x_n = n + 2$ i $y_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, onda oba ova niza (x_n) i (y_n) teže ka $+\infty$, a njihova razlika je konstanstantan niz $(x_n - y_n = n + 2 - n = 2,\ n \in \mathbb{N})$ koji konvergira ka 2. Ako je, na primer, $x_n = 2n$ i $y_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = +\infty \ \text{ i } \ \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = -\infty.$$

Ako je $x_n = n + \sin\dfrac{n\pi}{2}$, $y_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (na osnovu (1.21.3)) i $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, ali niz $(x_n - y_n)$ nema graničnu vrednost.

Zato ako nizovi (x_n) i (y_n) teže ka $+\infty$, onda za limes $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)$ kažemo da predstavlja *neodređenost oblika* $\infty - \infty$, a za ispitivanje ovog limesa kažemo da je *razjašnjavanje neodređenosti oblika* $\infty - \infty$. Kažemo još i da je $x_n - y_n$ *neodređeni izraz oblika* $\infty - \infty$ *kad* $n \to \infty$.

Tvrđenja (1.21.1), (1.21.2) i (1.21.5) simbolički zapisujemo (koristeći simbole $+\infty$ i $-\infty$), respektivno, na sledeći način:

$$\begin{aligned}(+\infty) + (+\infty) &= +\infty,\\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty,\\ (+\infty) + y &= +\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\\ (-\infty) + y &= -\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Naime, prva jednakost znači da ako imamo dva niza koja teže ka $+\infty$, onda i njihov zbir teži ka $+\infty$, tj. ova jednakost upravo ilustruje tvrđenje (1.21.1), i td.

Uzimajući ove jednakosti kao definiciju proširenja operacije sabiranja i na beskonačne elemente, možemo pisati da i u slučaju zbira dva niza, od kojih oba određeno divergiraju ka $+\infty$, ili oba određeno divergiraju ka $-\infty$, ili od kojih jedan konvergira, a drugi određeno divergira, važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Definicija 1.24. Za niz koji konvergira ka 0 kažemo da je *nula-niz.*

Tvrđenje 1.25. *Zbir (razlika) dva nula-niza je nula-niz.*

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.19. ■

Tvrđenje 1.26. *Niz* (x_n) *konvergira ka* $x \in \mathbb{R}$ *ako i samo ako postoji nula-niz* (a_n) *takav da je* $x_n = x + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ i $a_n = x_n - x$, $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $|x_n - x| < \varepsilon$, tj. $|a_n| < \varepsilon$. To znači da je (a_n) nula-niz i važi još $x_n = x + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Obrnuto, neka je (a_n) nula-niz i $x_n = x + a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_n = x_n - x$, $n \in \mathbb{N}$, i za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $|a_n| < \varepsilon$, tj. $|x_n - x| < \varepsilon$. To znači da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

Primetimo da smo dokaz mogli izvesti koristeći Tvrđenje 1.19. ■

Tvrđenje 1.27. *Proizvod nula-niza i ograničenog niza je nula-niz.*

Dokaz. Neka je je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i neka je (y_n) ograničen niz. Sledi postoji $M > 0$ tako da je $|y_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ za $n \geq n_0$. Odatle za svako $n \geq n_0$ važi

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$. ■

Primer 1.28. Niz čiji je opšti član $z_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ je nula-niz na osnovu Tvrđenja 1.27, jer je $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ nula-niz, a niz $\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$ je ograničen (videti Primer 1.7). •

Ako je $c \in \mathbb{R}$ i (x_n) nula-niz, onda iz Tvrđenja 1.27 i činjenice da je konstantan niz $y_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, ograničen niz, sledi da je $(x_n y_n) = (c x_n)$ nula-niz.

Važi i opštije tvrđenje:

Tvrđenje 1.29. *Proizvod nula-niza i konvergentnog niza je nula-niz.*

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.27 i Tvrđenja 1.14. ■

Tvrđenje 1.30. *Ako nizovi (x_n) i (y_n) konvergiraju, tada konvergira i niz $(x_n y_n)$ i važi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Dokaz. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Na osnovu Tvrđenja 1.26, sledi da postoje nula-nizovi (α_n) i (β_n) tako da je $x_n = x + \alpha_n$ i $y_n = y + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, i prema tome,

$$x_n y_n = (x + \alpha_n)(y + \beta_n) = xy + x\beta_n + y\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Budući da su $(x\beta_n)$, $(y\alpha_n)$ i $(\alpha_n\beta_n)$ nula-nizovi (Tvrđenje 1.29), na osnovu Tvrđenja 1.25 sledi da je $(x\beta_n + y\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ nula-niz. Sada, ponovo koristeći Tvrđenje 1.26, zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$. ■

Primetimo da obrat Tvrđenja 1.30 ne važi, tj. ukoliko je proizvod dva niza konvergentan, ne mora svaki od njih ponaosob da bude konvergentan. Na primer, proizvod nizova $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ i $\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$ (Primer 1.28) je konvergentan niz, ali $\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$ nije konvergentan niz.

Primetimo još, da ako niz (x_n) teži ka $+\infty$ $(-\infty)$ i ako je (y_n) nula-niz, u opštem slučaju ne možemo ništa zaključiti o konvergenciji niza $(x_n y_n)$-ovaj niz može težiti konačnom realnom broju, može težiti $+\infty$ ili $-\infty$ ili se može desiti da uopšte nema graničnu vrednost.

Na primer, ako je $x_n = n$ i $y_n = \dfrac{5}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 5$.

Ako je $x_n = -n$ i $y_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Za $x_n = n^2$ i $y_n = -\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ i $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

Ako je $x_n = n$ i $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $x_n y_n = (-1)^n$, i niz $(x_n y_n)$ nema granicu.

Zato ako je niz (a_n) nula-niz i niz (b_n) teži ka $+\infty$ $(-\infty)$, onda za limes $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ kažemo da predstavlja *neodređenost oblika* $0\cdot\infty$, a za $a_n\cdot b_n$ da je *neodređeni izraz oblika* $0\cdot\infty$ *kad* $n\to\infty$.

Posledica 1.31. *Ako niz* (x_n) *konvergira i* $c\in\mathbb{R}$*, tada konvergira i niz* (cx_n) *i važi*

$$\lim_{n\to\infty} c\,x_n = c\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.30 i Primera 1.6. ■

Posledica 1.32. *Ako je* $k\in\mathbb{N}$ *i niz* (x_n) *konvergira, tada konvergira i niz* (x_n^k) *i važi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k.$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.30 na osnovu principa matematičke indukcije. ■

Tvrđenje 1.33. (1.33.1) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty$*), onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=+\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=-\infty$*).*

(1.33.2) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ *i* $y_n\ge y>0$ *(*$y_n\le y<0$*) počev od nekog* n*, onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=+\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=-\infty$*).*

(1.33.3) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y\in\mathbb{R}$ *i* $y>0$ *(*$y<0$*), onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=+\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=-\infty$*).*

(1.33.4) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty$*, onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=+\infty$*.*

(1.33.5) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ *i* $y_n\ge y>0$ *(*$y_n\le y<0$*) počev od nekog* n*, onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=-\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=+\infty$*).*

(1.33.6) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y\in\mathbb{R}$ *i* $y>0$ *(*$y<0$*), onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=-\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=+\infty$*).*

Dokaz. (1.33.1): Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty$ i $M>0$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ sledi da postoji $n_1\in\mathbb{N}$ tako da je

$$(\forall n\in\mathbb{N})(n\ge n_1\Longrightarrow x_n>\sqrt{M}). \tag{1.12}$$

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty$ sledi da postoji $n_2\in\mathbb{N}$ tako da je

$$(\forall n\in\mathbb{N})(n\ge n_2\Longrightarrow y_n<-\sqrt{M}),$$

tj.

$$(\forall n\in\mathbb{N})(n\ge n_2\Longrightarrow -y_n>\sqrt{M}). \tag{1.13}$$

Neka je $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Iz (1.12) i (1.13) sledi da za svako $n\in\mathbb{N}$ takvo da je $n\ge n_0$ važi $x_n(-y_n)>M$, tj. $x_ny_n<-M$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=-\infty$.

(1.33.2): Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Pretpostavimo najpre da postoji $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, tako da je $y_n \geq y$ počev od nekog n, tj. postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Longrightarrow y_n \geq y > 0). \tag{1.14}$$

Neka je $M \in \mathbb{R}$ proizvoljan broj. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ sledi da postoji prirodan broj n_2 takav da važi:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_2 \Longrightarrow x_n > \frac{M}{y} > 0). \tag{1.15}$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Iz (1.14) i (1.15) dobijamo da za svaki prirodan broj n takav da je $n \geq n_0$ važi $x_n y_n > M$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i da postoje $y \in \mathbb{R}$, $y < 0$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, iz $n \geq n_1$ sledi $y_n \leq y$. Prema tome,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Longrightarrow -y_n \geq -y > 0). \tag{1.16}$$

Neka je $M > 0$ proizvoljno . Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ sledi da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_2 \Longrightarrow x_n > \frac{M}{-y} > 0). \tag{1.17}$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada iz (1.16) i (1.17) za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ povlači $-x_n y_n > M$, tj. $x_n y_n < -M$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.

(1.33.3): Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo najpore da je $y > 0$. Izaberimo $c > 0$ tako da je $c < y$. Iz Tvrđenja 1.15 sledi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, iz $n \geq n_1$ sledi $y_n > c > 0$. Sada na osnovu (1.33.2) zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

Ako je $y < 0$, onda biramo $c \in \mathbb{R}$ tako da je $y < c < 0$. Na osnovu Tvrđenja 1.15 postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_2$ važi $y_n < c$. Iz (1.33.2) sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$. ■

Tvrđenja (1.33.1), (1.33.3), (1.33.4) i (1.33.6) simbolički zapisujemo (koristeći simbole $+\infty$ i $-\infty$), respektivno, na sledeći način:

$$\begin{aligned}
(+\infty)\cdot(+\infty) &= +\infty,\\
(+\infty)\cdot(-\infty) &= -\infty,\\
(+\infty)\cdot y &= +\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y > 0,\\
(+\infty)\cdot y &= -\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y < 0,\\
(-\infty)\cdot(-\infty) &= +\infty,\\
(-\infty)\cdot y &= -\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y > 0,\\
(-\infty)\cdot y &= +\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y < 0.
\end{aligned}$$

Na primer, prva jednakost znači da ako imamo dva niza koja teže ka $+\infty$, onda i njihov proizvod teži ka $+\infty$, tj. ova jednakost upravo ilustruje tvrđenje (1.33.1), i td.

Uzimajući ove jednakosti za definiciju, tj. ako na ovaj način proširimo operaciju množenja i na beskonačne elemente, možemo pisati da i u slučaju proizvoda dva niza, od kojih oba određeno divergiraju (ka $+\infty$ ili $-\infty$), ili od kojih jedan konvergira ka broju različitom od 0, a drugi određeno divergira, važi jednakost

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Posledica 1.34. (1.34.1) *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *i* $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ *(*$c < 0$*), tada je* $\lim_{n\to\infty} cx_n = +\infty$ *(*$\lim_{n\to\infty} cx_n = -\infty$*).*
(1.34.2) *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *i* $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ *(* $c < 0$*), tada je* $\lim_{n\to\infty} cx_n = -\infty$ *(*$\lim_{n\to\infty} cx_n = +\infty$*).*

Dokaz. (1.34.1): Sledi iz (1.33.2).
(1.34.2): Sledi iz (1.33.5). ■

Posledica 1.35. *Neka je* $k \in \mathbb{N}$.
(1.35.1) *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$*, tada je* $\lim_{n\to\infty} x_n^k = +\infty$.
(1.35.2) *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *i* k *paran (neparan) broj, tada je* $\lim_{n\to\infty} x_n^k = +\infty$ *(*$\lim_{n\to\infty} x_n^k = -\infty$*).*

Dokaz. (1.35.1): Sledi iz (1.33.1) na osnovu principa matematičke indukcije.
(1.35.2): Sledi iz (1.33.4) i (1.33.1) na osnovu principa matematičke indukcije. ■

Tvrđenje 1.36. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$*, tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $|x_n| > \dfrac{|x|}{2}$ *za svako* $n \geq n_0$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$. Tada je $\varepsilon > 0$ i iz $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_n - x| < \varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$ za svako $n \geq n_0$. Kako je

$$|x_n - x| \geq ||x| - |x_n|| \geq |x| - |x_n|,$$

to je $|x| - |x_n| < \dfrac{|x|}{2}$, tj. $|x_n| > \dfrac{|x|}{2}$ za svako $n \geq n_0$. ■

Tvrđenje 1.37. *Ako je* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *i* $x_n \neq 0$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$*, tada je niz* $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ *ograničen.*

Dokaz. Iz Tvrđenja 1.36 sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_n| > \dfrac{|x|}{2}$ za svako $n \geq n_0$, pa je $\dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{2}{|x|}$ za svako $n \geq n_0$. Neka je $M = \max\left\{\dfrac{2}{|x|}, \dfrac{1}{|x_1|}, \ldots, \dfrac{1}{|x_{n_0-1}|}\right\}$. Tada je $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| = \dfrac{1}{|x_n|} \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa je niz $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ ograničen. ■

Tvrđenje 1.38. *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$ *i* $y_n \neq 0$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *tada niz* $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ *konvergira i važi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

Dokaz. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, na osnovu Tvrđenja 1.26, sledi da postoje nula-nizovi (α_n) i (β_n) tako da je $x_n = x + \alpha_n$ i $y_n = y + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, i prema tome,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} = \frac{x+\alpha_n}{y+\beta_n} - \frac{x}{y} = \frac{(x+\alpha_n)y - (y+\beta_n)x}{(y+\beta_n)y} = \frac{y\alpha_n - x\beta_n}{y \cdot y_n}. \tag{1.18}$$

Budući da su $(y\alpha_n)$ i $(x\beta_n)$ nula-nizovi, na osnovu Tvrđenja 1.25 zaključujemo da je $(y\alpha_n - x\beta_n)$ nula-niz. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$, iz Tvrđenja 1.37 sledi da je niz $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ ograničen, i stoga i niz $\left(\dfrac{1}{y \cdot y_n}\right)$. Na osnovu Tvrđenja 1.27 dobijamo da je $\left(\dfrac{y\alpha_n - x\beta_n}{y \cdot y_n}\right)$ nula-niz. Sada, na osnovu (1.18) i Tvrđenja 1.26 zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$. ■

Obrat Tvrđenja 1.38 ne važi, tj. ukoliko je količnik dva niza konvergentan niz, ne mora svaki od njih da bude konvergentan niz. Na primer, za $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$ i $b_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, važi da je količnik $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ konvergentan niz (Primer 1.28), ali oba niza (a_n) i (b_n) divergiraju.

Napomenimo da ako nizovi (x_n) i (y_n) teže ka $+\infty$ $(-\infty)$ (tj. određeno divergiraju), ili ako su oba niza nula-nizovi, u opštem slučaju ne možemo ništa zaključiti o konvergenciji niza $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$-ovaj niz može konvergirati, ali može biti i divergentan.

Na primer, ako je $x_n = n^2$ i $y_n = -3n$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = 0$.

Neka je $a_n = 2 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a_n = \begin{cases} 3, & n = 2k, \\ 1, & n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

i za $x_n = a_n \cdot n = (2 + (-1)^n)n$, budući da je $a_n \geq 1 > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, na osnovu (1.33.2) zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Ako je $y_n = n$, tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, ali $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ne postoji.

Za nula-nizove $\left(\dfrac{4}{n}\right)$ i $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 4n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4n} = 0$, dok niz $((-1)^n)$, količnik nula nizova $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ i $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, nema graničnu vrednost.

Zbog toga, ako niz (x_n) teži ka $+\infty$ ili ka $-\infty$, a takođe i niz (y_n) teži ka $+\infty$ ili ka $-\infty$, za limes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ kažemo da predstavlja *neodređenost oblika* $\dfrac{\infty}{\infty}$, a za količnik $\dfrac{x_n}{y_n}$ da je neodređeni izraz oblika $\dfrac{\infty}{\infty}$ kad $n \to \infty$. Ako su (x_n) i (y_n) nula-nizovi, onda za limes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ kažemo da je *neodređenost oblika* $\dfrac{0}{0}$, a za količnik $\dfrac{x_n}{y_n}$ da je neodređeni izraz oblika $\dfrac{0}{0}$ kad $n \to \infty$.

Tvrđenje 1.39. *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$*), onda je* $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ *nula-niz.*[3]

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ iz $n \geq n_0$ sledi $y_n > \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, odakle imamo da je $0 < \dfrac{1}{y_n} < \varepsilon$, i prema tome, $|\dfrac{1}{y_n}| < \varepsilon$. Sledi $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ je nula-niz.

Neka je sada $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ iz $n \geq n_0$ sledi $y_n < -\dfrac{1}{\varepsilon} < 0$, odakle imamo da je $0 > \dfrac{1}{y_n} > -\varepsilon$. Dakle, za $n \geq n_0$ važi nejednakost

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| = -\frac{1}{y_n} < \varepsilon.$$

Prema tome, $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ je nula-niz. ■

Posledica 1.40. (1.40.1) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$*) i* (x_n) *ograničen niz, onda je* $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ *nula-niz.*

(1.40.2) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$*) i* (x_n) *konvergentan niz, onda je* $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ *nula-niz.*[4]

[3] Tvrđenje 1.39 simbolički zapisujemo:

$$\frac{1}{+\infty} = 0,$$
$$\frac{1}{-\infty} = 0.$$

[4] Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, tvrđenje (1.40.2) simbolički zapisujemo:

$$\begin{aligned} \frac{x}{+\infty} &= 0, \\ \frac{x}{-\infty} &= 0, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dokaz. (1.40.1): Sledi iz Tvrđenja 1.39 i Tvrđenja 1.27.

(1.40.2): Sledi iz Tvrđenja 1.39 i Tvrđenja 1.29, odnosno iz (1.40.1) i Tvrđenja 1.14. ■

Napomenimo da ako je (y_n) nula-niz, onda niz $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ ne mora da ima granicu. Na primer, niz (y_n), gde je $y_n = \frac{1}{(-1)^n n}$, $n \in \mathbb{N}$, je nula-niz, ali $\frac{1}{y_n} = (-1)^n n$, i niz $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ nema granicu.

Tvrđenje 1.41. *Neka je (y_n) nula-niz i neka je $y_n > 0$ $(y_n < 0)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ (ili počev od nekog n). Tada je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$ $(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = -\infty)$.*[5]

Dokaz. Neka je $M > 0$ proizvoljno. Kako je $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$ važi $0 < y_n < \frac{1}{M}$. Odavde, $\frac{1}{y_n} > M$ za $n \geq n_0$. Prema tome, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$. ■

Primetimo da s obzirom na definiciju granične vrednosti niza, konvergencija niza ne zavisi od konačno mnogo članova niza. To znači da u radu sa limesima nije uvek potrebno da odgovarajuće osobine nizova koje koristimo budu ispunjene za svako $n \in \mathbb{N}$, već je dovoljno da one važe počev od nekog $n_1 \in \mathbb{N}$.

Tako u formulaciji Tvrđenja 1.38 nije bilo nephodno pretpostaviti da je $y_n \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, jer iz činjenice da je $\lim_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$, na osnovu Tvrđenja 1.15 (ili na osnovu Tvrđenja 1.36) sledi da je $y_n \neq 0$ počev od nekog n. To znači da može da se desi da $\frac{x_n}{y_n}$ ne bude definisano za svako n, ali ipak, budući da je definisano počev od nekog n, govorimo o limesu niza $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Iz istih razloga je u Tvrđenju 1.39 i Posledici 1.40 moguće je izostaviti uslov da je $y_n \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Takođe, u Tvrđenju 1.41 je bilo dovoljno pretpostaviti da je $y_n > 0$ $(y_n < 0)$ počev od nekog $n_1 \in \mathbb{N}$.[6]

Sledeća tvrđenja nam često pojednostavljuju nalaženje limesa nizova.

---

[5] Tvrđenje 1.41 simbolički zapisujemo:

$$\frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

[6] Zaista, neka postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $y_n > 0$ za $n \geq n_1$, i neka je (y_n) nula-niz. Tada za proizvoljno $M > 0$, iz činjenice da je (y_n) nula-niz sledi da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $|y_n| < \frac{1}{M}$ za $n \geq n_2$, te za $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ i svako $n \geq n_0$ važi da je $0 < y_n = |y_n| < \frac{1}{M}$, odakle sledi da je $\frac{1}{y_n} > M$ za svako $n \geq n_0$. Prema tome, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$.

Tvrđenje 1.42. *Neka su dati nizovi* (x_n) *i* (y_n)*, pri čemu je* (x_n) *konvergentan niz. Tada niz* $(x_n + y_n)$ *ima graničnu vrednost ako i samo ako niz* (y_n) *ima graničnu vrednost i važi jednakost:*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{1.19}$$

Pri tome važe ekvivalencije:

(i) *Niz* (y_n) *je konvergentan ako i samo ako je niz* $(x_n + y_n)$ *konvergentan;*

(ii) *Niz* (y_n) *teži ka* $+\infty$ $(-\infty)$ *kad* $n \to \infty$ *ako i samo ako niz* $(x_n + y_n)$ *teži ka* $+\infty$ $(-\infty)$ *kad* $n \to \infty$.

Dokaz. (i): Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ i neka je (y_n) konvergentan niz. Budući da je niz (x_n) konvergentan, iz Tvrđenja 1.19 sledi da je niz $(x_n + y_n)$ konvergentan i da važi jednakost (1.19).

Obrnuto, pretpostavimo da je niz $(x_n + y_n)$ konvergentan. Opet iz konvergencije niza (x_n), na osnovu Tvrđenja 1.19, zaključujemo da je niz $((x_n + y_n) - x_n) = (y_n)$ konvergentan.

(ii): Pretpostavimo sada da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Budući da je niz (x_n) konvergentan, iz Tvrđenja 1.21 (1.21.5) sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = +\infty = x + (+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. Kako je (x_n) konvergentan, to je i niz $(-x_n)$ konvergentan (Posledica 1.31), pa iz Tvrđenja 1.21 (1.21.5) sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}((x_n + y_n) - x_n) = +\infty$.

Slično se dokazuje da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ ako i samo ako je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.
■

Tvrđenje 1.43. *Neka su dati nizovi* (x_n) *i* (y_n) *pri čemu je* (x_n) *konvergentan niz,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Tada niz* $(x_n \cdot y_n)$ *ima graničnu vrednost ako i samo ako niz* (y_n) *ima graničnu vrednost i važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{1.20}$$

Pri tome važe ekvivalencije:

(i) *Niz* (y_n) *je konvergentan ako i samo ako je niz* $(x_n \cdot y_n)$ *konvergentan;*

(ii) *Ako je* $x > 0$, *tada niz* (y_n) *teži ka* $+\infty$ $(-\infty)$ *kad* $n \to \infty$ *ako i samo ako niz* $(x_n \cdot y_n)$ *teži ka* $+\infty$ $(-\infty)$ *kad* $n \to \infty$;

(iii) *Ako je* $x < 0$, *tada niz* (y_n) *teži ka* $+\infty$ $(-\infty)$ *kad* $n \to \infty$ *ako i samo ako niz* $(x_n \cdot y_n)$ *teži ka* $-\infty$ $(+\infty)$ *kad* $n \to \infty$.

Dokaz. (i): Pretpostavimo da je niz (y_n) konvergentan. Budući da je (x_n) konvergentan niz, iz Tvrđenja 1.30 sledi da je niz $(x_n y_n)$ konvergentan i da važi jednakost (1.20).

Obrnuto, pretpostavimo da je niz (x_ny_n) konvergentan. Kako je (x_n) konvergentan niz i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, na osnovu Tvrđenja 1.38 (i komentara nakon Tvrđenja 1.45) sledi da je niz $(y_n) = \left(\dfrac{x_ny_n}{x_n}\right)$ konvergentan.

(ii): Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$.

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Iz Tvrđenja 1.33 ((1.33.3)) sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = +\infty$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = +\infty = x\cdot(+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = +\infty$. Iz Tvrđenja 1.38 sledi da niz $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ konvergira i da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x} > 0$. Kako je $y_n = (x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$, opet iz Tvrđenja 1.33 ((1.33.3)) sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Slično, korišćenjem Tvrđenja 1.33 ((1.33.6)), dokazuje se da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ ako i samo ako je $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = -\infty$, te je stoga $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = -\infty = x\cdot(-\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(iii): Sledi iz Tvrđenja 1.33 ((1.33.3) i (1.33.6)), slično dokazu za (ii). ■

Tvrđenje 1.44. *Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n) pri čemu je (y_n) konvergentan niz, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$. Tada niz $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ ima graničnu vrednost ako i samo ako niz (x_n) ima graničnu vrednost i važi jednakost*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \tag{1.21}$$

Pri tome važe ekvivalencije:

(i) *Niz (x_n) je konvergentan ako i samo ako je niz $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ konvergentan;*

(ii) *Ako je $y > 0$, tada (x_n) teži ka $+\infty$ $(-\infty)$ kad $n \to \infty$ ako i samo ako niz $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ teži ka $+\infty$ $(-\infty)$ kad $n \to \infty$;*

(iii) *Ako je $y < 0$, tada (x_n) teži ka $+\infty$ $(-\infty)$ kad $n \to \infty$ ako i samo ako niz $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ teži ka $-\infty$ $(+\infty)$ kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Iz Tvrđenja 1.38 sledi da niz $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ konvergira i da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{y} \neq 0$. Kako je $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \left(\dfrac{1}{y_n}\cdot x_n\right)$, tvrđenje sledi iz Tvrđenja 1.43. ■

Sledeće tvrđenje, koje ćemo često koristiti, poznato je kao "teorema o lopovu i dva policajca".

Tvrđenje 1.45. *Neka su nizovi* (x_n), (y_n) *i* (z_n) *takvi da za svako* $n \in \mathbb{N}$ *(ili počev od nekog* n*) važi*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \tag{1.22}$$

i neka je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Dokaz. Neka nejednakost (1.22) važi za sve $n \in \mathbb{N}$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Iz (1.23) sledi da postoje $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \text{za svako } n \geq n_1 \tag{1.24}$$

i

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \quad \text{za svako } n \geq n_2. \tag{1.25}$$

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Sada na osnovu (1.22), (1.24) i (1.25) sledi da za svako $n \geq n_0$ važi

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

tj. $y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

Primetimo da je za dokaz prethodnog tvrđenja bilo dovoljno pretpostaviti da (1.22) važi počev od nekog $n_0 \in \mathbb{N}$ jer, ponovimo opet, konvergencija niza ne zavisi od konačno mnogo članova niza.

U sledećem primeru biće nam potrebna Bernulijeva[7] nejednakost:
Ako je $h > -1$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je [8]

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh. \tag{1.26}$$

Primer 1.46. Dokazaćemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0. \tag{1.27}$$

Pretostavimo najpre da je $a > 1$. Tada je $\sqrt[n]{a} > 1$, tj. $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$ i na osnovu Bernulijeve nejednakosti dobijamo

$$a = \left(1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right)^n \geq 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right).$$

---

[7] J. Bernoulli (1654-1705), švajcarski matematičar

[8] Za dokaz ove nejednakosti koristi se princip matematičke indukcije:
Za $n = 1$ nejednakost (1.26) je tačna i petpostavimo da je tačna za neko $n \in \mathbb{N}$. Kako je $1+h > 0$, množeći obe strane nejednakosti (1.26) sa $1 + h$ dobijamo

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+h+nh+nh^2 = 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h,$$

pa je nejednakost (1.26) tačna i za $n + 1$.

Sledi
$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n}, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, iz (1.28) na osnovu Tvrđenja 1.45 sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = 0$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ako je $a = 1$, jednakost (1.27) očigledno važi.

Pretpostavimo sada da je $0 < a < 1$. Tada je $b = \frac{1}{a} > 1$ i prema već dokazanom delu tvđenja imamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Odavde, na osnovu Tvrđenja 1.38, sledi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1. \bullet$$

Primer 1.47. Dokažimo da je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{1.29}$$

Primenom binomne formule dobijamo

$$\begin{aligned} n &= \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n = 1 + n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \ \ldots \\ &> \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2, \end{aligned}$$

i prema tome,
$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}, \ n > 1. \tag{1.30}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} = 0$, iz (1.30) na osnovu Tvrđenja 1.45 sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0$, odakle sledi (1.29). $\bullet$

Tvrđenje 1.48. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva takvi da je*
$$x_n \le y_n \text{ za svako } n \in \mathbb{N}. \tag{1.31}$$

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.
Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i $M \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $x_n > M$ za svako $n \ge n_0$. Iz (1.31) sledi da je $y_n > M$ za svako $n \ge n_0$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Drugi deo tvrđenja se dokazuje analogno. $\blacksquare$

Naravno, za dokaz Tvrđenja 1.48 je bilo dovoljno pretpostaviti da nejednakost (1.31) važi počev od nekog $n \in \mathbb{N}$.

Primer 1.49. Dokazaćemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty, \quad a > 1, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{1.32}$$

Dokazujemo najpre jednakost (1.32) za slučaj $k = 1$. Iz

$$a^n = (1 + (a-1))^n = 1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2$$

sledi

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n-1}{2}(a-1)^2 \tag{1.33}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2}(a-1)^2 = +\infty$, na osnovu Tvrđenja 1.48 iz Posledice (1.33) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty. \tag{1.34}$$

Ako je $k < 1$, tada je $n^k < n$, pa je

$$\frac{a^n}{n^k} \geq \frac{a^n}{n}, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}. \tag{1.35}$$

Iz (1.34) i (1.35), na osnovu Tvrđenja 1.48, sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$.

Dokažimo sada jednakost (1.32) za slučaj $k > 1$. Postoji prirodan broj $m \geq k$ i važi $n^k \leq n^m$, pa je

$$\frac{a^n}{n^k} \geq \frac{a^n}{n^m} = \left(\frac{(\sqrt[m]{a})^n}{n}\right)^m = \left(\frac{b^n}{n}\right)^m, \tag{1.36}$$

gde je $b = \sqrt[m]{a} > 1$. Kako je na osnovu već dokazanog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$, iz (1.35.1) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{b^n}{n}\right)^m = +\infty. \tag{1.37}$$

Sada iz (1.36), (1.37) i Tvrđenja 1.48 sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$. •

Primer 1.50. Ako $k,\ a \in \mathbb{R}, |a| > 1$, onda je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0. \tag{1.38}$$

Zaista, iz (1.32) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n^k} = +\infty,$$

pa iz Tvrđenja 1.39 sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{|a|^n} = 0. \tag{1.39}$$

Budući da je (x_n) nula-niz ako i samo ako je $(|x_n|)$ nula-niz, iz (1.39) sledi (1.38). •

Primer 1.51. Za $k, a \in \mathbb{R},\ k \geq 1,\ a > 0,\ a \neq 1$, dokažimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0. \tag{1.40}$$

Razmotrimo prvo slučaj kada je $a > 1$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i neka je $b = a^\varepsilon$. Kako je $a > 1$, sledi $b = a^\varepsilon > a^0 = 1$. Iz (1.38) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0,$$

pa će postojati $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ važi

$$\frac{1}{b^n} \leq \frac{n}{b^n} < 1.$$

Množenjem sa b^n dobijamo

$$1 \leq n < b^n,$$

tj.

$$1 \leq n < a^{\varepsilon n},$$

i konačno logaritmovanjem dobijamo

$$0 \leq \log_a n < \varepsilon n, \quad \text{za } n \geq n_0.$$

Odavde,

$$0 \leq \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon, \quad \text{za } n \geq n_0, \tag{1.41}$$

što povlači da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0. \tag{1.42}$$

Time smo dokazali da (1.40) važi za slučaj kada je $k = 1$.

Ako je $k > 1$, onda je $n^k \geq n$, pa je $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$, za svako $n \in \mathbb{N}$, i prema tome,

$$0 \leq \frac{\log_a n}{n^k} \leq \frac{\log_a n}{n}, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}. \tag{1.43}$$

Iz (1.42) i (1.43), na osnovu Tvrđenja 1.45, sledi (1.40).

Neka je sada $0 < a < 1$. Onda je $b = \frac{1}{a} > 1$ i na osnovu (1.40) imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^k} = 0.$$

Kako je $\log_b n = \log_{a^{-1}} n = -\log_a n$, to je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\log_b n}{n^k}\right) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^k} = 0. \bullet$$

Napominjemo da (1.40) važi i za slučaj kada je $0 < k < 1$, što ćemo pokazati u sekciji 4.7 (videti komentar nakon Primera 3.71).

S obzirom da za $0 < a < 1$ važi da je $\log_a n < 0$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, to je i $\dfrac{\log_a n}{n^k} < 0$ za $n \geq 2$. Međutim, za $a > 1$ važi da je $\log_a n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, te je i $\dfrac{\log_a n}{n^k} > 0$ za $n \geq 2$. Iz Primera 1.51, komentara nakon ovog primera i Tvrđenja 1.41 sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\log_a n} = -\infty,\ k > 0,\ 0 < a < 1. \tag{1.44}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\log_a n} = +\infty,\ k > 0,\ a > 1. \tag{1.45}$$

Ako za dva niza (a_n) i (b_n), takva da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$, važi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty\ (-\infty)$ (ili, što je u ovom slučaju ekvivalentno[9] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$), onda ćemo reći da je niz (a_n) *beskonačno veliki niz višeg reda u odnosu na niz* (b_n), odnosno da niz (a_n) "brže teži" beskonačnosti od niza (b_n) i pisati $b_n \prec a_n$. Nije teško videti da je ova relacija tranzitivna.

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$ za $k > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = -\infty$ za $0 < a < 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = +\infty$ za $a > 1$, iz (1.44) i (1.45) sledi da je

$$\log_a n \prec n^k,\ \text{za } a > 0,\ k > 0. \tag{1.46}$$

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ za $a > 1$, iz (1.32) sledi da je

$$n^k \prec a^n \text{ za } a > 1,\ k > 0. \tag{1.47}$$

Prema tome, na osnovu (1.46) i (1.47), za $a > 1$ i $k > 0$ važi

$$\log_a n \prec n^k \prec a^n. \tag{1.48}$$

1.4 Monotoni nizovi

Definicija 1.52. Za niz (x_n) kažemo da je *rastući* (*opadajući*) ako je $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) za svako $n \in \mathbb{N}$.

Za niz (x_n) kažemo da je *strogo rastući* (*strogo opadajući*) ako je $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) za svako $n \in \mathbb{N}$.

Za nizove koji su (strogo) rastući ili (strogo) opadajući kažemo da su *monotoni nizovi*.

[9] Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty\ (-\infty)$, onda na osnovu Tvrđenja 1.39 sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$. Obrnuto, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$ i, recimo, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, onda je počev od nekog n, $a_n > 0$ i $b_n < 0$, pa je $\dfrac{b_n}{a_n} < 0$ počev od nekog n. Sada iz Tvrđenja 1.41 sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$.

Na primer, niz $\left(\frac{1}{n}\right)$ opada, dok niz (n^2) raste. Niz $((-1)^n)$ nije monoton, kao ni niz $\left((-1)^n\frac{1}{2^n}\right)$.

Definicija 1.53. Za niz (x_n), supremum skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ se zove *supremum niza* i obeležava sa $\sup\limits_n x_n$, dok se infimum skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ zove *infimum niza* i obeležava sa $\inf\limits_n x_n$.

Na primer,

$$\sup_n \frac{1}{n} = 1, \quad \inf_n \frac{1}{n} = 0,$$
$$\sup_n (-1)^n n = +\infty, \quad \inf_n (-1)^n n = -\infty,$$
$$\sup_n (n^3+1) = +\infty, \quad \inf_n (n^3+1) = 2.$$

Teorema 1.54. *Svaki rastući niz (x_n) koji je odozgo ograničen je konvergentan i*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n.$$

Svaki rastući niz koji nije odozgo ograničen teži ka $+\infty$.

Dokaz. Neka je niz (x_n) rastući i ograničen odozgo. Sledi supremum niza je realan broj. Neka je $\alpha = \sup\limits_n x_n$ i neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je $\alpha - \varepsilon < \alpha$ i da je α najmanja gornja granica skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, sledi da $\alpha - \varepsilon$ nije gornja granica skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zato postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $x_{n_0} > \alpha - \varepsilon$. Kako je niz (x_n) rastući, to je za svako $n \geq n_0$

$$\alpha - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \alpha.$$

Prema tome, za svako $n \geq n_0$ je $|x_n - \alpha| < \varepsilon$, što znači da je niz (x_n) konvergentan i da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha = \sup\limits_n x_n$.

Pretpostavimo da je (x_n) rastući i neograničen odozgo, i neka je $M \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Kako M nije gornja granica skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $x_{n_0} > M$. Budući da je niz (x_n) rastući, to je za svako $n \geq n_0$, $x_n \geq x_{n_0} > M$. Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ■

Teorema 1.55. *Svaki opadajući niz (x_n) koji je odozdo ograničen je konvergentan i*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Svaki opadajući niz koji nije odozdo ograničen teži ka $-\infty$.

Dokaz. Slično dokazu Teoreme 1.54. ■

Napomena 1.56. Iz Teorema 1.54 i 1.55 sledi da svaki rastući (opadajući) niz (x_n), bez obzira na to da li je ograničen odozgo (odozdo) ili ne, ima graničnu vrednost, i da je $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n)$.

Posledica 1.57. *Ako rastući (opadajući) niz nije konvergentan, onda je* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$.

Dokaz. Iz Teoreme 1.54 sledi da ako rastući niz nije konvergentan, onda on nije ograničen odozgo, pa je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Analogno, tvrđenje za opadajuće nizove sledi iz Teoreme 1.55. ■

Posledica 1.58. *Rastući (opadajući) niz je konvergentan ako i samo ako je ograničen odozgo (odozdo).*

Dokaz. Sledi iz Teoreme 1.54 (Teoreme 1.55) i Tvrđenja 1.14. ■

Primer 1.59. Dokazati da niz

$$x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$
$$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \sqrt{2+x_{n-1}}$$

konvergira i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje: Dokažimo indukcijom da je niz (x_n) rastući.

Kako je $f(x) = \sqrt{x}$ strogo rastuća funkcija, to iz $2 < 2+\sqrt{2}$ sledi $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$. Pretpostavimo da je $x_n < x_{n+1}$. Tada je i $2 + x_n < 2 + x_{n+1}$, te je $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}} = x_{n+2}$.

Da bi dokazali da je niz (x_n) konvergentan dovoljno je sada dokazati da je ograničen odozgo. Dokazaćemo indukcijom da je 2 gornja granica ovog niza:

Imamo da je $x_1 = \sqrt{2} < 2$ i pretpostavimo da je $x_n < 2$. Tada je $2 + x_n < 2 + 2 = 4$ i zato je $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{4} = 2$.

Budući da je niz (x_n) rastući i ograničen odozgo, on je konvergentan i označimo sa x njegovu graničnu vrednost. Iz jednakosti $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ sledi jednakosti $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$. Odavde i iz činjenice da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sledi da je i $\lim_{n\to\infty} x_{n-1} = x$ dobijamo $x^2 = 2 + x$, tj. $x^2 - x - 2 = 0$. Sledi $x = \dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ (odbacujemo drugo rešenje $\dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ prethodne kvadratne jenačine) jer je $x \geq 0$ zbog $x_n > 0$. Prema tome, $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. •

Primer 1.60. Neka je $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Dokažimo da je niz (x_n) konvergentan.

Primenom binomne formule dobijamo:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\
&= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ \cdots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ \cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}= \\
&= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ \ldots \\
&\quad \cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}\frac{1}{n^k}+\ \ldots\ +\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}\frac{1}{n^n}= \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots \\
\ldots &\quad +\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n^n}= \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ \ldots \\
&\quad \cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots \\
&\qquad \ldots\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),
\end{aligned}$$

i takođe

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ \ldots \\
&\quad \cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots \\
&\quad \ldots\ +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+ \\
&\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Kako je

$$1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1},\quad \text{za } k=1,2,\ldots,n-1,$$

to je

$$x_n<x_{n+1},\ \text{za svako } n\in\mathbb{N},$$

pa je niz (x_n) rastući.

Ovo smo mogli da pokažemo i primenom Bernulijeve nejednakosti: za $n \geq 2$ važi

$$\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{\frac{(n+1)^n}{n^n}}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^{2n-1}} \\
&= \frac{(n^2-1)^n(n-1)^{-1}}{(n^2)^n n^{-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&> \left(1-\frac{n}{n^2}\right)\frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\frac{n}{n-1} = 1,
\end{aligned}$$

i zato je $x_n > x_{n-1}$.

Sada dokazujemo da je niz (x_n) odozgo ograničen. Primetimo da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$1-\frac{1}{n} < 1, \ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < 1, \ \ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1, \ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < 1,$$

i stoga je,

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}, \quad \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}, \ \ldots$$

$$\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{n!}.$$

Odavde zaključujemo da je

$$x_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \ldots \ \frac{1}{n!}.$$

Kako je $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k > 2^{k-1}$, to je

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}, \ k = 3, \ldots n.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
x_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \ldots \ \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ \ldots \ \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\
&< 1 + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Primetimo još da je $2 = x_1 \leq x_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Prema tome

$$2 \leq x_n < 3, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}. \tag{1.49}$$

Kako je niz (x_n) rastući i odozgo ograničen, na osnovu Teoreme 1.54 on ima konačnu graničnu vrednost: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n x_n \in \mathbb{R}$. Ovoj graničnoj vrednosti dajemo posebno ime:

Definicija 1.61.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Prema tome,

$$e = \sup_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.50}$$

Oznaku e je uveo Ojler[10]. Dokazuje se da je broj e iracionalan.

Iz (1.49), na osnovu Teoreme 1.16, sledi $2 \leq e \leq 3$. Preciznijim procenama nalazi se da je $e = 2,7182818284\ldots$.

Niz $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ je monotono opadajući i odozdo ograničen.

Zaista, za svako $n \in \mathbb{N}$ je $y_n > 0$ i primenom Bernulijeve nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+2}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}(1+\frac{1}{n})^{-1} = \frac{\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+2}}}{\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}}\frac{n}{n+1} \\
&= \frac{((n+1)^2)^{n+2}}{(n(n+2))^{n+2}}\frac{n}{n+1} = \frac{(n^2+2n+1)^{n+2}}{(n(n+2))^{n+2}}\frac{n}{n+1} \\
&= \left(\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1} \\
&> \left(1+\frac{n+2}{n(n+2)}\right)\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

pa je $y_n > y_{n+1}$. Na osnovu Teoreme 1.55 sledi da je niz (y_n) konvergentan i da je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\limits_n y_n \in \mathbb{R}$. Kako je $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. Prema tome,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{1.51}$$

S obzirom da je niz (x_n) strogo rastući, a niz (y_n) strogo opadajući, iz (1.50) i (1.51) sledi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.52}$$

[10]L. Euler (1707-1783), švajcarski matematičar

Primer 1.62. Pokazaćemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \tag{1.53}$$

Neka je $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n > 0$ i

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n. \tag{1.54}$$

Kako je $0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$, to je $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Odavde sledi da je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, i stoga $a_n > a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, niz (a_n) je opadajući i ograničen odozdo nulom, te je na osnovu Teoreme 1.55 konvergentan i postoji $a \in \mathbb{R}$ tako da je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Na osnovu (1.54) imamo $a_{n+1} \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = a_n$. Zato je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, i prema tome, $a \cdot e = a$. Odavde sledi $a(e-1) = 0$. Kako je $e - 1 \neq 0$, to je $a = 0$, što dokazuje jednakost (1.53).

Ovo smo mogli dokazati i na drugačiji način. Naime korišćenjem nejednakosti na levoj strani u (1.52) i principa matematičke indukcije[11] dokazuju se nejednakosti

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odavde dobijamo

$$\frac{1}{e^n} < \frac{n!}{n^n} < e\frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, na osnovu Tvrđenja 1.45 sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \tag{1.55}$$

Iz (1.55), na osnovu Tvrđenja 1.41, sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty. \bullet \tag{1.56}$$

Primer 1.63. Dokažimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 0. \tag{1.57}$$

[11] videti zadatak 37. u udžbeniku I. I. Ljaško, A. K. Boljarčuk, J. G. G. Gaj, G. P. Golovač, *Zbirka zadataka iz matematičke analize, I deo*, Naša knjiga D.O.O. Beograd, 2007.

Neka je $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Sledi $x_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}. \tag{1.58}$$

Kako je $\dfrac{a}{n+1} < 1$ za $n+1 > a$, tj. $n > a-1$, to je $x_{n+1} < x_n$ za $n > a-1$. Neka je $n_0 = \max\{[a-1]+1, 1\} = \max\{[a], 1\}$. Niz $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\ )$ je opadajući i ograničen odozdo nulom, te je na osnovu Teoreme 1.55 konvergentan. Kako konvergenzija niza ne zavisi od konačno mnogo članova niza, sledi da je niz (x_n) konvergentan. Neka je $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. Na osnovu (1.58) imamo $x_{n+1} = x_n \dfrac{a}{n+1}$, te je $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n+1}$, tj. $x = x \cdot 0 = 0$, što dokazuje jednakost (1.57). •

Iz (1.57), na osnovu Tvrđenja 1.41, sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty,\ a > 0. \tag{1.59}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} n! = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} n^n = +\infty$, na osnovu (1.48), (1.59) i (1.56), za $a > 1$ i $k > 0$ važi

$$\log_a n \prec n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n.$$

1.5 Bolcano-Vajerštrasova teorema za nizove

Podsetimo se najpre Kantorovog principa umetnutih odsečaka.

Definicija 1.64. *Neka su*

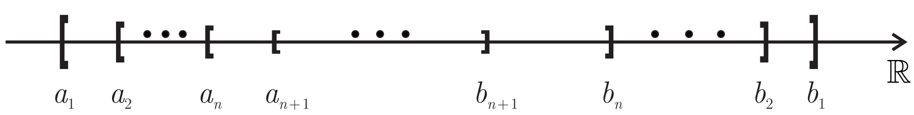
$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots [a_n, b_n], \dots\ , a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

odsečci realne prave. Ako je ispunjen uslov

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le \dots \le b_n \le \dots b_2 \le b_1, \tag{1.60}$$

tj. $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, *onda kažemo da je* $([a_n, b_n])$ *niz umetnutih odsečaka.*

Drugim rečima, $([a_n, b_n])$ je niz umetnutih odsečaka ako je svaki sledeći odsečak $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ sadržan u prethodnom $[a_n, b_n]$.



Teorema 1.65. *(Kantorov[12] princip umetnutih odsečaka) Svaki niz umetnutih odsečaka ima neprazan presek.*

Dokaz. Neka je $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Skup A je odozgo ograničen sa bilo kojim od brojeva b_n, pa na osnovu aksiome supremuma, postoji $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Budući da je b_n gornja granica skupa A za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi

$$\alpha \leq b_n \text{ za svako } n \in \mathbb{N}. \tag{1.61}$$

Prema tome, skup B je odozdo ograničen i na osnovu aksiome infimuma, postoji $\beta = \inf B \in \mathbb{R}$. S obzirom da je β najveća donja granica skupa B, iz (1.61) sledi $\alpha \leq \beta$. Prema tome, važe nejednakosti

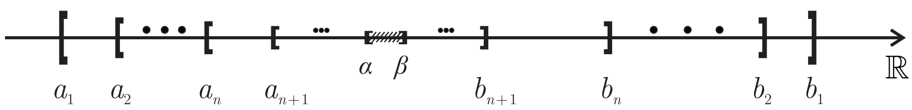
$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.62}$$

Pokažimo da je

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]\,. \tag{1.63}$$

Neka je $x \in [\alpha, \beta]$. Iz (1.62) sledi $a_n \leq \alpha \leq x \leq \beta \leq b_n$ i prema tome, $x \in [a_n, b_n]$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Prema tome, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ je neprazan skup. ■



Napomena 1.66. Za dokaz Teoreme 1.60 dovoljno je bilo dokazati da važi inkluzija (1.63). Međutim može se pokazati da važi i obrnuto inkluzija:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]\,. \tag{1.64}$$

Zaista, neka je $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Tada je $a_n \leq x \leq b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. To znači da je x gornja granica skupa A, a takođe i donja granica skupa B. Zato je $\alpha \leq x$ jer je α kao supremum skupa A njegova najmanja gornja granica, a takođe je i $x \leq \beta$ jer je β kao infimum skupa B njegova najveća donja granica. Prema tome, $x \in [\alpha, \beta]$. Iz (1.63) i (1.64) sledi da važi:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]\,. \ \square \tag{1.65}$$

Definicija 1.67. *Neka je* $([a_n, b_n])$ *niz umetnutih odsečaka. Reći ćemo da dužina odsečaka teži* 0 *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n \in \mathbb{N}$ *tako da je* $b_n - a_n < \varepsilon$.

[12] G. Cantor (1845-1918), nemački matematičar

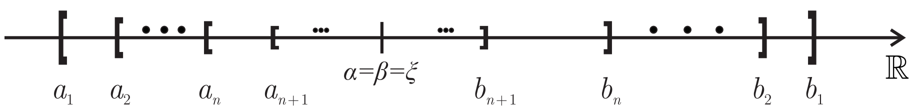
Primetimo da ako je $b_n - a_n < \varepsilon$ za neko $n \in \mathbb{N}$, onda je i $b_m - a_m < \varepsilon$ za svako $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ (zbog $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$ je $b_m - a_m \leq b_n - a_n$).

Teorema 1.68. *Neka je* $([a_n, b_n])$ *niz umetnutih odsečaka čija dužina teži* 0. *Tada postoji jedinstvena tačka* ξ *koja pripada svim odsečcima, i pri tom je*

$$\xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.66}$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Budući da dužina odsečaka teži 0, to postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $b_n - a_n < \varepsilon$. Iz nejednakosti (1.62) sledi da je $\beta - \alpha \leq b_n - a_n$, pa je $0 \leq \beta - \alpha < \varepsilon$. Odavde sledi da je $\alpha = \beta$. Zaista ako bi $\beta > \alpha$, tada bi, budući da je $\beta - \alpha < \varepsilon$ za svako $\varepsilon > 0$, uzimajući da je u ovoj nejednakosti $\varepsilon = \beta - \alpha$, dobili $\beta - \alpha < \beta - \alpha$, što je nemoguće. Neka je $\xi = \alpha = \beta$. Iz (1.65) sledi

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\xi\}. \blacksquare \tag{1.67}$$



Primer 1.69. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. U dokazima nekih narednih tvrđenja koristićemo sledeću konstrukciju niza umetnutih odsečaka čija dužina teži 0. Odsečak $[a, b]$ podelimo tačkom $\frac{a+b}{2}$ na dva jednaka po dužini odsečka $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ i $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Njihova dužina je $\frac{b-a}{2}$. Izaberimo jedan od ta dva odsečka (kriterijum za izbor biće određen konkretnim zadatkom) i označimo ga sa $[a_1, b_1]$. Sada ovoj odsečak srednjom tačkom $\frac{a_1+b_1}{2}$ delimo na dva jednaka po dužini odsečka i jedan od njih obeležimo sa $[a_2, b_2]$. Nastavljajući postupak dobijamo niz umetnutih odsečaka:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

gde je dužina n-tog odsečka $\frac{b-a}{2^n}$. Pokažimo da dužina ovih odsečaka teži 0. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Iz

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots > n$$

sledi $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Za zadato $\varepsilon > 0$ na osnovu Arhimedovog principa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > \frac{b-a}{\varepsilon}$, pa je $\frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon$. •

Definicija 1.70. Neka je $a : \mathbb{N} \to A$ niz elemenata skupa A i neka je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, tj. neka je

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \dots \quad .$$

Tada se niz $a \circ n : \mathbb{N} \to A$, tj.

$$(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \dots \quad),$$

naziva *podniz* niza (a_n) ili *delimični niz* niza (a_n).

Na primer, niz $(2, 4, 6, \dots, 2n, \dots \quad)$ je podniz niza prirodnih brojeva $(1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad)$. Međutim niz $(4, 2, 6, \dots, 2n, \dots \quad)$ nije podniz niza prirodnih brojeva.

Trivijalno, i sam niz (a_n) je podniz niza (a_n).

Primetimo da ako je (a_{n_k}) podniz niza (a_n), onda je $n_k \geq k$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i na osnovu Tvrđenja 1.48 sledi

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty. \tag{1.68}$$

Teorema 1.71. *(Bolcano-Vajerštrasova teorema za nizove)*

Svaki ograničen niz ima konvergentan podniz.

Svaki niz koji nije odozgo ograničen ima podniz koji teži ka $+\infty$. Svaki niz koji nije odozdo ograničen ima podniz koji teži ka $-\infty$.

Dokaz. Neka je niz (x_n) ograničen. Tada postoji segment $[a, b]$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, takav da je $x_n \in [a, b]$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Podelimo ovaj segment na dva jednaka po dužini segmenta. U bar jednom od tako dobijenih segmenata se nalazi beskonačno mnogo članova niza (x_n). Označimo sa $[a_1, b_1]$ onaj u kome se nalazi beskonačno mnogo članova niza (x_n) i izaberimo jedan član x_{n_1} koji pripada ovom segmentu.

Podelimo opet segment $[a_1, b_1]$ na dva jednaka po dužini segmenta i sa $[a_2, b_2]$ označimo onaj u kome se nalazi beskonačno mnogo članova niza (x_n). Izaberimo sada $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ ali tako da je $n_1 < n_2$. Nastavljajući tako postupak, dobijamo niz umetnutih segmenata $([a_k, b_k])$ čija dužina $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ teži 0. Takođe dobijamo i niz (x_{n_k}) takav da je $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ i $n_{k_1} < n_{k_2}$ za $k_1 < k_2$. Prema tome, niz (x_{n_k}) je podniz niza (x_n). Na osnovu Kantorovog principa o umetnutim segmentima (Teorema 1.66) postoji jedinstven broj ξ takav da je $\{\xi\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$. Pri tom je $\xi = \sup_k a_k = \inf_k b_k$. Kako je niz (a_k) rastući, a niz (b_k) opadajući, iz Teorema 1.54 i 1.55 sledi

$$\xi = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k. \tag{1.69}$$

Kako je $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$, iz (1.69), a na osnovu Tvrđenja 1.45, sledi $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. Ovim smo dokazali da niz (x_n) ima konvergentan podniz.

Pretpostavimo da niz (x_n) nije ograničen odozgo. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_1} > 1$. Niz $(x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, x_{n_1+3}, \dots \quad)$ takođe nije ograničen odozgo jer je dobijen od niza (x_n) odbacivanjem konačno mnogo članova. Zato postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_2 > n_1$ i $x_{n_2} > 2$. Nastavljajući postupak dobijamo niz (n_k) takav da je

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$$

i

$$x_{n_1} > 1,\ x_{n_2} > 2,\ \ldots\ , x_{n_k} > k, \ldots\ .$$

Iz Tvrđenja 1.48 sledi $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Ako niz (x_n) nije ograničen odozdo, analogno se dokazuje da postoji podniz (x_{n_k}) niza (x_n) koji teži ka $-\infty$. ∎

1.6 Košijev kriterijum konvergencije nizova

U ovoj sekciji govorimo o načinu da utvrdimo da li je neki niz konvergentan, koristeći se samo poznavanjem elemenata niza, a ne znajući unapred ka kojoj bi graničnoj vrednosti on konvergirao.

Definicija 1.72. Za niz (x_n) kažemo da je *Košijev*[13], ili da ispunjava *Košijev uslov* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_m - x_n| < \varepsilon$ za sve indekse m i n veće ili jednake od n_0, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,\ m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon). \tag{1.70}$$

Uslov (1.70) se može formulisati i na sledeći način:

Za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 tako da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$ i svaki nenegativan ceo broj p važi $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Primetimo da konvergentan niz ima svojstvo da se njegovi članovi sa sve većim indeksima sve manje razlikuju od granične vrednosti, pa prema tome i jedan od drugog, tj. takav niz ispunjava Košijev uslov. Interesantno je da važi i obrat, i to ćemo preciznije iskazati sledećom teoremom.

Teorema 1.73. *(Košijev kriterijum konvergencije) Niz (x_n) je konvergentan ako i samo ako je Košijev.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$): Neka je (x_n) konvergentan niz i neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je za svako $n \geq n_0$ važi $|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tada za sve $m, n \geq n_0$ važi

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) - (x_n - x)| \leq |x_m - x| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema tome, niz (x_n) je Košijev.

($\Longleftarrow$): Neka je (x_n) Košijev niz. Pokažimo da je (x_n) ograničen niz. Za $\varepsilon = 1$ postojaće $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $m, n \geq n_0$ važi $|x_m - x_n| < 1$. Prema tome, za sve

[13] A. L. Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

$m \geq n_0$ važi $|x_m - x_{n_0}| < 1$. Neka je $M = \max\{|x_1 - x_{n_0}|, |x_2 - x_{n_0}|, \ldots, |x_{n_0-1} - x_{n_0}|, 1\}$. Tada je $|x_n - x_{n_0}| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. $x_n \in [x_{n_0} - M, x_{n_0} + M]$. Prema tome, (x_n) je ograničen niz.

Sada na osnovu Teoreme 1.71 sledi da niz (x_n) ima konvergentan podniz (x_{n_k}). Neka je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Pokazaćemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Budući da je niz (x_n) Košijev, postojaće $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za sve $m, n \geq n_0$, $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, sledi da postoji $k_1 \in \mathbb{N}$ tako da za $k \geq k_1$ važi $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Iz (1.68) sledi da postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $n_k > n_0$ za sve $k \geq k_2$. Izaberimo sada jedno $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $k \geq \max\{k_1, k_2\}$. Važiće da je

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad n_k > n_0.$$

Sada za svako $n \geq n_0$ važi

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema tome, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. ■

Primer 1.74. Pokažimo da niz $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ divergira, time što ćemo pokazati da nije Košijev, tj. pokazaćemo da važi negacija uslova (1.70), tj. uslov:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \wedge |x_m - x_n| \geq \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ i $m = 2n$ važi:

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} > n\frac{1}{n+n} = \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

pa niz (x_n) nije Košijev.

Primetimo još da, budući da je niz (x_n) rastući i nije konvergentan, iz Posledice 1.57 sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. •

Primer 1.75. Neka je $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Pokazaćemo da je niz (x_n) konvergentan.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada za $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, važi

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Kako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (možemo uzeti $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$), to za sve $m, n \geq n_0$, $m \geq n$, važi $|x_m - x_n| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, pa je niz (x_n) Košijev. Na osnovu Teoreme 1.73 sledi da je (x_n) konvergentan[14]. $\bullet$

[14]Granična vrednost ovog niza je $\frac{\pi^2}{6}$ (videti zadatak 70. na 37. strani udžbenika: R. Dimitrijevic, *Zbirka zadataka iz teorije polinoma*, Nis, 2007.).

Glava 2

Granične vrednosti funkcija

2.1 Pojam granične vrednosti

Dogovorimo se da ako je $U(x_0)$ okolina tačke $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, onda sa $\overset{\circ}{U}(x_0)$ označavamo skup

$$\overset{\circ}{U}(x_0) = U(x_0) \backslash \{x_0\},$$

i zovemo ga probodena okolina tačke x_0. Tako, ako je $x_0 \in \mathbb{R}$, pod *probodenom δ okolinom tačke x_0* podrazumevamo skup $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$. Jasno je da $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ ako i samo ako $0 < |x - x_0| < \delta$. Interval $(x_0 - \delta, x_0)$ $((x_0, x_0 + \delta))$ zvaćemo leva (desna) δ okolina tačke x_0.

Ako je x_0 beskonačna tačka, onda se pojam okoline tačke x_0 i probodene okoline tačke x_0 poklapaju, tj. pod probodenom okolinom tačke $+\infty$ $(-\infty)$ podrazumevamo interval $(M, +\infty)$ $((-\infty, M))$, $M \in \mathbb{R}$.

Definicija 2.1. *(Cauchy) Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0. Broj A je granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako x iz probodene δ okoline tačke x_0 važi $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, tj. $|f(x) - A| < \varepsilon$:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon), \tag{2.1}$$

i pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Iz definicije sledi da se za svaku ε okolinu tačke A, $U_\varepsilon(A)$, može naći probodena δ okolina tačke x_0, $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, koja se sa f slika u $U_\varepsilon(A)$ $(f(\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(A))$. To znači da se vrednosti funkcije f sve više približavaju broju A ukoliko se promenljiva x približava broju x_0.

Primer 2.2. Ako je $f(x) = x^2$, dokazati da je $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Kako je

$$|f(x)-4| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |(x-2)((x-2)+4)| \leq |x-2|(|x-2|+4)$$

za $|x-2| < \delta$ imamo

$$|f(x)-4| < \delta(\delta+4).$$

Ako se uzme

$$\delta(\delta+4) = \varepsilon, \tag{2.2}$$

onda je $\delta = -2+\sqrt{4+\varepsilon}$ (jer ono drugo rešenje koje se dobija iz jednačine (2.2) je negativno, $\delta = -2-\sqrt{4+\varepsilon}$, i ne dolazi u obzir) i za $|x-2| < \delta$ sledi $|f(x)-4| < \varepsilon$. •

Definicija 2.3. *(Heine) Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0. Broj A je granična vrednost funkcije f u tački x_0 (ili kad x teži ka x_0), ako za svaki niz $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, koji konvergira ka x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, niz $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka A, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, i tada pišemo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.*

Primer 2.4. Ako je $f(x) = \dfrac{-x^2+5x-6}{x-2}$, da li funkcija f ima graničnu vrednost u tački -1?

Neka je $(x_n)_n$ proizvoljan niz takav da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$ i $x_n \neq -1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-x_n^2+5x_n-6}{x_n-2} = \frac{-(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2 + 5\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 6}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n - 2} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(pri tom smo uzeli da je $x_n \neq 2$ za svako $n \in \mathbb{N}$, jer za $x=2$ funkcija nije definisana). Dakle, postoji $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 4$ i kako ne zavisi od izbora niza $(x_n)_n$ koji konvergira ka -1, to potoji $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 4$. •

Teorema 2.5. *Definicije 2.1 i 2.3 granične vrednosti funkcije u datoj tački su ekvivalentne.*

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ u smislu Definicije 2.3. Tada je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ tačke x_0 i za svaki niz $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$ koji konvergira ka x_0 važi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Dokazujemo da važi (2.1). Prepostavimo suprotno, tj. da važi:

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta)(0 < |x_\delta - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0). \tag{2.3}$$

Iz (2.3) sledi da za $\delta = \dfrac{\delta_0}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ postoji x_n tako da je

$$|x_n - x_0| < \frac{\delta_0}{n},\ x_n \neq x_0,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2.4}$$

i

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0, \ n = 1, 2, \ldots . \tag{2.5}$$

Na osnovu (2.4) sledi da $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, a na osnovu (2.5) da broj A ne može biti granična vrednost niza $(f(x_n))_n$, što protivureči Definiciji 2.3. Dobijena protivurečnost dokazuje da važi (2.1).

Obrnuto, pretpostavimo da je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ u smislu Definicije 2.1. Tada je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0 i važi uslov (2.1). Neka je

$$x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0), \ n \in \mathbb{N} \text{ i } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{2.6}$$

Pokažimo da funkcija f ispunjava uslove Definicije 2.3, tj. da važi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{2.7}$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, izaberimo $\delta > 0$ koje zadovoljava uslov (2.1). Za to δ, na osnovu (2.6), postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Iz uslova (2.1) sledi da za $n \geq n_0$ važi $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, što zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ implicira (2.7). ■

Definicija 2.6. *Neka je funkcija f definisana na intervalu (a, x_0) ((x_0, b)). Broj A je leva (desna) granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svako x koje ispunjava uslov $x_0 - \delta < x < x_0$ ($x_0 < x < x_0 + \delta$) važi $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, tj. $|f(x) - A| < \varepsilon$, i pišemo*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \text{ ili } A = f(x_0 - 0)$$

$$(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \text{ ili } A = f(x_0 + 0)).$$

U slučaju $x_0 = 0$ umesto $x \to 0 + 0$ ($x \to 0 - 0$) pišemo jednostavno $x \to +0$ ($x \to -0$).

Analogno dokazu Teoreme 2.5, pokazuje se da je ova definicija ekvivalentna sledećoj:

Definicija 2.7. *Neka je funkcija f definisana na intervalu (a, x_0) ((x_0, b)). Broj A nazivamo levom (desnom) graničnom vrednošću funkcije f u tački x_0 ako za svaki niz $(x_n)_n$ takav da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $a < x_n < x_0$ ($x_0 < x_n < b$), niz $(f(x_n))_n$ konvergira ka A, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

Primer 2.8. Neka je $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Pokazaćemo da ova funkcija nema ni desnu ni levu graničnu vrednost u 0.

Neka je $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{6} + 2n\pi}$, $z_n = -x_n$ i $z'_n = -x'_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Jasno, $x_n > 0$, $x'_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$, $f(x_n) = 0$, $f(x'_n) = \dfrac{1}{2}$. Zato $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \dfrac{1}{2}$ i stoga, na osnovu Definicije 2.7, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ ne postoji.

Slično, $z_n < 0$, $z'_n < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z'_n = 0$, $f(z_n) = 0$, $f(z'_n) = -\frac{1}{2}$. Sledi $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(z'_n) = -\dfrac{1}{2}$ i stoga $\lim\limits_{x\to-0} f(x)$ ne postoji.

Na osnovu Definicije 2.3 zaključujemo da ne postoji ni $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. •

Primer 2.9. Neka je $f(x) = \mathrm{sgn} x$. Pokazaćemo da ova funkcija ima levu i desnu graničnu vrednost u 0, ali da se one razlikuju.

Neka je $x_n > 0$, $x'_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{sgn} x_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{sgn} x'_n = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,$$

i stoga je

$$\lim_{x\to+0} \mathrm{sgn} x = 1 \text{ i } \lim_{x\to-0} \mathrm{sgn} x = -1.$$

Takođe sledi da $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sgn} x$ ne postoji. •

Teorema 2.10. *Funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 ako i samo ako ona ima i levu i desnu graničnu vrednost u tački x_0 i ako su one jednake.*

Dokaz. Neka je $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za svako x koje zadovoljava uslove $|x - x_0| < \delta$ i $x \neq x_0$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. To znači da za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, kao i $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Na osnovu Definicije 2.6 zaključujemo da funkcija f ima i levu i desnu graničnu vrednost u tački x_0 i ako su one jednake A.

Obrnuto, pretpostavimo da važi

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A. \tag{2.8}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Na osnovu (2.8) postoji $\delta_1 > 0$ tako da za svako x takvo da je $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Takođe postoji $\delta_2 > 0$ tako da za svako x takvo da je $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i $x \neq x_0$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. Prema tome, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. (Tvrđenje se slično dokazuje za slučaj beskonačnih graničnih vrednosti.) ■

Primer 2.11. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 1 \\ \frac{1}{2}\ , & x = 1 \\ x^2\ , & x > 1 \end{cases}$$

Tada je

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x - 3) = -2,$$

i

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} x^2 = 1.$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ne postoji. •

Definicija 2.12. *Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0. Kažemo da je $+\infty$ granična vrednost funkcije f kad x teži ka x_0 i pišemo*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\}$ važi $f(x) > \varepsilon$.

Ova definicija je ekvivalentna sledećoj:

Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0. Kažemo da je $+\infty$ granična vrednost funkcije f kad x teži ka x_0 ako za svaki niz takav da $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, važi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Slično se uvode sledeći pojmovi:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Primer 2.13. Dokažimo da je

$$\lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ i } \lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Za $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$ i $x \in (0, \delta)$, važi $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\delta} = \varepsilon$. Na osnovu Definicije 2.12 sledi $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Slično se dokazuje da je $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$. •

Definicija 2.14. *Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini $+\infty$, $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$. Kažemo da je A granična vrednost funkcije f kad x teži ka $+\infty$ i pišemo*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji δ tako da za svako $x > \delta$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Ova definicija je ekvivalentna sledećoj:

Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini $+\infty$, $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$. Kažemo da je A granična vrednost funkcije f kad x teži ka $+\infty$ ako za svaki niz takav da $x_n > M$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, važi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Na sličan način se uvodi pojam:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = A.$$

Primer 2.15. Da li postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$?

Neka je $x_n = 2n\pi$ i $x'_n = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x'_n = \dfrac{1}{2}$, sledi da $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ ne postoji. •

Primetimo sada da smo definiciju granične vrednosti funkcije f u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ mogli dati i na sledeči način:

Definicija 2.16. *(Cauchy)* Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Za $b \in \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je *granična vrednost funkcije f u tački x_0* (ili kad x teži ka x_0) ako za svaku okolinu $V(b)$ tačke b postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi da je $f(x) \in V(b)$:

$$(\forall V(b))(\exists U(x_0))(\forall x)(x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \Longrightarrow f(x) \in V(b)),$$

i pišemo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b.$$

Prema tome, sada možemo pisati:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \Longleftrightarrow (\forall V(b))(\exists U(x_0)) f(\overset{\circ}{U}(x_0)) \subset V(b).$$

Primetimo da u ovoj definiciji granične vrednosti funkcije f, tačke x_0 i b mogu biti konačni brojevi, $+\infty$ ili $-\infty$. Za svaki od ovih slučajeva ponaosob mi smo već (u prethodom tekstu) dali operativniju definiciju granične vrednosti funkcije (vidi Definicije 2.1, 2.12, 2.14).

Primer 2.17. Dokažimo da je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.9}$$

Pokažimo najpre da za svaki niz prirodnih brojeva $(n_k)_k$ takav da

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \tag{2.10}$$

važi

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{2.11}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Iz (2.10) sledi da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $k \geq k_0$ važi $n_k > n_0$, te zbog (2.12) dobijamo $\left|\left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon$. Ovim smo dokazali jednakost (2.11).

Neka je sada $(x_k)_k$ proizvoljan niz realnih brojeva koji teži ka $+\infty$. Ne umanjujući opštost dokaza možemo pretpostaviti da je $x_k \geq 1$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Da bismo dokazali prvu jednakost u (2.9), na osnovu Heineove definicije granične vrednosti funkcija, dovoljno je dokazati da je

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e. \tag{2.13}$$

Neka je $n_k = [x_k]$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $n_k \in \mathbb{N}$ i važi

$$n_k \leq x_k < n_k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Kako je $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, to je $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - 1) = +\infty$ na osnovu (1.21.5). Sada iz nejednakosti $n_k > x_k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, na osnovu Tvrđenja 1.48 zaključujemo da je $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Iz (2.14) sledi $\dfrac{1}{n_k+1} < \dfrac{1}{x_k} \leq \dfrac{1}{n_k}$ i stoga

$$1+\frac{1}{n_k+1} < 1+\frac{1}{x_k} \leq 1+\frac{1}{n_k}. \tag{2.15}$$

Iz (2.14) i (2.15) sledi

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{2.16}$$

Kako je

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} = \frac{e}{1} = e$$

i

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e\cdot 1 = e,$$

iz nejednakosti (2.16) i Teoreme 1.45 dobijamo (2.13).

Neka je sada $(x_k)_k$ niz realnih brojeva koji teži ka $-\infty$. Možemo pretpostaviti da je $x_k \leq -1$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Da bismo dokazali drugu jednakost u (2.9) dovoljno je dokazati da važi (2.13).

Neka je $y_k = -x_k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je $y_k \geq 1$ i $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = +\infty$, te je

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} &= \left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k-1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k} = \\ &= \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k} = \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right).\end{aligned}$$

Kako je na osnovu već dokazanog

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}=e,$$

to je i

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)=e.$$

Prema tome, važi $\lim_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e$. Kako je (x_k) proizvoljan niz realnih brojeva koji teži ka $-\infty$, na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije, sledi da važi druga jednakost u (2.9). •

2.2 Osobine graničnih vrednosti funkcija

Naredna tvrđenja su iskazana za slučaj dvostrane granične vrednosti, ali ona važe i u slučaju jednostranih graničnih vrednosti, s tim što bi u tom slučaju termin probodena okolina bio zamenjen terminom leva odnosno desna okolina.

S obzirom da se pojam granične vrednosti funkcija svodi na graničnu vrednost niza, osobine graničnih vrednosti nizova se prenose i na granične vrednosti funkcija. Naredna tvrđenja se mogu dokazati kako korišćenjem odgovarajućih tvrđenja za nizove, tako i "na jeziku okolina".

Tvrđenje 2.18. *Ako postoji granična vrednost funkcije f u tački $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, onda je ona jedinstvena.*

Dokaz. Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ i neka f ima dve različite granične vrednosti b i b_1 u tački x_0 $(b,b_1\in\overline{\mathbb{R}})$. Tada postoje okoline $V(b)$ i $W(b_1)$ tačaka b i b_1, respektivno, koje su disjunktne. Kako je $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b$, sledi da postoji okolina $U_1(x_0)$ tačke x_0 tako da je $f(\overset{\circ}{U}_1(x_0))\subset V(b)$. Takođe, iz $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b_1$ sledi da postoji okolina $U_2(x_0)$ tačke x_0 tako da je $f(\overset{\circ}{U}_2(x_0))\subset W(b_1)$. Za okolinu $U(x_0)=U_1(x_0)\cap U_2(x_0)$ tačke x_0 važi da je $f(\overset{\circ}{U}(x_0))\subset V(b)\cap W(b_1)$, što protivureči činjenici da su okoline $V(b)$ i $W(b_1)$ disjunktne. ■

Definicija 2.19. Za funkciju $f:X\to\mathbb{R}$ kažemo da je *ograničena odozgo (odozdo)* ako je ograničen odozgo (odozdo) skup njenih vrednosti $\{f(x):x\in X\}$, tj. ako postoji $M\in\mathbb{R}$ tako da je $f(x)\le M$ $(f(x)\ge M)$ za svako $x\in X$. Funkcija je ograničena ako je ograničena odozgo i odozdo.

Tvrđenje 2.20. *Ako funkcija f ima konačnu graničnu vrednost u tački $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, onda je ona ograničena u nekoj probodenoj okolini tačke x_0.*

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Na osnovu definicije granične vrednosti funkcije, za $\varepsilon = 1$ postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0 tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ važi $|f(x) - A| < 1$, tj. $A - 1 < f(x) < A + 1$. Ovo znači da je funkcija f ograničena u probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0. ■

Tvrđenje 2.21. *Neka je $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = c$ i $b < c$. Tada postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0, takva da je $f(x) < g(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.*

Dokaz. Ako su b i c konačni brojevi, neka je $\varepsilon = \dfrac{c-b}{2}$, i neka je $V(b)$ ε-okolina tačke b i $W(c)$ ε-okolina tačke c. Jasno je da je za svako $s \in V(b)$ i svako $t \in W(c)$ važi nejednakost $s < t$. Slično ako je jedna od tačaka b ili c beskonačna, mogu se naći okolina $V(b)$ tačke b i okolina $W(c)$ tačke c, tako da za bilo koje $s \in V(b)$ i bilo koje $t \in W(c)$ važi $s < t$.

Iz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ sledi da postoji okolina $U_1(x_0)$ tako da je $f(\overset{\circ}{U}_1(x_0)) \subset V(b)$. Takođe, iz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = c$ sledi da postoji $U_2(x_0)$ tako da je $g(\overset{\circ}{U}_2(x_0)) \subset W(c)$. Neka je $U(x_0) = U_1(x_0) \cap U_2(x_0)$. Tada za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi $f(x) \in V(b)$ i $g(x) \in W(c)$, pa je $f(x) < g(x)$. ■

Posledica 2.22. *Neka je $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b < c$. Tada postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0, takva da je $f(x) < c$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.*

Analogno tvrđenje važi ako se relacijski znak $<$ zameni znakom $>$.

Dokaz. Ako uzmemo da je $g(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, onda je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = c$, pa je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Na osnovu Tvrđenja 2.21 sledi da postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0, takva da je $f(x) < g(x) = c$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. ■

Posledica 2.23. *Ako funkcija f u tački x_0 ima graničnu vrednost različitu od 0, onda funkcija ima isti znak kao i ta granična vrednost u nekoj probodenoj okolini tačke x_0.*

Dokaz. Sledi iz Posledice 2.22 (za slučaj kada je $c = 0$). ■

Tvrđenje 2.24. *Neka je za neku probodenu okolinu $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, ispunjeno $g(x) \leq f(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ i neka postoje (konačne ili beskonačne) granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Tada je*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \leq \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Iz Tvrđenja 2.21 sledi postoji okolina $U_1(x_0)$ tačke x_0, takva da je $f(x) < g(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$. Za okolinu

$U_2(x_0) = U(x_0) \cap U_1(x_0)$ tačke x_0 ispunjeno je da za sve $x \in \overset{\circ}{U}_2(x_0)$ istovremeno važe nejednakosti $f(x) < g(x)$ i $f(x) \geq g(x)$, što je apsurd. Dobijena protivurečnost dokazuje da je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ■

Tvrđenje 2.25. *Neka je za neku probodenu okolinu $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, ispunjeno $c \leq f(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ i neka postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Tada je $c \leq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.*

Analogno tvrđenje važi ako se znak $\leq$ zameni znakom $\geq$.

Dokaz. Ako uzmemo da je $g(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, onda funkcije f i g ispunjavaju uslove Tvrđenja 2.24, odakle sledi da je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, tj. $c \leq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. ■

Tvrđenje 2.26. *Neka je za neku probodenu okolinu $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, ispunjeno $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ i neka postoje (konačne ili beskonačne) granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x)$ koje su međusobno jednake. Tada postoji i granična vrednost $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i važi*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \psi(x).$$

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$, $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi(x_n) = A$ i

$$\varphi(x_n) \leq f(x_n) \leq \psi(x_n).$$

Na osnovu Teoreme "o zatvoreniku između dva policajca" za nizove, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Iz definicije granične vrednosti funkcija sledi da postoji granična vrednost funkcije f u tački x_0 i da je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ■

Primer 2.27. Da li postoji $\lim\limits_{x\to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$?

Iz

$$|x \cos \frac{1}{x}| = |x|| \cos \frac{1}{x}| \leq |x|, \ x \neq 0,$$

sledi

$$-|x| \leq x \cos \frac{1}{x} \leq |x|, \ x \neq 0.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, na osnovu Tvrđenja 2.26, zaključujemo da je

$$\lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0. \bullet$$

Tvrđenje 2.28. *Ako postoje konačne granične vrednosti* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, *onda postoje i konačne granične vrednosti* $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))$, *a ako je* $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, *onda i granična vrednost* $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x), \tag{2.17}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x), \tag{2.18}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\,\lim_{x\to x_0} g(x), \tag{2.19}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \tag{2.20}$$

Dokaz. Neka je $\lim_{x\to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = c \in \mathbb{R}$ i $c \neq 0$. Iz Posledice 2.23 sledi da postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 takva da je $g(x)\neq 0$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Prema tome, za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ definisan je količnik $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n\in\mathbb{N}$, i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tada je $g(x_n)\neq 0$ za sve $n\in\mathbb{N}$, i na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije imamo da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ i $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = c$. Iz Tvrđenja 1.38 sledi da postoji $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ i da je $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{c}$. Na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije sledi da je

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Ostala tvrđenja se dokazuju slično. ∎

Posledica 2.29. *Ako postoji konačna granična vrednost* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, *tada za svako* $c\in\mathbb{R}$ *postoje granične vrednosti* $\lim_{x\to x_0}(f(x)+c)$, $\lim_{x\to x_0}(f(x)-c)$ *i* $\lim_{x\to x_0} cf(x)$, *i važi*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+c) = \lim_{x\to x_0} f(x) + c, \tag{2.21}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-c) = \lim_{x\to x_0} f(x) - c, \tag{2.22}$$

$$\lim_{x\to x_0} c\,f(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x). \tag{2.23}$$

Dokaz. Neka je $g(x) = c$, $x\in\mathbb{R}$. Tada je $\lim_{x\to x_0} g(x) = c$ i iz Tvrđenja 2.28 sledi da funkcije $f+g$, $f-g$ i gf imaju konačnu graničnu vrednost u tački x_0. Pri tom je na osnovu (2.19)

$$\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)\lim_{x\to x_0} f(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x),$$

tj. važi (2.23). Jednakosti (2.21) i (2.22) se slično dokazuju. ∎

Posledica 2.30. *Ako postoji konačna granična vrednost* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$*, tada za svako* $k \in \mathbb{N}$ *postoji granična vrednost* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^k$ *i važi*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^k = (\lim_{x\to x_0} f(x))^k.$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 2.28, (2.19), na osnovu principa matematičke indukcije. ■

Tvrđenje 2.31. *Neka su funkcije* f *i* g *definisane u nekoj probodenoj okolini tačke* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

(2.31.1) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$*, onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

(2.31.2) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$*, onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

(2.31.3) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *i funkcija* g *odozdo ograničena u nekoj probodenoj okolini tačke* x_0*, onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

(2.31.4) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *i funkcija* g *odozgo ograničena u nekoj probodenoj okolini tačke* x_0*, onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

(2.31.5) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$*) i postoji konačna granična vrednost* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y \in \mathbb{R}$*, onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$*).*[1]

Dokaz. (2.31.3): Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ i funkcija g odozdo ograničena u nekoj probodenoj okolini tačke x_0, tj. postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 tako da je $g(x) > c$ za neko $c \in \mathbb{R}$, i sve $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ i $g(x_n) > c$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Sada iz Tvrđenja 1.21 ((1.21.3)) sledi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = +\infty$. Na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = +\infty$.

Ostala tvrđenja se dokazuju slično, korišćenjem odgovarajućih delova Tvrđenja 1.21 i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije. ■

Tvrđenje 2.32. *Neka su date funkcije* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *i neka je* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* X*. Neka funkcija* f *ima konačnu graničnu vrednost u tački*

[1] Tvrđenja (2.31.1), (2.31.2) i (2.31.5) simbolički zapisujemo (koristeći simbole $+\infty$ i $-\infty$) na sledeći način:

$$\begin{aligned}(+\infty) + (+\infty) &= +\infty,\\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty,\\ (+\infty) + y &= +\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\\ (-\infty) + y &= -\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

x_0. Tada postoji $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ ako i samo ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Pri tom su mogući slučajevi:

(1.42.1) *Postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ako i samo postoji konačna granična vrednost $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ i važi jednakost:*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x); \tag{2.24}$$

(2.32.2) *$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ako i samo ako je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = +\infty$;*

(2.32.3) *$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ ako i samo ako je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = -\infty$.*

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.42 i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije (dokaz se može izvesti i korišćenjem Tvrđenja 2.28 i Tvrđenja 2.31 ((2.31.5)), slično dokazu odgovarajućeg tvrđenja za nizove (Tvrđenja 1.42)). ■

Tvrđenje 2.33. *Neka su funkcije f i g definisane u nekoj probodenoj okolini tačke $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(2.33.1) *Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$), onda je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = -\infty$).*

(2.33.2) *Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ i $g(x) \geq y > 0$ ($g(x) \leq y < 0$) u nekoj probodenoj okolini tačke x_0, onda je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = -\infty$).*

(2.33.3) *Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y \in \mathbb{R}$ i $y > 0$ ($y < 0$), onda je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = -\infty$).*

(2.33.4) *Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, onda je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty$.*

(2.33.5) *Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y \in \mathbb{R}$ i $g(x) \geq y > 0$ ($g(x) \leq y < 0$) u nekoj probodenoj okolini tačke x_0, onda je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = -\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty$).*

(2.33.6) *Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y \in \mathbb{R}$ i $y > 0$ ($y < 0$), onda je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = -\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = +\infty$).*[2]

[2] Tvrđenja (2.33.1), (2.33.3), (2.33.4) i (2.33.6) simbolički zapisujemo (koristeći simbole $+\infty$ i $-\infty$) na sledeći način:

$$\begin{aligned}
(+\infty)\cdot(+\infty) &= +\infty,\\
(+\infty)\cdot(-\infty) &= -\infty,\\
(+\infty)\cdot y &= +\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y > 0,\\
(+\infty)\cdot y &= -\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y < 0,\\
(-\infty)\cdot(-\infty) &= +\infty,\\
(-\infty)\cdot y &= -\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y > 0,\\
(-\infty)\cdot y &= +\infty, \text{ za svako } y \in \mathbb{R},\ y < 0.
\end{aligned}$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.33 i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije. ■

Posledica 2.34. *Neka je data funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* X*. Neka je* $k \in \mathbb{N}$*.*

(2.34.1) *Ako je* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$*, tada je* $\lim\limits_{n \to \infty} (f(x))^k = +\infty$*.*

(2.34.2) *Ako je* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *i* k *paran (neparan) broj, tada je* $\lim\limits_{n \to \infty} (f(x))^k = +\infty$ *(*$\lim\limits_{n \to \infty} (f(x))^k = -\infty$*).*

Dokaz. (2.34.1): Sledi iz (2.33.1) na osnovu principa matematičke indukcije.

(2.34.2): Sledi iz (2.33.4) i (2.33.1) na osnovu principa matematičke indukcije.

Dokaz tvrđenja (2.34.1) i (2.34.2) se može izvesti i korišćenjem Posledice 1.35 i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije. ■

Tvrđenje 2.35. *Neka su date funkcije* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *i neka je* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* X*. Neka funkcija* f *ima konačnu graničnu vrednost u tački* x_0*,* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}$*. Tada postoji* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x))$ *ako i samo ako postoji* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$*. Pri tom su mogući slučajevi:*

(2.35.1) *Postoji konačna granična vrednost* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *ako i samo postoji konačna granična vrednost* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x))$ *i važi jednakost:*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x); \tag{2.25}$$

(2.35.2) *Ako je* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b > 0$*, tada je*

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to x_0} g(x) & = & +\infty \iff \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) & = & -\infty \iff \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = -\infty; \end{array}$$

(2.35.3) *Ako je* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b < 0$*, tada je*

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to x_0} g(x) & = & -\infty \iff \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) & = & +\infty \iff \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = -\infty. \end{array}$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.43 i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije (dokaz se može izvesti i korišćenjem Tvrđenja 2.28 i Tvrđenja 2.33 ((2.33.3) i (2.33.6)), slično dokazu odgovarajućeg tvrđenja za nizove (Tvrđenja 1.43)). ■

Definicija 2.36. Za funkciju α kažemo da je *beskonačno mala funkcija kad* x *teži ka* x_0 (ovde x_0 može biti realan broj ili jedna od beskonačnosti) ako je

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Beskonačno mala α često se naziva i *infinitezimala.*

Sledeće tvrđenje se moguće dokazati korišćenjem odgovarajućih osobina nula nizova, ali takođe sledi i iz Tvrđenja 2.28.

Tvrđenje 2.37. *Zbir, razlika i proizvod dve beskonačno male funkcije kad $x \to x_0$ je beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$.*

(Podrazumeva se da su zbir, razlika i proizvod beskonačno malih funkcija kad $x \to x_0$, α i β, definisani na preseku oblasti definisanosti funkcija α i β).

Tvrđenje 2.38. *Ako je α beskonačno mala kad $x \to x_0$, a g funkcija ograničena u nekoj probodenoj okolini tačke x_0, onda je $g\alpha$ beskonačno mala kad $x \to x_0$.*

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ i neka postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 tako da je $|g(x)| < c$ za neko $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, i sve $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(x_n) = 0$ i $|g(x_n)| < c$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Kako je proizvod nula-niza i ograničenog niza opet nula-niz (Tvrđenje 1.27), sledi $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\alpha(x_n) = 0$. Na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\alpha(x) = 0$. ■

Naravno, prethodno tvrđenje smo mogli da dokažemo i "na jeziku okolina", korišćenjem Košijeve definicije granične vrednosti funkcije.

Primer 2.39. Budući da su funkcije $g_1(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ i $g_2(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ograničene, a $\alpha(x) = x$ beskonačno mala kad $x \to 0$, iz Tvrđenja 2.38 sledi da su funkcije $f_1(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$ i $f_2(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ beskonačno male kad $x \to 0$. •

Sledeća teorema pokazuje da se pojam granične vrednosti funkcije može svesti na pojam beskonačno male.

Tvrđenje 2.40. *Funkcija f u tački $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ima konačnu graničnu vrednost jednaku A, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, ako i samo ako postoji okolina U tačke x_0 i beskonačno mala α kad $x \to x_0$ tako da je*

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \text{za} \quad x \in \overset{\circ}{U}.$$

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. To znači da je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}$ tačke x_0. Definišimo $\alpha(x) = f(x) - A$ za $x \in \overset{\circ}{U}$. Tada na osnovu (2.22) sledi

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - A) = \lim_{x\to x_0} f(x) - A = A - A = 0,$$

i očigledno je $f(x) = A + \alpha(x)$.

Obrnuto, ako je $f(x) = A + \alpha(x)$ za $x \in X$ iz neke probodene okoline tačke x_0, i $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, tada je na osnovu (2.21)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A. \ ■$$

Tvrđenje 2.41. *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ *(*$\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=-\infty$*), onda je* $\dfrac{1}{f}$ *beskonačno mala kad* $x\to x_0$.[3]

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.39 i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije. ■

Tvrđenje 2.42. (2.42.1) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$*) i funkcija* f *ograničena u nekoj probodenoj okolini tačke* x_0*, onda je* $\dfrac{f}{g}$ *beskonačno mala kad* $x\to x_0$.

(2.42.2) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$*) i postoji konačna granična vrednost* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$*, onda je* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *beskonačno mala kad* $x\to x_0$.[4]

Dokaz. (2.42.1): Sledi iz Tvrđenja 2.38 i Tvrđenja 2.41.
(2.42.2): Sledi iz (2.42.1) i Tvrđenja 2.20. ■

Napomena 2.43. Ako je α beskonačno mala kad $x\to x_0$, onda funkcija $\dfrac{1}{\alpha}$ ne mora da ima graničnu vrednost u tački x_0. Na primer, funkcija $\alpha(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, je beskonačno mala kad $x\to 0$, ali $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ (Primer 2.13), te ne postoji $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\alpha(x)}$.

Tvrđenje 2.44. *Neka je* α *beskonačno mala kad* $x\to x_0$ *i neka je* $U(x_0)$ *okolina tačke* x_0 *takva da je* $\alpha(x)>0$ *(*$\alpha(x)<0$*) za* $x\in\mathring{U}(x_0)$*. Tada je* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=+\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\alpha(x)}=-\infty$*).*[5]

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 1.41 i Hajneove definicije granične vrednosti funkcije. ■

---

[3] Tvrđenje 2.41 simbolički zapisujemo:

$$\frac{1}{+\infty}=0,\quad \frac{1}{-\infty}=0.$$

[4] Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\in\mathbb{R}$, Tvrđenje (2.42.2) simbolički zapisujemo:

$$\frac{b}{+\infty}=0,\quad \frac{b}{-\infty}=0 \quad \text{za svako } b\in\mathbb{R}.$$

[5] Tvrđenje 2.44 simbolički zapisujemo:

$$\frac{1}{+0}=+\infty,\quad \frac{1}{-0}=-\infty.$$

Primer 2.45. Dokazati da je

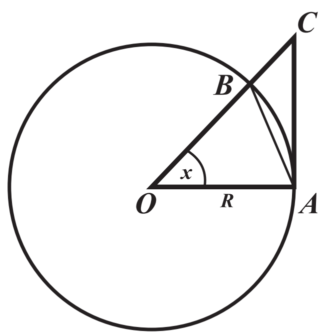
$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \tag{2.26}$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{za svako } x_0 \in \mathbb{R}, \tag{2.27}$$

i da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2.28}$$

Dokaz. Uočimo kružnicu poluprečnika R sa centrom u tački O. Neka poluprečnik OB sa poluprečnikom OA gradi ugao od x radijana, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. U tački A konstruišimo normalu na poluprečnik OA i neka ona seče poluprečnik OB u tački C.



Površina trougla OAB je $\frac{1}{2}R^2\sin x$, površina kružnog isečka OAB je $\frac{1}{2}R^2 x$, dok je površina trougla OAC jednaka $\frac{1}{2}R^2\mathrm{tg}x$. Kako je trougao OAB sadržan u kružnom isečku OAB, a ovaj pak sadržan u trouglu OAC, to dobijamo nejednakost:

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2\mathrm{tg}x.$$

Dakle, važe nejednakosti

$$\sin x < x < \mathrm{tg}x \quad \text{za} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{2.29}$$

Dokažimo sada da važi nejednakost:

$$|\sin x| \le |x| \quad \text{za} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Iz prve nejednakosti u (2.29) sledi da je za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $|\sin x| = \sin x \le x = |x|$. Ako je $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, onda je $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, i opet na osnovu prve nejednakosti u (2.29) sledi $\sin(-x) \le -x$. Kako je u ovom slučaju $|\sin x| = -\sin x = \sin(-x)$ i $|x| = -x$, dokazali smo da je $|\sin x| \le |x|$.

Ako je $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, tada je $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$.

Neka je x_0 proizvoljan ralan broj. Tada je za $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin x - \sin x_0 &= 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}, \\ \cos x - \cos x_0 &= -2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Kako je $|\sin\alpha| \leq 1$ i $|\cos\alpha| \leq 1$ za svako $\alpha \in \mathbb{R}$, i na osnovu (2.30) $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq \frac{|x-x_0|}{2}$, to iz (2.31) sledi

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|, \\ |\cos x - \cos x_0| &= 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Odavde sledi

$$\begin{aligned} -|x-x_0| \leq \sin x - \sin x_0 \leq |x-x_0|, \\ -|x-x_0| \leq \cos x - \cos x_0 \leq |x-x_0|. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Budući da je $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0| = 0$, na osnovu Tvrđenja 2.26, iz (2.33) sledi da je

$$\lim_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0}(\cos x - \cos x_0) = 0.$$

Odavde, kako je $\sin x = (\sin x - \sin x_0) + \sin x_0$ i $\cos x = (\cos x - \cos x_0) + \cos x_0$, na osnovu Tvrđenja 2.40 (ili na osnovu (2.21)) sledi $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$ i $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$.

Dokažimo sada da važi (2.28). Deobom nejednakosti (2.29) sa $\sin x > 0$ (jer $0 < x < \frac{\pi}{2}$) dobijamo:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

tj.

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2.34}$$

Ako $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, tada $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ i prema već dokazanom imamo da je $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$, tj. $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Prema tome, nejednakost (2.34) važi za svako $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Kako je na osnovu (2.27) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, iz (2.34), na osnovu Tvrđenja 2.26, dobijamo (2.28). •

Primer 2.46. Iz Tvrđenja 2.28, (2.28) i (2.27) sledi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{1} = 1. \bullet$$

Tvrđenje 2.47. *Neka je funkcija f definisana u probodenoj okolini tačke $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{U}(x_0)$.*

(2.47.1) *Ako je $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), onda je $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$).*

(2.47.2) *Ako je $a = 1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), onda je $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 1$ ($\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 1$).*

(2.47.3) *Ako je $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), onda je $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$ ($\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$).*

Dokaz. (2.47.1): Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) i $\varepsilon > 0$. Tada postoji okolina tačke x_0, $U_1(x_0) \subset U(x_0)$, tako da je za svako $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ važi $f(x) > \log_a \varepsilon$ ($f(x) < \log_a \varepsilon$). Budući da je funkcija $t \mapsto a^t$ strogo rastuća, za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ sledi $a^{f(x)} > a^{\log_a \varepsilon} = \varepsilon$ ($0 < a^{f(x)} < a^{\log_a \varepsilon} = \varepsilon$). Prema tome, $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$, ($\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$).

(2.47.2): Ako je $a = 1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), onda je $a^{f(x)} = 1$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, pa je očigledno, $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 1$ ($\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 1$).

(2.47.3): Neka je $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) i $\varepsilon > 0$. Postoji okolina tačke x_0, $U_1(x_0) \subset U(x_0)$, tako da je za svako $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ važi $f(x) > \log_a \varepsilon$ ($f(x) < \log_a \varepsilon$). Kako je funkcija $t \mapsto a^t$ strogo opadajuća, za $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ važi $0 < a^{f(x)} < a^{\log_a \varepsilon} = \varepsilon$ ($a^{f(x)} > a^{\log_a \varepsilon} = \varepsilon$). Time je dokazano da je $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$, ($\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$).■

Primetimo da (2.47.3) sledi takođe iz (2.47.1), Tvrđenja 2.41 i Tvrđenja 2.44. Naime iz $0 < a < 1$ sledi $\dfrac{1}{a} > 1$, pa za $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), iz (2.47.1) sledi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{a^{f(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{f(x)} = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{a^{f(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{f(x)} = 0$). Odavde, na osnovu Tvrđenja 2.41 (Tvrđenja 2.44), zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$, ($\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$).

Tvrđenje 2.48. *Neka je funkcija f definisana u probodenoj okolini tačke $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{U}(x_0)$, i neka je $f(x) > 0$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.*

(2.48.1) *Ako je* $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$*), onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = +\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = -\infty$*).*

(2.48.2) *Ako je* $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$*), onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = -\infty$ *(*$\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = +\infty$*).*

Dokaz. (2.48.1): Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$) i $M \in \mathbb{R}$. Tada postoji okolina tačke x_0, $U_1(x_0) \subset U(x_0)$, tako da je za svako $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ važi $f(x) > a^M$ $(0 < f(x) < a^M)$. Budući da je funkcija $t \mapsto \log_a t$ strogo rastuća, za $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ sledi $\log_a f(x) > \log_a a^M = M$ $(\log_a f(x) < \log_a a^M = M)$. Prema tome, $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = +\infty$, ($\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = -\infty$).

(2.48.2): Neka je $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$) i $M \in \mathbb{R}$. Postoji okolina tačke x_0, $U_1(x_0) \subset U(x_0)$, tako da je za svako $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ važi $f(x) > a^M$ $(0 < f(x) < a^M)$. Kako je funkcija $t \mapsto \log_a t$ strogo opadajuća, za $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ važi $\log_a f(x) < \log_a a^M = M$ $(\log_a f(x) > \log_a a^M = M)$. Time je dokazano da je $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = -\infty$, ($\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = +\infty$).■

Primetimo da (2.48.2) sledi takođe iz (2.48.1). Zaista, iz $0 < a < 1$ sledi $\dfrac{1}{a} > 1$. Iz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$) i (2.48.1) sledi $\lim\limits_{x\to x_0} \log_{\frac{1}{a}} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} \log_{\frac{1}{a}} f(x) = -\infty$). Odavde, s obzirom da je $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = -\lim\limits_{x\to x_0} \log_{\frac{1}{a}} f(x)$, sledi $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = -\infty$, ($\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = +\infty$).

Tvrđenje 2.49. *Neka su funkcije* f *i* g *definisane u probodenoj okolini tačke* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

(2.49.1) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$.

(2.49.2) *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$.

(2.49.3) *Neka je* $f(x) > 0$ *za svako* $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$.

(2.49.4) *Neka je* $f(x) > 0$ *za svako* $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. *Ako je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *onda je* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$.[6]

[6] Tvrđenja (2.49.1), (2.49.2), (2.49.3) i (2.49.4) simbolički zapisujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} (+\infty)^{+\infty} &= +\infty, \\ (+\infty)^{-\infty} &= 0, \\ (+0)^{+\infty} &= 0, \\ (+0)^{-\infty} &= +\infty. \end{aligned}$$

Dokaz. (2.49.1), (2.49.2): Neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$). Iz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ sledi da postoji okolina tačke x_0, $U_1(x_0) \subset U(x_0)$, tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ važi $f(x) > 0$. Za $x \in \overset{\circ}{U}_1(x_0)$ je

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}. \tag{2.35}$$

Iz (2.48.1) sledi da je $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = +\infty$, pa iz (2.33.1) sledi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = -\infty$). Odavde, na osnovu (2.47.1), zaključujemo da je

$$\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = +\infty \quad (\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = 0). \tag{2.36}$$

Iz (2.35) i (2.36) sledi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$).

(2.49.3), (2.49.4): Neka postoji okolina tačke x_0, $U(x_0)$, tako da je $f(x) > 0$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ i neka je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$). Za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \cap X$ važi (2.35). Kako je $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = -\infty$ ((2.48.1)) i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$), to na osnovu (2.33.1) zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = -\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = +\infty$). Sada na osnovu (2.47.1) dobijamo $\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = 0$ ($\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = +\infty$), i prema tome, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = 0$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = +\infty$).
■

Primetimo da smo (2.49.3) i (2.49.4) mogli dokazati koristeći tvrđenje (2.49.1). Naime, ako postoji okolina tačke x_0, $U(x_0)$, tako da je $f(x) > 0$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ i ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, tada je $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ (Tvrđenje 2.44) i

$$f(x)^{g(x)} = \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}\right)^{g(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{g(x)}}.$$

Kako je i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, to iz (2.49.1) sledi $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^{g(x)} = +\infty$ i stoga na osnovu Tvrđenja 2.41 imamo da je

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{g(x)}} = 0. \text{ [7]}$$

[7] Ovaj način zaključivanja simbolički zapisujemo:

$$(+0)^{+\infty} = \left(\frac{1}{\frac{1}{+0}}\right)^{+\infty} = \frac{1}{\left(\frac{1}{+0}\right)^{+\infty}} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ i postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 tako da je $f(x) > 0$ za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, onda je

$$f(x)^{g(x)} = \left(\frac{1}{f(x)}\right)^{-g(x)},$$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ (Tvrđenje 2.44) i $\lim\limits_{x\to x_0} (-g(x)) = +\infty$, pa je na osnovu (2.49.1):

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right)^{-g(x)} = +\infty.$$

Teorema 2.50. *(Košijev kriterijum egzistencije graničnih vrednosti funkcija) Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Funkcija f ima konačnu graničnu vrednost u tački x_0 ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x', x'' \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

2.3 Granična vrednost složene funkcije

Sledeća teorema daje dovoljne uslove za egzistenciju granične vrednosti složene funkcije. Preciznije, ova teorema govori o tome da ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, i ako postoji probodena okolina tačke a koja se funkcijom f preslikava u probodenu okolinu tačke b, onda se $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$ nalazi uvođenjem smene $y = f(x)$, tj. $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y) = c$.

Teorema 2.51. *Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a funkcija g u nekoj probodenoj okolini tačke $b \in \overline{\mathbb{R}}$ i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(2.51.1) $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

(2.51.2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

(2.51.3) *Postoji okolina $U_0(a)$ tačke a takva da za svako $x \in \overset{\circ}{U}_0(a)$ važi $f(x) \neq b$.*

Tada postoji granična vrednost složene funkcije $g \circ f$ u tački a i važi

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = c. \tag{2.37}$$

Dokaz. Neka je $\overset{\circ}{V}(b)$ probodena okolina tačke b u kojoj je funkcija g definisana. Iz egzistencije limesa $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i činjenice da je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sledi da postoji okolina $U_1(a)$ tačke a tako da je

$f(\overset{\circ}{U}_1(a)) \subset V(b)$. Tada za okolinu $U_2(a) = U_0(a) \cap U_1(a)$ tačke a važi da je funkcija f definisana u probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}_2(a)$ i da je

$$f(\overset{\circ}{U}_2(a)) \subset \overset{\circ}{V}(b). \tag{2.38}$$

Prema tome, složena funkcija $g \circ f$ je definisana u probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}_2(a)$.

Neka je (x_n) niz takav da $x_n \in \overset{\circ}{U}_2(a)$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Tada iz egzistencije limesa $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, a iz (2.38) sledi da $f(x_n) \in \overset{\circ}{V}(b)$, $n \in \mathbb{N}$. Sada iz egzistencije limesa $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = c$. Na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije sledi da je $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = c$. ■

Primer 2.52. Pokazaćemo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1. \tag{2.39}$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(y) = \dfrac{\sin y}{y}$. Tada je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$, $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$ ((2.28)) i $g(f(x)) = \dfrac{\sin 3x}{3x}$. Kako je $f(x) = 3x \neq 0$ za $x \neq 0$, to je onda ispunjen i uslov (2.51.3) Teoreme 2.51, odakle onda sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} g(y) = 1. \bullet$$

Iz postojanja graničnih vrednosti $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ u opštem slučaju ne sledi postojanje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$. To pokazuje sledeći primer.

Primer 2.53. Neka je $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(y) = |\operatorname{sgn} y| = \begin{cases} 1, & \text{za } y \neq 0 \\ 0, & \text{za } y = 0 \end{cases}$$

Tada je $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Pokazaćemo da $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ ne postoji. Neka je $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ i $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$, $f(x_n) = 0$, $f(x'_n) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $g(f(x_n)) = |\operatorname{sgn} f(x_n)| = |\operatorname{sgn} 0| = 0$ i $g(f(x'_n)) = |\operatorname{sgn} f(x'_n)| = |\operatorname{sgn} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}| = 1$. Sledi $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x'_n)) = 1$. Prema tome, ne postoji vrednost ka kojoj bi težio niz $(g(f(z_n)))$ za svaki niz (z_n) koji teži ka 0, i zato, na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije, ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$.

Primetimo da funkcija f ne ispunjava uslov (2.51.3) Teoreme 2.51, jer u svakoj okolini tačke $a = 0$ funkcija $\sin\dfrac{1}{x}$ ima nule, pa samim tim i funkcija f. •

Sledeći primer pokazuje da mogu da postoje sve tri granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ i $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$, ali da ne mora važiti jednakost $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y)$. Drugim rečima, uslovi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ i $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ nisu dovoljni da bi važilo $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Primer 2.54. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(y) = |\operatorname{sgn} y| = \begin{cases} 1, & \text{za } y \neq 0 \\ 0, & \text{za } y = 0 \end{cases}$$

Tada je $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Kako je $g(f(x)) = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, to je $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{y\to 0} g(y)$.

Primetimo da funkcija f ne ispunjava uslov (2.51.3) Teoreme 2.51. •

Primer 2.55. Pokažimo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Kao u Primeru 2.52 zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$, pa je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ •

Napomena 2.56. Neka je funkcija f definisana u probodenoj okolini tačke $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\mathring{U}(a)$, neka je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ i neka je za svako $x \in \mathring{U}(a)$, $f(x) \neq b$. Neka je definisana inverzna funkcija funkcije f, f^{-1}, u probodenoj okolini tačke b, $\mathring{V}(b)$, neka je $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = a$ i neka je za svako $y \in \mathring{V}(b)$, $f^{-1}(y) \neq a$. Osim toga, neka je funkcija g definisana u nekoj probodenoj okolini tačke b. Kao u dokazu Teoreme 2.51 pokazuje se da je složena funkcija $g \circ f$ definisana u nekoj probodenoj okolini tačke

a. Tada granična vrednost $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)$ postoji ako i samo ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ i pri tom su one jednake.

Zaista, budući da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ i da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ važi $f(x) \neq b$, iz Teoreme 2.51 sledi da iz egzistencije granične vrednosti $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ sledi egzistencija granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)$ i da važi jednakost $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)$. Budući da je $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = a$ i da je za svako $y \in \overset{\circ}{V}(b)$, $f^{-1}(y) \neq a$, opet na osnovu Teoreme 2.51 sledi da iz egzistencije granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)$ sledi egzistencija granične vrednosti složene funkcije $(g\circ f)\circ f^{-1}$ u tački b, $\lim\limits_{y\to b}((g\circ f)\circ f^{-1})(y)$, i da važi jednakost

$$\lim_{y\to b}((g\circ f)\circ f^{-1})(y) = \lim_{x\to a}(g\circ f)(x).$$

Kako je $(g\circ f)\circ f^{-1} = g$, dobijamo da postoji $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ i da važi jednakost $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)$. $\square$

Primetimo da ako je u Teoremi 2.51 $b = +\infty$ ili $b = -\infty$, onda je uslov (2.51.3) ispunjen za svaku funkciju f koja je definisana u nekoj probodenoj okolini tačke a, jer je kodomen funkcije f skup $\mathbb{R}$, pa je $f(x) \neq +\infty$ i $f(x) \neq -\infty$ za svako x iz domena funkcije f. U tom slučaju teorema o limesu složene funkcije glasi:

Teorema 2.57. *Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a funkcija g u nekoj okolini tačke $+\infty$ (tačke $-\infty$) i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(2.57.1) $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$ $\left(\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}\right)$,

(2.57.2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty\right)$.

Tada postoji granična vrednost složene funkcije $g\circ f$ u tački a i važi

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = c$$
$$\left(\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to-\infty} g(y) = c\right).$$

Tvrđenje Teoreme 2.51 će važiti i kad se dvostrana granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ zameni jednostranom graničnom vrednošću $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ (ili $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$), a u uslovu (2.51.3) okolina $U(a)$, desnom okolinom tačke a (levom okolinom tačke a), $a \in \mathbb{R}$. Razlikovaćemo slučaj kada je b konačan broj i kada je $b \in \{+\infty, -\infty\}$.

Teorema 2.58. *Neka je funkcija f definisana u nekoj desnoj okolini tačke a, $a \in \mathbb{R}$. Neka je funkcija g definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $b \in \mathbb{R}$ i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(2.58.1) $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

(2.58.2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$;

(2.58.3) *Postoji* $\delta > 0$ *tako da za svako* $x \in (a, a+\delta)$ *važi* $f(x) \neq b$.

Tada postoji desna granična vrednost složene funkcije $g \circ f$ *u tački* a *i važi*

$$\lim_{x\to a+0} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Teorema 2.59. *Neka je funkcija* f *definisana u nekoj desnoj okolini tačke* a, $a \in \mathbb{R}$. *Neka je funkcija* g *definisana u nekoj okolini tačke* $+\infty$ $(-\infty)$ *i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(2.59.1) $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\lim\limits_{y\to-\infty} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}})$,

(2.59.2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty)$.

Tada postoji desna granična vrednost složene funkcije $g \circ f$ *u tački* a *i važi*

$$\lim_{x\to a+0} g(f(x)) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = c$$
$$(\lim_{x\to a+0} g(f(x)) = \lim_{y\to-\infty} g(y) = c).$$

Analogno se formuliše tvrđenje o egzistenciju leve granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a-0} g(f(x))$.

Primer 2.60. Pokažimo da je

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{2.40}$$

Podsetimo se da je

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.41}$$

Smenom $t = \dfrac{1}{x}$ $(x \to +0 \Longleftrightarrow t \to +\infty,\ x \to -0 \Longleftrightarrow t \to -\infty)$ iz prve jednakosti u (2.41) sledi[8]

$$\lim_{x\to+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e, \tag{2.42}$$

dok iz druge jednakosti u (2.41) sledi

$$\lim_{x\to-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e. \tag{2.43}$$

[8]Budući da $x \to +0 \Longleftrightarrow t \to +\infty$, na osnovu Teoreme 2.59 i Napomene 2.56 sledi da $\lim\limits_{x\to+0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ postoji ako i samo ako postoji $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ i da važi jednakost $\lim\limits_{x\to+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$. Slično, $\lim\limits_{x\to-0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ postoji ako i samo ako postoji $\lim\limits_{t\to-\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ i važi jednakost $\lim\limits_{x\to-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to-\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t$.

Na osnovu Teoreme 2.10, iz (2.42) i (2.43) sledi (2.40). •

Postavlja se pitanje šta se može dobiti ako su ispunjeni uslovi (2.51.1) i (2.51.2), a nije zadovoljen uslov (2.51.3) Teoreme 2.51. Sledeća teorema daje odgovor na ovo pitanje.

Teorema 2.61. *Neka je funkcija f definisana u nekoj probodenoj okolini tačke $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a funkcija g u nekoj probodenoj okolini tačke $b \in \overline{\mathbb{R}}$ i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(2.61.1) $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

(2.61.2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Tada postoji probodena okolina tačke a, $\overset{\circ}{U}(a)$, tako da funkcija $h : \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$h(x) = \begin{cases} g(f(x)), & \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(a) \text{ ako je } f(x) \neq b, \\ c, & \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(a) \text{ ako je } f(x) = b. \end{cases}$$

ima graničnu vrednost u tački a i važi

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Dokaz. Postoji okolina $V(b)$ tačke b tako da je funkcija g definisana u probodenoj okolini $\overset{\circ}{V}(b)$. Iz (2.61.2) sledi da postoji probodena okolina tačke a, $\overset{\circ}{U}(a)$, tako da je

$$f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(b).$$

Definišimo funkciju h na skupu $\overset{\circ}{U}(a)$ na sledeći način:

$$h(x) = \begin{cases} g(f(x)), & \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(a) \text{ ako je } f(x) \neq b, \\ c, & \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(a) \text{ ako je } f(x) = b. \end{cases}$$

Neka je $W(c)$ proizvoljna okolina tačke c. Iz uslova (2.61.1) sledi da postoji okolina tačke b, $V_1(b)$ ($V_1(b) \subset V(b)$), takva da je

$$g(\overset{\circ}{V}_1(b)) \subset W(c). \tag{2.44}$$

Iz uslova (2.61.2) sledi da postoji okolina tačke a, $U_1(a)$ ($U_1(a) \subset U(a)$), takva da je

$$f(\overset{\circ}{U}_1(a)) \subset V_1(b). \tag{2.45}$$

Ako je $x \in \overset{\circ}{U}_1(a)$, na osnovu (2.45) i (2.44), ako je $f(x) \neq b$ imamo $h(x) = g(f(x)) \in W(c)$, a ako je $f(x) = b$ onda je $h(x) = c$, pa je opet $h(x) \in W(c)$. Sledi

$$h(\overset{\circ}{U}_1(a)) \subset W(c)$$

i s obzirom na proizvoljnost okoline $W(c)$ tačke c, zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to a} h(x) = c$. ■

2.4 Granična vrednost monotone funkcije

Definicija 2.62. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ i $A \subset X$. Za funkciju f kažemo da je

(i) *rastuća* na skupu A ako za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ važi nejednakost $f(x_1) \le f(x_2)$;

(ii) *strogo rastuća* na skupu A ako za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ važi nejednakost $f(x_1) < f(x_2)$;

(iii) *opadajuća* na skupu A ako za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ važi nejednakost $f(x_1) \ge f(x_2)$;

(iv) *strogo opadajuća* na skupu A ako za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ važi nejednakost $f(x_1) > f(x_2)$.

Za funkciju f koja zadovoljava bilo koji od uslova (i)-(iv) kažemo da je *monotona* na skupu A, a za funkciju koja zadovoljava uslov (ii) ili uslov (iv) kažemo da je *strogo monotona* na skupu A.

Primer 2.63. Funkcija $f(x) = x^2$ je strogo rastuća na $[0, +\infty)$, i strogo opadajuća na $(-\infty, 0]$, ali nije monotona na $\mathbb{R}$.

Funkcija $g(x) = x^3$ je strogo rastuća na $\mathbb{R}$. Funkcija $h(x) = -x^3$ je strogo opadajuća na $\mathbb{R}$. •

Primetimo da ako je f (strogo) rastuća funkcija na skupu A, onda je funkcija $-f$, definisana sa $(-f)(x) = -f(x)$, $x \in A$, (strogo) opadajuća.

Ako je A podskup domena funkcije f, onda ćemo sa $\sup\limits_A f(x)$ označavati $\sup\{f(x) : x \in A\}$. Takođe, umesto $\inf\{f(x) : x \in A\}$ pišemo kraće $\inf\limits_A f(x)$.

Teorema 2.64. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $(a, b) \subset X$ i neka je f rastuća funkcija na intervalu (a, b).*

Ako je $b = +\infty$, onda je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x),$$

a ako je $b \in \mathbb{R}$, onda je

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x).$$

Ako je $a = -\infty$, onda je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x),$$

a ako je $a \in \mathbb{R}$, onda je

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x).$$

Sledeća teorema govori o graničnim vrednostima opadajuće funkcije.

Teorema 2.65. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$, $(a,b) \subset X$ i neka je f opadajuća funkcija na intervalu (a,b).*

Ako je $b = +\infty$, onda je

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x),$$

a ako je $b \in \mathbb{R}$, onda je

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x).$$

Ako je $a = -\infty$, onda je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x),$$

a ako je $a \in \mathbb{R}$, onda je

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x).$$

Posledica 2.66. *Neka je funkcija f monotona na intervalu (a,b) i neka $x_0 \in (a,b)$. Tada u tački $x_0 \in (a,b)$ postoje konačne jednostrane granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Pri tom, ako je f rastuća funkcija važe nejednakosti*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+0} f(x), \tag{2.46}$$

a ako je f opadajuća funkcija važe nejednakosti

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \ge f(x_0) \ge \lim_{x\to x_0+0} f(x). \tag{2.47}$$

2.5 Neprekidnost funkcija

Definicija 2.67. *Za funkciju f definisanu u nekoj okolini $U(x_0)$ tačke $x_0 \in \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u tački x_0 ako je*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.48}$$

Uslov (2.48) je ekvivalentan uslovu

$$\lim_{x-x_0\to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Razlika $x - x_0$ se zove priraštaj argumenta i označava sa Δx, a razlika $f(x) - f(x_0)$ priraštaj funkcije koji odgovara priraštaju argumenta Δx, i označava se sa Δy. Prema tome

$$\Delta x = x - x_0,\ x = x_0 + \Delta x,\ \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

i uslov (2.48) je ekvivalentan uslovu

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Definicija 2.68. *Ako je funkcija f neprekidna u svakoj tački skupa S, onda kažemo da je f neprekidna na S.*

Primer 2.69. Funkcija $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Zaista, za svako $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c = f(x_0)$. •

Primer 2.70. Pokažimo da je funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, neprekidna na $\mathbb{R}$.

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Iz

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = \\ &= n x_0^{n-1} \Delta x + \tfrac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\end{aligned}$$

sledi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Prema tome, funkcija f je neprekidna za svako $x_0 \in \mathbb{R}$. •

Primer 2.71. Da li je funkcija $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ neprekidna u 0?

Kako je

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$$

i $f(0) = |\operatorname{sgn} 0| = 0$, sledi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$ i funkcija f nije neprekidna u 0. •

Primer 2.72. Da li je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

neprekidna u 0?

Slično kao u Primeru 2.27 možemo pokazati da je $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Stoga je $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ i funkcija f je neprekidna u 0. •

Definicija 2.73. *Neka je funkcija f definisana na intervalu $(a, x_0]$. Ako je*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0),$$

onda kažemo da je funkcija f neprekidna sleva u tački x_0.

Ako je funkcija f definisana na intervalu $[x_0, b)$ i ako je

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

onda kažemo da je funkcija f neprekidna zdesna u tački x_0.

Primer 2.74. Za dato $x \in \mathbb{R}$ najveći ceo broj koji je manji ili jednak od x označava se sa $[x]$. Neka je $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$. Neka je x_0 ceo broj. Tada je

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} [x] = x_0 = [x_0] = f(x_0),$$

što znači da je f neprekidna zdesna u x_0. Međutim f nije neprekidna sleva u tački x_0 jer:

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} [x] = x_0 - 1 \neq x_0 = [x_0] = f(x_0). \bullet$$

Teorema 2.75. *Ako su funkcije f i g neprekidne u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, tada su i funkcije $f \pm g$, fg neprekidne u x_0, a ako je $g(x_0) \neq 0$, onda i funkcija $\dfrac{f}{g}$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Tvrđenje sledi na osnovu definicije neprekidnosti i Teoreme 2.28. Pokazaćemo recimo da je funkcija $\dfrac{f}{g}$ neprekidna u x_0.

Kako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$, na osnovu Teoreme 2.28 sledi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

te je funkcija $\dfrac{f}{g}$ neprekidna u x_0. ■

Sledeća teorema govori o tome da limes i neprekidna funkcija mogu da zamene mesta.

Teorema 2.76. *Neka funkcija g u tački x_0 ima graničnu vrednost $y_0 \in \mathbb{R}$ i neka je funkcija f neprekidna u tački y_0. Tada složena funcija $x \mapsto f(g(x))$ ima graničnu vrednost u tački x_0 i važi*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)).$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Iz činjenice da je funkcija f neprekidna u tački y_0, tj. iz $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$ sledi da postoji $\varepsilon_1 > 0$ tako da za $y \in (y_0 - \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_1)$ važi $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Kako je $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ sledi da postoji $\delta > 0$ tako da za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ važi $g(x) \in (y_0 - \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_1)$. Zato za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ važi $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$. Prema tome, $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(y_0)$. ■

Teorema 2.77. *Ako je funkcija g neprekidna u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ i funkcija f neprekidna u tački $g(x_0)$, tada je složena funcija $x \mapsto f(g(x))$ neprekidna u tački x_0.*

Dokaz. Iz Teoreme 2.76 sledi

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)),$$

te je funkcija $x \mapsto f(g(x))$ neprekidna u x_0. ■

2.6 Neke osobine funkcija neprekidnih na segmentu

Reći ćemo da da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ ako je neprekidna u svakoj tački intervala (a, b), u tački a neprekidna zdesna, a u tački b neprekidna sleva. Sledeća teorema govori o tome da je svaka neprekidna funkcija na segmentu ograničena i da na njemu dostiže svoj supremum i infimum.

Teorema 2.78. *(Weierstrass) Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je ona ograničena i postoje tačke $x_0,\ x_0' \in [a, b]$ takve da je*

$$f(x_0) = \sup_{a\le x\le b} f(x) \text{ i } f(x_0') = \inf_{a\le x\le b} f(x).$$

Dokaz. Neka je

$$M = \sup_{a\le x\le b} f(x). \tag{2.49}$$

Jasno, $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Pokazaćemo da je $M < +\infty$ i da postoji $x_0 \in [a, b]$ tako da je $f(x_0) = M$. Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva takav da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M \tag{2.50}$$

i

$$a_n < M,\ n = 1, 2, \ldots\ ^9. \tag{2.51}$$

Iz (2.49) i (2.51) sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in [a, b]$ tako da je

$$a_n < f(x_n) \le M,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{2.52}$$

Kako je $a \le x_n \le b$, $n = 1, 2, \ldots$, sledi niz $(x_n)_n$ je ograničen i na osnovu Bolcano-Vajerštrasove teoreme ima konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$. Neka je

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0. \tag{2.53}$$

Zbog $a \le x_{n_k} \le b$ dobijamo $a \le x_0 \le b$, a na osnovu (2.52)

$$a_{n_k} < f(x_{n_k}) \le M,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{2.54}$$

Iz (2.50) sledi $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = M$, što zajedno sa (2.54) implicira

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M. \tag{2.55}$$

Kako je f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i $x_0 \in [a, b]$, f je neprekidna u x_0 i na osnovu (2.53) sledi

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{2.56}$$

[9] Ako je $M = +\infty$, onda možemo uzeti da je $a_n = n$, a za slučaj da je $M < +\infty$ možemo izabrati $a_n = M - \dfrac{1}{n}$ ili $a_n = M - \dfrac{1}{2^n}$.

Iz (2.55) i (2.56) sledi $f(x_0) = M$. Kako je $f(x_0) \in \mathbb{R}$, sledi $M < \infty$, tj. funkcija f je ograničena odozgo i dostiže svoj supremum u tački x_0.

Analogno se dokazuje da je funkcija odozdo ograničena na segmentu $[a, b]$ i da na njemu dostiže svoj infimum. ■

Primetimo da je pretpostavka da je funkcija definisana i neprekidna na zatvorenom i ograničenom intervalu bitna. Na primer, funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je neprekidna na intervalu $(0, 1]$, ali nije ograničena na njemu. Funkcija $f(x) = x$ je neprekidna na skupu $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, ali nije ograničena na njemu. Funkcija $f(x) = x$ je neprekidna i ograničena na intervalu $(0, 1)$, ali ne dostiže ni svoj supremum, ni svoj infimum na ovom intervalu ($\sup\limits_{x\in(0,1)} f(x) = 1$, $\inf\limits_{x\in(0,1)} f(x) = 0$).

Teorema 2.79. *(Bolzano-Cauchy) Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada za svaki broj C koji se nalazi između brojeva $f(a)$ i $f(b)$ postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $f(\xi) = C$.*

Dokaz. Neka je $f(a) < C < f(b)$. Podelimo segment $[a, b]$ tačkom x_0 na dva segmenta jednake dužine. Tada je ili $f(x_0) = C$, pa je tražena tačka $\xi = x_0$, ili je $f(x_0) \neq C$, i tada na levom kraju jednog od ta dva segmenta funkcija ima manju vrednost od C, a na desnom veću od C. Označimo taj segment sa $[a_1, b_1]$ i podelimo ga na dva segmenta jednaka po dužini i td. Tim postupkom ćemo ili nakon konačno mnogo koraka doći do tačke ξ takve da je $f(\xi) = C$ ili ćemo dobiti niz umetnutih odsečaka $[a_n, b_n]$, čija dužina teži 0 i takav da je

$$f(a_n) < C < f(b_n). \tag{2.57}$$

Na osnovu Kantorovog principa o umetnutim segmentima postoji jedinstvena tačka ξ koja pripada svim segmentima $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Kako je

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

zbog neprekidnosti funkcije f imamo

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{2.58}$$

Iz (2.57) sledi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq C \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{2.59}$$

Iz (2.58) i (2.59) sledi $f(\xi) = C$. ■

Sledeća posledica nam govori o tome da neprekidna funkcija na nekom segmentu, koja ima vrednosti različitog znaka na krajevima segmenta, mora imati barem jednu nulu unutar tog segmenta.

Posledica 2.80. *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i na krajevima segmenta ima vrednosti različitog znaka. Tada u intervalu (a, b) postoji bar jedna tačka ξ takva da je $f(\xi) = 0$.*

Dokaz. Kako su brojevi $f(a)$ i $f(b)$ različitog znaka, broj $C = 0$ se nalazi između $f(a)$ i $f(b)$. S obzirom da je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, na osnovu Teoreme 2.79 sledi da postoji $\xi \in (a, b)$ tako da je $f(\xi) = 0$. ■

Posledica 2.81. *Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$, i neka je $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$ i $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$. Tada je $f([a, b]) = [m, M]$.*

Dokaz. Za svako $x \in [a, b]$ važi $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x) \le f(x) \le \sup\limits_{a \le x \le b} f(x) = M$, tj. $f(x) \in [m, M]$. Prema tome, $f([a, b]) \subset [m, M]$.

Dokažimo obrnutu inkluziju. Na osnovu Weierstrassove teoreme postoje tačke $\alpha, \beta \in [a, b]$, takve da je $f(\alpha) = m$ i $f(\beta) = M$. Neka je, recimo, $\alpha < \beta$ i posmatrajmo segment $[\alpha, \beta]$ (ako je $\beta < \alpha$ posmatraćemo segment $[\beta, \alpha]$). Budući da je $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, sledi da je funkcija f neprekidna na segmentu $[\alpha, \beta]$. Neka je $y \in (m, M)$ proizvoljno. To znači da je y između $f(\alpha)$ i $f(\beta)$, pa iz Bolzano-Cauchyeve teoreme primenjene na segmet $[\alpha, \beta]$ sledi da postoji $x \in (\alpha, \beta)$ takav da je $f(x) = y$, i stoga $y \in f((\alpha, \beta))$. Sledi $[m, M] \subset f([\alpha, \beta]) \subset f([a, b])$. ■

2.7 Neprekidnost inverzne funkcije

Sledeće tvrđenje govori o tome da strogo monotona funkcija skupa X na skup Y ima inverznu funkciju.

Tvrđenje 2.82. *Neka je $f : X \to Y$ strogo monotona funkcija na skupu X i neka je $f(X) = Y$. Tada postoji inverzna funkcija $f^{-1} : Y \to X$ i ona je takođe strogo monotona, i to strogo rastuća (strogo opadajuća) ako je f strogo rastuća (opadajuća).*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ strogo rastuća funkcija. Pokažimo da je f injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in X$ i $x_1 \ne x_2$. Tada je ili $x_1 < x_2$ ili $x_2 < x_1$. Odavde, budući da je f strogo rastuća funkcija, sledi ili je $f(x_1) < f(x_2)$ ili $f(x_2) < f(x_1)$. Dakle, $f(x_1) \ne f(x_2)$. Prema tome, f je injekcija, a kako je po pretpostavci f surjekcija $(f(X) = Y)$, zaključujemo da je f bijekcija. Sledi f ima inverznu funkciju $f^{-1} : Y \to X$.

Pokažimo da je f^{-1} strogo rastuća funkcija. Neka su $y_1, y_2 \in Y$ takvi da je

$$y_1 < y_2, \tag{2.60}$$

i neka je $x_1 = f^{-1}(y_1)$ i $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Moguća su tri slučaja: ili je $x_1 = x_2$, ili $x_1 > x_2$ ili $x_1 < x_2$. Ako je $x_1 = x_2$, onda bismo zbog jednoznačnosti funkcije f imali $f(x_1) = f(x_2)$, tj. $y_1 = y_2$, što je u suprotnosti sa (2.60). Ako bi bilo $x_1 > x_2$, onda bi, s obzirom da je f strogo rastuća, važilo $f(x_1) > f(x_2)$, tj. $y_1 > y_2$, što je takođe u suprotnosti sa (2.60). Prema tome, $x_1 < x_2$, tj. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, te je f^{-1} strogo rastuća funkcija. ■

Teorema 2.83. *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna. Tada je $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ $(f([a, b]) = [f(b), f(a)])$ i inverzna funkcija f^{-1} je definisana, strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna na segmentu $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$.*

Teorema 2.84. *Neka je funkcija f strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna na intervalu (a, b) (konačnom ili beskonačnom).*

Ako je a konačan broj, neka je

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x),$$

a ako je $a = -\infty$, neka je $c = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Ako je b konačan broj, neka je

$$d = \lim_{x \to b-0} f(x),$$

a ako je $b = +\infty$, neka je $d = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Tada je inverzna funkcija f^{-1} definisana, strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna na (konačnom ili beskonačnom) intervalu (c, d) $((d, c))$.

Teorema 2.85. *Neka je funkcija f strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna na intervalu $[a, b)$ (konačnom ili beskonačnom), $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Neka je $c = f(a)$. Ako je b konačan broj, neka je

$$d = \lim_{x \to b-0} f(x),$$

a ako je $b = +\infty$, neka je $d = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Tada je inverzna funkcija f^{-1} definisana, strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna na (konačnom ili beskonačnom) intervalu $[c, d)$ $((d, c])$.

Teorema 2.86. *Neka je funkcija f strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna na intervalu $(a, b]$ (konačnom ili beskonačnom), $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$.*

Neka je $d = f(b)$. Ako je a konačan broj, neka je

$$c = \lim_{x \to a+0} f(x),$$

a ako je $a = -\infty$, neka je $c = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Tada je inverzna funkcija f^{-1} definisana, strogo rastuća (strogo opadajuća) i neprekidna na (konačnom ili beskonačnom) intervalu $(c, d]$ $([d, c))$.

2.8 Neprekidnost elementarnih funkcija

Definišimo najpre osnovne elementarne funkcije.

Definicija 2.87. *Konstantne, stepene, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije su osnovne elementarne funkcije.*

Definišimo sada pojam *elementarne funkcije.*

Definicija 2.88. *1. Osnovne elementarne funcije su elementarne funkcije.*

2. Ako su f i g elementarne funkcije, onda su i $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ i $g \circ f$ elementarne funkcije (pod uslovom da su definisane).

3. Sve elementarne funkcije se dobijaju primenom pravila 1. i 2. konačno mnogo puta.

Na primer funkcija $|x| = \sqrt{x^2}$ je elementarna i takođe funkcija

$$y = \frac{\ln(\arccos(\sqrt{x^2+x+1}))}{\sqrt[3]{e^{\operatorname{arctg}(x^2+1)}}}.$$

Tvrđenje 2.89. *Funkcija $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, neprekidna je u svakoj tački svog domena.*

Dokaz. Primetimo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi implikacija:

$$0 < x_1 < x_n \Longrightarrow 0 < x_1^n < x_2^n. \tag{2.61}$$

Neka je n neparan broj. Funkcija $f(x) = x^n$ je strogo rastuća na skupu $(-\infty, +\infty)$. Zaista, ako je $0 < x_1 < x_2$, onda je $0 < x_1^n < x_2^n$ ((2.61)), tj. $f(0) < f(x_1) < f(x_2)$. Ako je $x_1 < x_2 < 0$ onda je $0 < -x_2 < -x_1$, pa je na osnovu (2.61) $0 < (-x_2)^n < (-x_1)^n$. Kako je n neparan broj, to je $(-x_1)^n = -x_1^n$ i $(-x_2)^n = -x_2^n$, i prema tome, $0 < -x_2^n < -x_1^n$. Odavde sledi $x_1^n < x_2^n < 0$, tj. $f(x_1) < f(x_2) < f(0)$. Za slučaj da je $x_1 < 0 < x_2$, važi $-x_1 > 0$, pa je $(-x_1)^n > 0$, tj. $-x_1^n > 0$. Stoga je $f(x_1) = x_1^n < 0 < x_2^n = f(x_2)$. Na osnovu Primera 2.70 funkcija f je neprekidna na na skupu $(-\infty, +\infty)$. Kako je na osnovu Posledice 2.34 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, iz Teoreme 2.84 sledi da je inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ definisana, strogo rastuća i neprekidna na skupu $(-\infty, +\infty)$.

Pretpostavimo sada da je n paran broj. Funkcija $g(x) = x^n$ strogo rastuća i neprekidna na intervalu $[0, +\infty)$ (na osnovu Primera 2.70). Budući da je $g(0) = 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, iz Teoreme 2.85 sledi da je inverzna funkcija $g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ definisana, strogo rastuća i neprekidna na intervalu $[0, +\infty)$. ■

Tvrđenje 2.90. *Neka su $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, i p i q uzajamno prosti. Funkcija $f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ je neprekidna u svakoj tački svog domena.*

Dokaz. Neka je $h(x) = x^p$ i $g(x) = \sqrt[q]{x}$. Sa D_f (respektivno, D_g, D_h) označavamo domen funkcije f (respektivno, g, h).

Neka je q neparan broj i $p > 0$. Tada je $D_g = \mathbb{R}$ i važi $f = g \circ h$ i $D_f = D_h = \mathbb{R}$.

Ako je q neparan broj i $p < 0$, onda je $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a s obzirom da je $D_g = \mathbb{R}$ sledi $D_f = D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ako je q paran broj i $p > 0$ neparan broj, tada je $D_g = [0, +\infty)$ i $h([0, +\infty)) \subset [0, +\infty)$, dok je $h((-\infty, 0)) \subset (-\infty, 0)$ (p je neparan broj), pa je za funkciju $f = g \circ h$ domen $D_f = [0, +\infty)$.

Neka je q paran broj i $p < 0$ neparan broj. Tada je $D_g = [0, +\infty)$ i $D_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Kako je $h((0, +\infty)) \subset (0, +\infty)$ i $h((-\infty, 0)) \subset (-\infty, 0)$ (p je neparan broj), sledi da je domen funkcije $f = g \circ h$ interval $(0, +\infty)$.

U sva četiri slučaja funkcija f je neprekidna u svakoj tački svog domena na osnovu Tvrđenja 2.89, Primera 2.70 i Tvrđenja 2.77. ■

Teorema 2.91. *Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, $a > 0$, je neprekidna na skupu $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Ako je $a = 1$ onda je $y = 1^x = 1$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i ovo je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.

Neka je sada $a \neq 1$. Dokažimo da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1. \tag{2.62}$$

Neka je najpre $a > 1$ i neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}$ to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon \ \text{ i } \ 1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon. \tag{2.63}$$

Neka je $\delta = \dfrac{1}{n_0}$. Tada, ako je $|\Delta x| < \delta$, onda je $-\dfrac{1}{n_0} < \Delta x < \dfrac{1}{n_0}$ i iz činjenice da je $y = a^x$ rastuća funkcija sledi

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\Delta x} < a^{\frac{1}{n_0}}. \tag{2.64}$$

Iz (2.63) i (2.64) sledi

$$1 - \varepsilon < a^{\Delta x} < 1 + \varepsilon.$$

Prema tome, (2.62) važi za $a > 1$. Neka je sada $0 < a < 1$. Tada je $b = \dfrac{1}{a} > 1$ i važi $\lim\limits_{\Delta x\to 0} b^{\Delta x} = 1$, te je na osnovu Tvrđenja 2.28 ((2.20))

$$\lim_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{b^{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} b^{\Delta x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Prema tome, (2.62) važi i za $0 < a < 1$.

Iz (2.62) sledi

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} \left(a^{x+\Delta x} - a^x\right) = \lim_{\Delta x\to 0} a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right) = 0,$$

što znači da je funkcija $y = a^x$ neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$. ■

Posledica 2.92. *Funkcija $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ je neprekidna funkcija na skupu $(0, +\infty)$.*

Dokaz. Za $a > 1$ $(0 < a < 1)$ funkcija $y = a^x$ je strogo rastuća (opadajuća) na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Kako je za $a > 1$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty,$$

dok za $0 < a < 1$ važi

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0,$$

na osnovu Teoreme 2.84 i Teoreme 2.91 sledi da je inverzna funkcija $y = \log_a x$ neprekidna na intervalu $(0, +\infty)$. ■

Posledica 2.93. *Funkcija $y = x^\alpha$ je neprekidna funkcija na skupu* $(0, +\infty)$.

Dokaz. Kako je $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, tvrđenje sledi iz Teoreme 2.91, Posledice 2.92 i Teoreme 2.77. ■

Teorema 2.94. *Funkcije $y = \sin x$ i $y = \cos x$ su neprekidne na skupu* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Sledi iz (2.26) i (2.27). ■

Posledica 2.95. *Funkcije $y = \mathrm{tg}x$ i $y = \mathrm{ctg}x$ su neprekidne u svakoj tački svog domena.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.94 i Teoreme 2.75 funkcija $y = \mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ je neprekidna u skakoj tački $x \in \mathbb{R}$ za koju je $\cos x \neq 0$. Analogno i $y = \mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ je neprekidna funkcija u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ za koju je $\sin x \neq 0$. ■

Neka je funkcija $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ definisana sa $f_1(x) = \sin x$, drugim rečima f_1 je restrikcija funkcije sin na segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. S obzirom da je f_1 strogo rastuća i neprekidna funkcija na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $f_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ i $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, na osnovu Teoreme 2.83 sledi $f_1\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$ i postoji inverzna funkcija funkcije f_1, $f_1^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ koja je takođe strogo rastuća i neprekidna na segmentu $[-1, 1]$, i ovu funkciju označavamo sa arcsin: $f_1^{-1}(x) = \arcsin x$.

Funkcija $f_2 : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definisana sa $f_1(x) = \cos x$ (f_2 je restrikcija funkcije cos na segment $[0, \pi]$) je strogo opadajuća i neprekidna, $f_2(0) = 1$, $f_2(\pi) = -1$, pa na osnovu Teoreme 2.83 sledi $f_2([0, \pi]) = [-1, 1]$ i postoji inverzna funkcija ove funkcije, $f_2^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, nju označavamo sa arccos, $f_2^{-1}(x) = \arccos x$, i ova funkcija je strogo opadajuća i neprekidna na segmentu $[-1, 1]$.

Funkcija $f_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definisana sa $f_3(x) = \mathrm{tg}\, x$ (f_3 je restrikcija funkcije tg na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) je strogo rastuća i neprekidna i budući da je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \mathrm{tg}x &= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{-1}{+0}\right) = -\infty, \\
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \mathrm{tg}x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty,
\end{aligned}$$

iz Teoreme 2.84 sledi $f_3\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=\mathbb{R}$, inverzna funkcija f_3^{-1} je definisana, strogo rastuća i neprekidna na $\mathbb{R}$. Ovu funkciju označavamo je sa arctg. Prema tome, $f_3^{-1}(x)=\operatorname{arctg}x$ i $f_3^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Funkcija $f_4:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ definisana sa $f_3(x)=\operatorname{ctg}x$ (f_4 je restrikcija funkcije ctg na interval $(0,\pi)$) je strogo opadajuća i neprekidna i s obzirom da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\operatorname{ctg}x &= \lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{\sin x}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty,\\ \lim_{x\to\pi-0}\operatorname{ctg}x &= \lim_{x\to\pi-0}\frac{\cos x}{\sin x}=\left(\frac{-1}{+0}\right)=-\infty,\end{aligned}$$

na osnovu Teoreme 2.84 zaključujemo da je $f_4\left((0,\pi)\right)=\mathbb{R}$ i inverzna funkcija f_4^{-1} je definisana, strogo opadajuća je i neprekidna na $\mathbb{R}$. Ovu funkciju označavamo sa arcctg. Prema tome, $f_4^{-1}(x)=\operatorname{arcctg}x$ i $f_4^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$.

Tako smo dokazali sledeću posledicu:

Posledica 2.96. *Inverzne trigonometrijske funkcije $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$ i $y=\operatorname{arcctg}x$ su neprekidne u svakoj tački svog domena.*

Teorema 2.97. *Svaka elementarna funkcija je neprekidna u svakoj tački svog domena.*

Dokaz. Dokazali smo da je svaka osnovna elementarna funkcija neprekidna u svakoj tački svog domena. Sada iz Definicije 2.88 i Teorema 2.75 i 2.77 sledi tvrđenje teoreme. ■

Primetimo da funkcija $y=\operatorname{sgn}x$ nije elementarna, bez obzira na njen relativno jednostavan analitički izraz, jer nije neprekidna u 0.

Definicija 2.98. Za skup $X\subset\mathbb{R}$ kažemo da je *simetričan u odnosu na* 0 ili samo *simetričan* ako iz $x\in X$ sledi $-x\in X$. Za funkciju $f:X\to\mathbb{R}$, gde je $X\subset\mathbb{R}$ simetričan skup, kažemo da je *parna* ako je

$$f(-x)=f(x) \text{ za sve } x\in X,$$

a *neparna* ako je

$$f(-x)=-f(x) \text{ za sve } x\in X.$$

Napomena 2.99. Ako je neparna funkcija $f:X\to Y$ bijekcija (X je simetričan skup), onda ona ima inverznu funkciju $f^{-1}:Y\to X$ koja je takođe neparna. Zaista, za proizvoljno $y\in Y$ postoji $x\in X$ tako da je $f(x)=y$. Stoga je $-y=-f(x)=f(-x)\in Y$, pa je Y takođe simetričan skup i

$$f^{-1}(-y)=f^{-1}(-f(x))=f^{-1}(f(-x))=-x=-f^{-1}(y),$$

što znači da je f^{-1} neparna.

Funkcija arcsin je inverzna funkcija restrikcije funkcije sin na segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (ovo je simetričan skup), i kako je ova restrikcija funkcije sin neparna funkcija, to je arcsin neparna i zato je $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ za svako $x \in [-1, 1]$. Takođe funkcija arctg je inverzna funkcija restrikcije funkcije tg na interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (koji je simetričan), i s obzirom da je ova restrikcija funkcije tg neparna funkcija, to je i arctg neparna funcija, pa je $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Primer 2.100. Dokažimo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}. \tag{2.65}$$

Zbog neprekidnosti funkcije $y = \log_a x$, iz (2.40) sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left(\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e.$$

Iz (2.65) sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1. \bullet \tag{2.66}$$

Primer 2.101. Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b \in \mathbb{R}$ onda je

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b.$$

Zaista, iz neprekidnosti logaritamske funkcije sledi $\lim\limits_{x\to x_0} \ln u(x) = \ln a$. Sada zbog neprekidnosti ekponencijalne funkcije zaključujemo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} &= \lim_{x\to x_0} e^{\ln u(x)^{v(x)}} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x) \lim\limits_{x\to x_0} \ln u(x)} = e^{b\ln a} = e^{\ln a^b} = a^b. \bullet\end{aligned}$$

Primer 2.102. Pokažimo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \tag{2.67}$$

Uvedimo smenu $a^x - 1 = t$. Tada je $x = \log_a(1+t)$ i $x \to 0$ ako i samo ako $t \to 0$ i $t \neq 0$ ako i samo ako je $x \neq 0$. Sada na osnovu Teoreme 2.51 i Napomene 2.56 sledi da granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ postoji ako i samo ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)}$ i da važi jednakost $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)}$. Stoga iz (2.65) sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a.$$

Prema tome,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1. \bullet \tag{2.68}$$

Primer 2.103. Dokazaćemo da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \ \alpha\in\mathbb{R}. \tag{2.69}$$

Ako je $\alpha=0$, onda (2.69) očigledno važi.
Pretpostavimo da je $\alpha\neq 0$.
Primetimo da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha\ln(1+x)}\right)=\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\right).\end{aligned} \tag{2.70}$$

Smenom $t=\alpha\ln(1+x)$ ($x\to 0\Longrightarrow t\to 0$, $x\neq 0\Longrightarrow t\neq 0$), na osnovu Teoreme 2.51 iz (2.68) dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1, \tag{2.71}$$

dok iz (2.66) sledi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha. \tag{2.72}$$

Iz (2.70), (2.71) i (2.72) sledi

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.\ \bullet$$

Primer 2.104. Pokazaćemo da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

Uvođenjem smene $t=\arcsin x$ (funkcija $t=\arcsin x$ je neprekidna u 0 i funkcija $x=\sin t$ je neprekidna u 0, te: $x\to 0\Longleftrightarrow t\to 0$ i pri tom je $x\neq 0\Longleftrightarrow t\neq 0$), na osnovu Teoreme 2.51 i Napomene 2.56 sledi da granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$ postoji ako i samo ako postoji granična vrednost $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}$ i da važi jednakost $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}$. Sada iz (2.28) sledi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=1.\ \bullet$$

Primer 2.105. Pokažimo da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Zaista, smenom $\operatorname{arctg} x = t$ ($x=\operatorname{tg} t$, $x\to 0 \iff t\to 0$, $x\neq 0 \iff t\neq 0$), na osnovu Teoreme 2.51, Napomene 2.56 i Primera 2.46, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} t}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}}=1. \bullet$$

2.9 Asimptotske oznake o i $\sim$

Ako ispitujemo ponašanje neke funkcije u okolini $+\infty$ ili $-\infty$, ili u okolini neke konačne tačke u kojoj funkcija nije definisana, i upoređujemo ga sa ponašanjem neke druge, jednostavnije ili već proučene funkcije, onda kažemo da ispitujemo *asimptotsko ponašanje* date funkcije u okolini te tačke.

Definicija 2.106. Ako postoji okolina tačke $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, $U(x_0)$, tako da je

$$f(x)=\varepsilon(x)g(x) \text{ za svako } x\in \overset{\circ}{U}(x_0),$$

gde je ε beskonačno mala funkcija kad $x\to x_0$, tada kažemo da je funkcija f *beskonačno mala u odnosu na g kad $x\to x_0$* i pišemo

$$f=o(g) \text{ kad } x\to x_0 \tag{2.73}$$

(čitamo: "f je malo o od g kad x teži ka x_0").

Osim toga, ako su funkcije f i g još i beskonačno male funkcije kad $x\to x_0$, onda kažemo da je f beskonačno mala višeg reda u odnosu na g kad $x\to x_0$ ili "da f brže teži nuli nego funkcija g kad $x\to x_0$".

Primetimo da sada uslov da je f beskonačno mala funkcija kad $x\to x_0$ možemo zapisati na sledeći način:

$$f=o(1) \text{ kad } x\to x_0.$$

Ako je $g(x)\neq 0$ za $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$, onda je uslov (2.73) ekvivalentan uslovu

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0. \tag{2.74}$$

Prema tome, ako je $g(x)\neq 0$ za $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$, onda je

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o(g)}{g}=0.$$

Primer 2.107. Primetimo da je $x^2 = o(x)$ kad $x \to 0$, jer $x^2 = x \cdot x$ i $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$. Takođe je i $x^3 = o(x)$ kad $x \to 0$, jer $x^3 = x^2 \cdot x$ i $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, odnosno $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x} = 0$. Zaključujemo da je i $x^n = o(x)$, $x \to 0$ za $n \geq 2$.

Primetimo da $o(x)$ kad $x \to 0$, ne označava samo jednu funkciju, već sve funkcije koje su beskonačno male višeg reda u odnosu na x kad $x \to 0$ i zbog toga bi možda bilo pravilnije pisati $x^2 \in o(x)$, $x \to 0$; $x^3 \in o(x)$, $x \to 0; \ldots$. Međutim, usvojeno je da se umesto znaka $\in$ piše znak jednakosti i navedena nekorektnost u pisanju omogućuje jednostavnu primenu, a ne dovodi do zabune ako naglasimo da se jednakosti u kojima se javlja malo o čitaju samo sleva u desno; na primer, $x^3 = o(x)$, $x \to 0$, dok $o(x) = x^3$, $x \to 0$, nema smisla.

Primetimo još da nije $x^3 = o(x)$ kad $x \to 1$, jer $x^3 = x^2 \cdot x$ ali x^2 ne teži nuli kad $x \to 1$. Ovaj primer ukazuje na to da je navođenje tačke ka kojoj teži promenljiva x nerazdvojni deo ove oznake.

Dalje je $x = o(x^2)$ kad $x \to +\infty$, a takođe i kad $x \to -\infty$, jer $x = \dfrac{1}{x}x^2$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Kako je $\dfrac{1}{x^4} = \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{x^2}$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, to je $\dfrac{1}{x^4} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ kad $x \to \pm\infty$.

Primetimo da ako je $f = o(g)$ kad $x \to x_0$, to znači da (naravno pod uslovom da je $g(x) \neq 0$ za svako x iz neke probodene okoline tačke x_0) količnik funkcija f i g teži nuli kad $x \to x_0$, dok nemamo nikakvu informaciju o ponašanju funkcija f i g pojedinačno kad $x \to x_0$. Može da se desi da funkcije f ili g i nemaju graničnu vrednost kad $x \to x_0$. Recimo ako je $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ i $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, tada je $f(x) = xg(x)$ i $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, te je $f = o(g)$ kad $x \to 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, dok $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ne postoji. Ako je $f(x) = x \sin x$, a $g(x) = x^2 \sin x$, nije teško proveriti da ne postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, a takođe ni $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, dok iz $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot g(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ sledi $f = o(g)$ kad $x \to +\infty$.

Budući da je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, sledi $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = 0$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x} = 0$, te je $\ln(1+x) - x = o(x)$, $x \to 0$, odnosno

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad x \to 0. \tag{2.75}$$

Takođe, iz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ imamo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1 - x\ln a}{x} = 0$, i zato je $a^x - 1 - x \ln a = o(x)$, $x \to 0$, tj.

$$a^x = 1 + x\ln a + o(x), \quad x \to 0. \tag{2.76}$$

Analogno, iz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ sledi $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x} = 0$.

Sledi $\sin x - x = o(x),\ x \to 0$, tj.

$$\sin x = x + o(x),\ x \to 0. \bullet \tag{2.77}$$

U sledećoj teoremi izlažemo neke osobine ove oznake.

Tvrđenje 2.108. *Neka su funkcije f i g definisane u nekoj probodenoj okolini tačke x_0. Tada:*

(i) *$o(cg) = o(g),\ x \to x_0$, gde je $c \in \mathbb{R}$ konstanta.*

(ii) *Ako je $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, onda je $o(g) = o(cg)$, $x \to x_0$.*

(iii) *$f \cdot o(g) = o(fg),\ x \to x_0$.*

(iv) *$co(g) = o(g),\ x \to x_0$, gde je $c \in \mathbb{R}$ konstanta.*

(v) *Ako je $f(x) \neq 0$ za svako x iz neke probodene okoline tačke x_0, onda je $\dfrac{o(g)}{f} = o\left(\dfrac{g}{f}\right),\ x \to x_0$.*

(vi) *$o(g) + o(g) = o(g),\ x \to x_0$.*

(vii) *$o(o(g)) = o(g),\ x \to x_0$.*

(viii) *$o(g + o(g)) = o(g),\ x \to x_0$.*

(ix) *Za $n \in \mathbb{N}$, $(o(g))^n = o(g^n),\ x \to x_0$.*

(x) *Za $n \in \mathbb{N}$, $(g + o(g))^n = g^n + o(g^n),\ x \to x_0$.*

(xi) *Ako je $f = g + o(g),\ x \to x_0$, onda postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tako da je za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $\operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(g(x))$.*

(xii) *Ako je α beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$, onda je $o(\alpha + \alpha^2) = o(\alpha)$ kad $x \to x_0$.*

Važi i opštije tvrđenje: Ako je α beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$ i $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da je $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, onda je $o(\alpha^{n_1} + \alpha^{n_2} + \dots \alpha^{n_k}) = o(\alpha^{n_1})$ kad $x \to x_0$.

Dokaz. (i) Budući da jednakosti u kojima učestvuje malo o treba čitati sleva u desno, da bi dokazali da je $o(cg) = o(g),\ x \to x_0$, treba da dokažemo da ako je neka funkcija h beskonačno mala u odnosu na cg kad $x \to x_0$, da je onda h beskonačno mala u odnosu na g kad $x \to x_0$. Iz $h = o(cg)$, $x \to x_0$, sledi da postoji probodena okolina tačke x_0 u kojoj važi jednakost

$$h(x) = \varepsilon(x)(cg(x)) = (c\varepsilon(x))g(x),$$

gde je ε beskonačno mala kad $x \to x_0$. Kako je onda i $c\varepsilon$ beskonačno mala kad $x \to x_0$, zaključujemo da je $h = o(g)$, $x \to x_0$.

(ii) Treba dokazati da ako je neka funkcija h beskonačno mala u odnosu na g kad $x \to x_0$, da je onda h beskonačno mala u odnosu na cg kad $x \to x_0$ gde je $c \in \mathbb{R}$,

$c \neq 0$. Iz $h = o(g)$, $x \to x_0$, sledi da postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0 u kojoj važi jednakost

$$h(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

gde je ε beskonačno mala kad $x \to x_0$.

Tada za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi

$$h(x) = \left(\frac{1}{c}\varepsilon(x)\right) cg(x),$$

Kako je onda i $\frac{1}{c}\varepsilon$ beskonačno mala kad $x \to x_0$, zaključujemo da je $h = o(cg)$, $x \to x_0$.

(iii) Treba dokazati da iz uslova da je funkcija h beskonačno mala u odnosu na g kad $x \to x_0$, sledi da je proizvod fh beskonačno mala u odnosu na fg kad $x \to x_0$. Iz $h = o(g)$, $x \to x_0$ sledi da postoji probodena okolina tačke x_0, $\overset{\circ}{U}(x_0)$, tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi $h(x) = \varepsilon(x)g(x)$, gde je ε beskonačno mala kad $x \to x_0$. Tada je $f(x)h(x) = \varepsilon(x)(f(x)g(x))$ za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, i zato je $fh = o(fg)$ kad $x \to x_0$.

(iv) Sledi iz (i) i (iii).

(v) Na osnovu (iii) imamo

$$\frac{o(g)}{f} = \frac{1}{f} \cdot o(g) = o\left(\frac{1}{f} \cdot g\right) = o\left(\frac{g}{f}\right), \quad x \to x_0.$$

(vi) Ako su h_1 i h_2 dve beskonačno male u odnosu na g kad $x \to x_0$, dokažimo da je takav i njihov zbir. Iz $h_1 = o(g)$ i $h_2 = o(g)$ kad $x \to x_0$ sledi da postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi $h_1(x) = \varepsilon_1(x)g(x)$ i $h_2(x) = \varepsilon_2(x)g(x)$, gde su ε_1 i ε_2 beskonačno male kad $x \to x_0$. Kako je zbir dve beskonačno male kad $x \to x_0$ opet beskonačno mala kad $x \to x_0$ (Tvrđenje 2.37), i kako je

$$h_1(x) + h_2(x) = (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))g(x), \quad x \in \overset{\circ}{U}(x_0),$$

zaključujemo da je $h_1 + h_2 = o(g)$, $x \to x_0$.

(vii) Pretpostavimo da je $h = o(o(g))$ kad $x \to x_0$. To znači da je $h = o(h_1)$, $x \to x_0$ za neku funkciju h_1 takvu da je $h_1 = o(g)$, $x \to x_0$. Dakle postoji probodena okolina tačke x_0, $\overset{\circ}{U}(x_0)$, tako da je za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $\quad h(x) = \alpha(x)h_1(x)$ i $h_1(x) = \beta(x)g(x)$, gde su α i β dve beskonačno male funkcije kad $x \to x_0$. Na osnovu Tvrđenja 2.37 sledi da je $\alpha\beta$ beskonačno mala kad $x \to x_0$, i zato iz

$$h(x) = (\alpha(x)\beta(x))g(x), \quad x \in \overset{\circ}{U}(x_0),$$

zaključujemo da je $h = o(g)$ kad $x \to x_0$.

(viii) Neka je $h = o(g + o(g))$, $\quad x \to x_0$. To znači da postoji funkcija h_1 takva da je $h_1 = o(g)$, $x \to x_0$, i $h = o(g + h_1)$, $x \to x_0$. Sledi postoji okolina $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi $h(x) = \varepsilon_1(x)(g(x) + \varepsilon_2(x)g(x)) = \varepsilon_1(x)(1 + \varepsilon_2(x))g(x)$, gde su ε_1 i ε_2 beskonačno male kad $x \to x_0$. Kako je $\lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x)(1 + \varepsilon_2(x)) = \lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x)(1 + \lim_{x\to x_0} \varepsilon_2(x)) = 0(1 + 0) = 0$, sledi da je $h = o(g)$ kad $x \to x_0$.

(ix) Neka je $n \in \mathbb{N}$, i neka je $h = o(g)$ kad $x \to x_0$. Dokažimo da je $h^n = o(g^n)$, $x \to x_0$. Iz $h = o(g)$ kad $x \to x_0$ sledi da postoji okolina $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tako da za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi jednakost $h(x) = \varepsilon(x)g(x)$, gde je ε beskonačno mala kad $x \to x_0$. Tada je $(h(x))^n = (\varepsilon(x))^n(g(x))^n$, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, i ε^n je beskonačno mala kad $x \to x_0$ (Tvrđenje 2.37), odakle zaključujemo da je h^n beskonačno mala u odnosu na g^n kad $x \to x_0$.

(x) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu binomne formule, (ix), (iii), (iv) i (vi) imamo

$$\begin{aligned}(g + o(g))^n = \; & g^n + \tbinom{n}{1}g^{n-1}o(g) + \tbinom{n}{2}g^{n-2}(o(g))^2 + \tbinom{n}{3}g^{n-3}(o(g))^3 + \dots \\ & \dots + \tbinom{n}{n-1}g(o(g))^{n-1} + (o(g))^n = g^n + o(g^n), \quad x \to x_0.\end{aligned}$$

(xi) Neka je $f = g + o(g)$, $\quad x \to x_0$, i neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ tačke x_0 takva da je

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x), \quad \text{za } x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), \tag{2.78}$$

gde je ε beskonačno mala kad $x \to x_0$. Iz $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ sledi da postoji $\delta < \delta_0$ tako da je za svako $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, $|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2}$, tj. $-\frac{1}{2} < \varepsilon(x) < \frac{1}{2}$. Prema tome, $\frac{1}{2} < 1 + \varepsilon(x)$ za $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, i na osnovu (2.78) zaključujemo da su $f(x)$ i $g(x)$ istog znaka za $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Slično se razmatra slučaj kada je $x_0 = +\infty$ ili $x_0 = -\infty$.

(xii) Neka je α beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$, i neka je $h = o(\alpha + \alpha^2)$ kad $x \to x_0$. Tada postoji probodena okolina $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0 tako da je

$$h(x) = \varepsilon(x)(\alpha(x) + \alpha^2(x)), \quad \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(x_0),$$

gde je $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Odavde sledi

$$h(x) = \varepsilon(x)(1 + \alpha(x))\alpha(x), \quad \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$$

i $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x)(1 + \alpha(x)) = \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x)\ (1 + \lim_{x\to x_0} \alpha(x)) = 0(1 + 0) = 0$, pa je $h = o(\alpha)$, kad $x \to x_0$. $\blacksquare$

Primer 2.109. Kako je za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x^n = o(x)$ i $o(x^n) = o(x)$ kad $x \to 0$, to iz Tvrđenja 2.108 (vi) sledi $x^n + o(x) = o(x) + o(x) = o(x)$ kad $x \to 0$, i $o(x^n) + o(x) = o(x) + o(x) = o(x)$ kad $x \to 0$.

Analogno, za $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, važi $x^m + o(x^n) = o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$, $x \to 0$, i $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$, $x \to 0$.

Takođe je $\frac{1}{x^m} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ kad $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), i $o\left(\frac{1}{x^m}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ kad $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), za $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. $\bullet$

Definicija 2.110. Za funkciju f kažemo da se *asimptotski ponaša* kao funkcija g kad $x \to x_0$, (ili da je *asimptotski jednaka* funkciji g kad $x \to x_0$) ili da je funkcija f *ekvivalentna* sa funkcijom g kad $x \to x_0$, ako postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 i funkcija α, takve da je $f(x) = \alpha(x)g(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ i $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$. U tom slučaju pišemo

$$f \sim g \;\text{ kad } x \to x_0.$$

Primetimo, da ako postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 takva da je $g(x) \neq 0$ za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, onda je $f \sim g$ kad $x \to x_0$ ako i samo ako je $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ovo je pak ekvivalentno s tim da je $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. Odavde sledi, $f \sim g$ kad $x \to x_0$ ako i samo ako je $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$ i $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0$, tj. važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.111. *Ako postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 takva da je $g(x) \neq 0$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, funkcija f je ekvivalentna funkciji g kad $x \to x_0$ ako i samo ako je $\frac{f-g}{f}$ (ili $\frac{f-g}{g}$) beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$.*

Drugim rečima, ako postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 takva da je $g(x) \neq 0$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, tada je funkcija f ekvivalentna funkciji g kad $x \to x_0$ ako i samo ako je relativna greška $\left|\frac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right|$ aproksimacije funkcije f funkcijom g beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$. [10]

Primeri 2.112. (i) Iz $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ((2.28)) sledi $\sin x \sim x$ kad $x \to 0$.

(ii) Iz $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (Primer 2.46) sledi $\operatorname{tg} x \sim x$ kad $x \to 0$.

(iii) Iz $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ (Primer 2.104) sledi $\arcsin x \sim x$ kad $x \to 0$.

(iv) Iz $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ (Primer 2.105) sledi $\operatorname{arctg} x \sim x$ kad $x \to 0$.

(v) Iz $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$ ((2.66)) sledi $\ln(1 + x) \sim x$ kad $x \to 0$.

[10] Primetimo da je α beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$ ako i samo ako je $|\alpha|$ beskonačno mala funkcija kad $x \to x_0$.

(vi) Iz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ((2.68)) sledi $e^x-1\sim x$ kad $x\to 0$.

(vii) Iz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ (Primer 2.102) sledi $a^x-1\sim x\ln a$ kad $x\to 0$, odnosno $\dfrac{a^x-1}{\ln a}\sim x$ kad $x\to 0$.

(viii) Iz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, (Primer 2.103) sledi $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ kad $x\to 0$, i prema tome, $\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha}\sim x$ kad $x\to 0$.

(ix) Iz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ (Primer 2.55) sledi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1$, te je $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ kad $x\to 0$, i prema tome

$$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2\ \text{ kad } x\to 0.\ \bullet$$

Tvrđenje 2.113. *Relacija $\sim$ $(x\to x_0)$ je relacija ekvivalencije u skupu funkcija definisanih u nekoj probodenoj okolini tačke x_0.*

Dokaz. Očigledno je $f\sim f$ kad $x\to x_0$.

Neka je $f\sim g$ kad $x\to x_0$. Tada postoji okolina $U_0(x_0)$ tačke x_0 i funkcija α takve da je $f(x)=\alpha(x)g(x)$ za svako $x\in\overset{\circ}{U}_0(x_0)$ i $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=1$. Iz Posledice 2.23 sledi da postoji okolina $U(x_0)\subset U_0(x_0)$ tačke x_0 tako da je $\alpha(x)\neq 0$ za svako $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$. Tada za funkciju β definisanu sa $\beta(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$, $x\in U(x_0)$, važi $g(x)=\beta(x)f(x)$ za $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$ i $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)}=1$. Prema tome, $g\sim f$ kad $x\to x_0$ i relacija $\sim$ $(x\to x_0)$ je simetrična.

Neka je $f\sim g$ i $g\sim h$ kad $x\to x_0$. Tada postoje okoline $U_1(x_0)$ i $U_2(x_0)$ tačke x_0 i funkcije α_1 i α_2 takve da je $f(x)=\alpha_1(x)g(x)$ za svako $x\in\overset{\circ}{U}_1(x_0)$, $g(x)=\alpha_2(x)h(x)$ za svako $x\in\overset{\circ}{U}_2(x_0)$ i $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_2(x)=1$. Tada je $f(x)=\alpha_1(x)\alpha_2(x)h(x)$ za svako $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)=\overset{\circ}{U}_1(x_0)\cap\overset{\circ}{U}_2(x_0)$ i $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)\alpha_2(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_2(x)=1\cdot 1=1$. Sledi $f\sim h$ kad $x\to x_0$. Prema tome, relacija $\sim$ $(x\to x_0)$ je tranzitivna. ■

Na osnovu Primera 2.112 i Tvrđenja 2.113 možemo pisati:

$$\begin{aligned} x\ &\sim\ \sin x\sim\operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg} x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\frac{a^x-1}{\ln a}\sim\\ &\sim\ \frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha},\quad x\to 0.\end{aligned}$$

Tvrđenje 2.114. *Funkcija f je ekvivalentna funkciji g kad $x\to x_0$ ako i samo ako je $f=g+o(g)$ kad $x\to x_0$.*

Dokaz. Neka je $f \sim g$ kad $x \to x_0$. Tada postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 i funkcija α, takve da je $f(x) = \alpha(x)g(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ i $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$. Odavde, za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi

$$f(x) - g(x) = \alpha(x)g(x) - g(x) = (\alpha(x) - 1)g(x).$$

Neka je $\varepsilon(x) = \alpha(x) - 1$, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Tada je $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) - 1 = 1 - 1 = 0$ i $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$ za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Prema tome, $f = g + o(g)$ kad $x \to x_0$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $f = g + o(g)$ kad $x \to x_0$. Tada postoji okolina U tačke x_0 i funkcija ε takve da je $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$ za $x \in \overset{\circ}{U}$ i $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Sledi $f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x)$, $x \in \overset{\circ}{U}$. Neka je $\alpha(x) = 1+\varepsilon(x)$. Tada je $f(x) = \alpha(x)g(x)$ za $x \in \overset{\circ}{U}$ i $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1 + \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 1 + 0 = 1$. Sledi $f \sim g$ kad $x \to x_0$. ■

Primeri 2.115. Iz Primera 2.112 (ii), (iii), (iv), (vi), (viii), (ix) i Tvrđenja 2.114 sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x &= x + o(x), \quad x \to 0,\\
\arcsin x &= x + o(x), \quad x \to 0,\\
\operatorname{arctg} x &= x + o(x), \quad x \to 0,\\
e^x - 1 &= x + o(x), \text{ tj. } e^x = 1 + x + o(x), \quad x \to 0, \qquad (2.79)\\
a^x - 1 &= x\ln a + o(x\ln a), \text{ tj. } a^x = 1 + x\ln a + o(x), \quad x \to 0,\\
(1+x)^\alpha - 1 &= \alpha x + o(\alpha x), \text{ tj. } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x \to 0,\\
\cos x - 1 &= -\frac{1}{2}x^2 + o(-\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \text{ tj.}\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \ x \to 0. \bullet
\end{aligned}$$

Tvrđenje 2.116. *Neka je funkcija v definisana u nekoj probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(x_0)$ tačke x_0 i neka je*

$$\lim_{x\to x_0} v(x) = 0.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
v(x) &\sim \sin v(x) \sim \operatorname{tg} v(x) \sim \arcsin v(x) \sim \operatorname{arctg} v(x) \sim \ln(1+v(x)) \sim e^{v(x)} - 1 \sim\\
&\sim \frac{a^{v(x)} - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+v(x))^\alpha - 1}{\alpha}, \quad x \to x_0,
\end{aligned}$$

i

$$\cos v(x) - 1 \sim -\frac{1}{2}(v(x))^2, \quad x \to x_0.$$

Dokaz. Dokažimo da je $e^{v(x)} - 1 \sim v(x)$ kad $x \to x_0$.

Neka je funkcija $h : \overset{\circ}{U}(x_0) \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{v(x)} - 1}{v(x)}, & \text{za } v(x) \neq 0 \\ \\ 1, & \text{za } v(x) = 0. \end{cases}$$

Kako je $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0$, na osnovu Teoreme 2.61 sledi $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 1$. Sada iz $e^{v(x)} - 1 = h(x)v(x)$, $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, sledi $e^{v(x)} - 1 \sim v(x)$ kad $x \to x_0$.

Analogno se dokazuju ostale asimptotske formule. ■

Posledica 2.117. *Neka je funkcija v definisana u nekoj probodenoj okolini tačke tačke x_0 i neka je*

$$\lim_{x\to x_0} v(x) = 0.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\sin v(x) &= v(x) + o(v(x)), \quad x \to x_0, && (2.80)\\
\operatorname{tg} v(x) &= v(x) + o(v(x)), \quad x \to x_0, && (2.81)\\
\arcsin v(x) &= v(x) + o(v(x)), \quad x \to x_0, && (2.82)\\
\operatorname{arctg} v(x) &= v(x) + o(v(x)), \quad x \to x_0, && (2.83)\\
\ln(1 + v(x)) &= v(x) + o(v(x)), \quad x \to x_0, && (2.84)\\
e^{v(x)} &= 1 + v(x) + o(v(x)), \quad x \to x_0, && (2.85)\\
a^{v(x)} &= 1 + v(x)\ln a + o(v(x)), \quad x \to x_0,\ a > 0, a \neq 1, && (2.86)\\
(1 + v(x))^\alpha &= 1 + \alpha v(x) + o(v(x)), \quad x \to x_0,\ \alpha \in \mathbb{R}, && (2.87)\\
\cos v(x) &= 1 - \frac{1}{2}(v(x))^2 + o((v(x))^2), \quad x \to x_0. && (2.88)
\end{aligned}$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 2.116 i Tvrđenja 2.114. ■

Tvrđenje 2.118. *Neka su funkcije f, g, f_1, g_1 definisane u nekoj probodenoj okolini tačke x_0. Neka je $f \sim f_1$ i $g \sim g_1$ kad $x \to x_0$. Ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, onda postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i važi*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Dokaz. Iz $f \sim f_1$ i $g \sim g_1$ kad $x \to x_0$, sledi postoje okolina $U(x_0)$ tačke x_0 i funkcije α_1 i α_2 takve da je $f(x) = \alpha_1(x)f_1(x)$ i $g(x) = \alpha_2(x)g_1(x)$ za svako $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, i $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \alpha_2(x) = 1$. Tada iz Tvrđenja 2.28 sledi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)f_1(x)}{\alpha_2(x)g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha_2(x)} \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \ ■$$

Primetimo da je u prethodnom tvrđenju egzistencija granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ ekvivalentna egzistenciji granične vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$. Zaista, iz $f\sim f_1$ i $g\sim g_1$, kad $x\to x_0$, sledi $f_1\sim f$ i $g_1\sim g$ kad $x\to x_0$, i ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, na osnovu Tvrđenja 2.118 sledi da postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ i da važi jednakost $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Slično se dokazuje sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.119. *Neka su funkcije f, g i f_1 definisane u nekoj probodenoj okolini tačke x_0 i neka je $f\sim f_1$ kad $x\to x_0$. Tada postoji $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$ ako i samo ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x)g(x))$ i važi*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0}(f_1(x)g(x)).$$

Primer 2.120. Za polinom $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i = 0,1,\ldots,n$, važi da je $a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 = o(x^n)$ kad $x\to+\infty$, pa je $P(x) = a_nx^n + o(x^n) = a_nx^n + o(a_nx^n)$ kad $x\to+\infty$ (Tvrđenje 2.108 (i)). Iz Tvrđenja 2.114 sledi da je $P(x)\sim a_nx^n$ kad $x\to+\infty$. Analogno, $P(x)\sim a_nx^n$ kad $x\to-\infty$.

Za polinom $Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots b_1x + b_0$, $b_i\in\mathbb{R}$, $i = 0,1,\ldots,m$, važi $Q(x)\sim b_mx^m$ kad $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$). Sada na osnovu Tvrđnja 2.118 važi da je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{za } n>m \text{ i } \frac{a_n}{b_m}>0,\\ -\infty, & \text{za } n>m \text{ i } \frac{a_n}{b_m}<0,\\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{za } n=m,\\ 0, & \text{za } n<m,\end{cases}$$

i

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\frac{a_n}{b_m}\,(-\infty)^{n-m}, & \text{za } n>m,\\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{za } n=m,\\ 0, & \text{za } n<m,\end{cases}$$

gde je $(-\infty)^{n-m} = +\infty$ ako je $n-m$ paran broj, $(-\infty)^{n-m} = -\infty$ ako je $n-m$ neparan broj, $1\cdot(+\infty) = +\infty$, $1\cdot(-\infty) = -\infty$, $(-1)\cdot(+\infty) = -\infty$ i $(-1)\cdot(-\infty) = +\infty$. •

Primer 2.121. Naći $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 2x - \ln(1+x+x^2) + \sin^3 4x}{(e^x-1)^2 + \operatorname{tg} 5x}$.

Rešenje: Kako je $\lim\limits_{x\to 0} 2x = \lim\limits_{x\to 0} 4x = \lim\limits_{x\to 0} 5x = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0}(x+x^2) = 0$, iz Posledice 2.117 (tj. iz (2.82), (2.84), (2.80), (2.81)) i Tvrđenja 2.108 (i) sledi

$$\begin{aligned}
\arcsin 2x &= 2x + o(2x),\ x\to 0, &(2.89)\\
\ln(1+x+x^2) &= x + x^2 + o(x+x^2),\ x\to 0,\\
\sin 4x &= 4x + o(4x),\ x\to 0, &(2.90)\\
\operatorname{tg} 5x &= 5x + o(5x) = 5x + o(x),\ x\to 0.
\end{aligned}$$

Iz (2.89), (2.90) i Tvrđenja 2.108 (x) i (i) sledi

$$\begin{aligned}
\arcsin^2 2x &= (2x+o(2x))^2 = (2x)^2 + o((2x)^2) = 4x^2 + o(x^2),\ x\to 0,\\
\sin^3 4x &= = (4x+o(4x))^3 = (4x)^3 + o((4x)^3) = 64x^3 + o(x^3),\ x\to 0.
\end{aligned}$$

Kako je $o(x+x^2) = o(x)$ (Tvrđenje 2.108 (xii)) i $x^2 = o(x)$ kad $x\to 0$, to je $\ln(1+x+x^2) = x + x^2 + o(x) = x + o(x) + o(x) = x + o(x)$, $x\to 0$, na osnovu Tvrđenja 2.108 (vi).

Kako je $e^x - 1 = x + o(x)$ ((2.79)) kad $x\to 0$, to je, na osnovu Tvrđenja 2.108 (x), $(e^x-1)^2 = (x+o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$ kad $x\to 0$.

Prema tome, $\arcsin^2 2x - \ln(1+x+x^2) + \sin^3 4x = 4x^2 + o(x^2) - x + o(x) + 64x^3 + o(x^3) = -x + o(x),\ x\to 0$, i

$$(e^x-1)^2 + \operatorname{tg} 5x = x^2 + o(x^2) + 5x + o(x) = 5x + o(x),\ x\to 0.$$

Kako je $-x + o(x) \sim -x$ i $5x + o(x) = 5x + o(5x) \sim 5x$ kad $x\to 0$, to na osnovu Tvrđenja 2.118 sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin^2 2x - \ln(1+x+x^2) + \sin^3 4x}{(e^x-1)^2 + \operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x+o(x)}{5x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{5x} = -\frac{1}{5}. \bullet$$

Primer 2.122. Pokazaćemo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg}(\ln(1+x))} = 1.$$

Budući da je $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$, iz Tvrđenja 2.116 sledi

$$\ln(1+\operatorname{arctg} x) \sim \operatorname{arctg} x \sim x, \quad x\to 0,$$

i

$$\operatorname{arctg}(\ln(1+x)) \sim \ln(1+x) \sim x, \quad x\to 0.$$

Sada na osnovu Tvrđenja 2.118 sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg}(\ln(1+x))} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Dokaz smo mogli izvesti i korišćenjem asimptotske oznake o, odnosno korišćenjem Posledice 2.117. Naime, iz (2.84) i (2.83) sledi

$$\ln(1+\operatorname{arctg} x) = \operatorname{arctg} x + o(\operatorname{arctg} x) = x + o(x) + o(x + o(x)), \quad x \to 0,$$

i kako je $o(x + o(x)) = o(x)$ na osnovu Tvrđenja 2.108 (viii), to je $\ln(1+\operatorname{arctg} x) = x + o(x) + o(x) = x + o(x)$, $x \to 0$, na osnovu Tvrđenja 2.108 (vi). Slično

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(\ln(1+x)) &= \ln(1+x) + o(\ln(1+x)) = x + o(x) + o(x + o(x)) \\ &= x + o(x) + o(x) = x + o(x), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Prema tome, na osnovu Tvrđenja 2.108 (v) sledi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg}(\ln(1+x))} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x+o(x)}{x}}{\dfrac{x+o(x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+o(1)}{1+o(1)} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(1+o(1))}{\lim\limits_{x\to 0}(1+o(1))} = \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Slično se može dobiti da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin(\ln(1+x))} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\arcsin x)}{\arcsin(\ln(1+x))} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}(\ln(1+x))} = 1. \; \bullet$$

Glava 3

Diferenciranje realnih funkcija jedne realne promenljive

3.1 Izvod i diferencijal

Pojam izvoda je jedan od osnovnih pojmova matematičke analize i zasniva se na pojmu granične vrednosti funkcije u tački.

Definicija 3.1. Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu (a, b), $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, i neka su $x,\ x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Količnik

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se zove srednja brzina promene funkcije na skupu $[x, x_0]$ ako je $x < x_0$, ili skupu $[x_0, x]$ ako je $x_0 < x$.

Ako postoji granična vrednost srednje brzine promene funkcije f na skupu $[x, x_0]$ ili $[x_0, x]$ kad $x \to x_0$, onda se ta granična vrednost naziva *izvod funkcije f u tački x_0*, i označava sa $f'(x_0)$. Dakle,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Kao što smo već rekli u sekciji 3.6, razliku $x - x_0$ zovemo priraštaj argumenta i obeležavamo $\Delta x = x - x_0$. Dakle, $x = x_0 + \Delta x$. Razliku $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ zovemo priraštaj funkcije f u tački x_0 koji odgovara priraštaju argumenta Δx. Definiciju izvoda funkcije f u tački x_0 je sada moguće zapisati i na sledeći način:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ako je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad (\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty),$$

onda kažemo da funkcija f ima *beskonačan izvod u tački* x_0 jednak $+\infty$ $(-\infty)$.

Definicija 3.2. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ako je $f : (a, x_0] \to \mathbb{R}$ i ako postoji konačna ili beskonačna granična vrednost $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (tj. $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$), onda se ta granična vrednost zove *konačni ili beskonačni levi izvod funkcije f u tački x_0* i obeležava sa $f'_-(x_0)$.

Ako je $f : [x_0, b) \to \mathbb{R}$ i ako postoji konačna ili beskonačna granična vrednost $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (tj. $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$), onda se ta granična vrednost zove *konačni ili beskonačni desni izvod funkcije f u tački x_0* i obeležava sa $f'_+(x_0)$.

Teorema 3.3. *Neka je funkcija f definisana u okolini tačke x_0. Funkcija f ima (konačan ili beskonačan) izvod u tački x_0 ako i samo ako ima (konačan ili beskonačan) levi i desni izvod u tački x_0 i ako su oni jednaki.*

Dokaz. Sledi iz definicije izvoda i Tvrđenja 2.10. ■

U daljem tekstu kada kažemo da funkcija ima izvod u tački x_0, podrazumevamo da funkcija ima konačan izvod, ukoliko nije rečeno suprotno. Inače, ako funkcija ima konačan ili beskonačan izvod u tački x_0, onda ćemo reći da funkcija ima *izvod u širem smislu* u tački x_0.

Postupak nalaženja izvoda funkcije se zove *diferenciranje*.

Primer 3.4. Ako je $f(x) = \sqrt{x}$, nađimo $f'(4)$:

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - 2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{4 + \Delta x} - 2)(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)}{\Delta x(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{\Delta x(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x} + 2} = \frac{1}{4}. \bullet
\end{aligned}
$$

Primer 3.5. Ispitajmo u kojim tačkama funkcija $f(x) = |x|$ ima izvod.

Pokazaćemo najpre da funkcija f nema izvod u tački $x_0 = 0$. Nađimo najpre desni izvod:

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Slično

$$
\begin{aligned}
f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} (-1) = -1.
\end{aligned}
$$

Budući da se levi i desni izvod funkcije u tački $x_0 = 0$ razlikuju, funkcija nema izvod u toj tački.

Pokažimo sada da je za $x > 0$, $f'(x) = 1$, dok je za $x < 0$, $f'(x) = -1$. Zaista, ako je $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Ako je $x < 0$, onda je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x - \Delta x - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$(|x|)' = \operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x}, \quad \text{za } x \neq 0. \bullet \tag{3.1}$$

Primer 3.6. Nađimo izvod konstantne funkcije.

Neka je $f(x) = c$ za svako $x \in \mathbb{R}$, gde je $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Tada je $f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, i zato

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0. \bullet$$

Primer 3.7. Pokažimo da je $(x^n)' = nx^{n-1}$ za svako $x \in \mathbb{R}$, gde je $n \in \mathbb{N}$.

Primenom binomne formule dobijamo:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x+\Delta x)^n - x^n = \\ &= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1}. \bullet \end{aligned}$$

Primer 3.8. Neka je $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$. Ako je n neparan broj, onda je domen ove funkcije skup $\mathbb{R}$, a ako je n paran broj, onda je domen interval $[0, +\infty)$. Pokažimo da je ova funkcija ima izvod u svakoj nenula tački svog domena.

Neka je $x_0 \neq 0$ proizvoljna tačka iz domena funkcije f. Na osnovu Tvrđenja 2.28 i neprekidnosti funkcije f (Tvrđenje 2.89) dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{x-x_0}\cdot\frac{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{x_0}+(\sqrt[n]{x})^{n-3}(\sqrt[n]{x_0})^2+\cdots+(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{x_0}+(\sqrt[n]{x})^{n-3}(\sqrt[n]{x_0})^2+\cdots+(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}\right)\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{(\sqrt[n]{x})^n-(\sqrt[n]{x_0})^n}{(x-x_0)((\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{x_0}+(\sqrt[n]{x})^{n-3}(\sqrt[n]{x_0})^2+\cdots+(\sqrt[n]{x_0})^{n-1})}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)((\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{x_0}+(\sqrt[n]{x})^{n-3}(\sqrt[n]{x_0})^2+\cdots+(\sqrt[n]{x_0})^{n-1})}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{x_0}+(\sqrt[n]{x})^{n-3}(\sqrt[n]{x_0})^2+\cdots+(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}\\
&= \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}((\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{x_0}+(\sqrt[n]{x})^{n-3}(\sqrt[n]{x_0})^2+\cdots+(\sqrt[n]{x_0})^{n-1})}\\
&= \frac{1}{n(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \frac{1}{nx_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}.
\end{aligned}$$

Ako je n neparan broj, pokažimo da je $f'(0)=+\infty$:

$$f'(0) \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Iz neprekidnosti funkcije f sledi $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[n]{x})^{n-1}=0$, a kako je $n-1$ paran broj, to je $(\sqrt[n]{x})^{n-1}>0$ za $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, te na osnovu Tvrđenja 2.44 sledi

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = +\infty.$$

Slično, ako je n paran broj, dokazuje se da je $f'_+(0)=+\infty$.

Primer 3.9. Nađimo izvod funkcije $y=a^x$, gde je $a>0$ i $a\neq 1$.

Kako je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln a,$$

to je za svako $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\\
&= a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a.
\end{aligned}$$

Prema tome, $(e^x)'=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. •

Primer 3.10. Nađimo izvod funkcije $y=\log_a x$, gde je $a>0$ i $a\neq 1$.

S obzirom da na osnovu Primera 2.100 imamo da je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a},$$

to za svako $x\in\mathbb{R}$, $x>0$, važi

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}\\ &= \frac{1}{x\ln a}.\end{aligned}$$

Prema tome, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $x>0$. •

Primer 3.11. Nađimo izvod funkcija $y_1=\sin x$ i $y_2=\cos x$.

Kako je funkcija $y_2=\cos x$ neprekidna na $\mathbb{R}$ i kako je

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=1,$$

to je za svako $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos x.\end{aligned}$$

Analogno, zbog neprekidnosti funkcije $y_1=\sin x$ zaključujemo

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}\\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})=-\sin x.\end{aligned}$$ •

Ako funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ima izvod u svakoj tački intervala (a,b), onda je njen izvod takođe funkcija nezavisno promenljive x i zove se *prva izvodna funkcija, prvi izvod*, *izvod prvog reda* ili samo *izvodna funkcija* ili *izvod* funkcije f i označava sa f', pa možemo pisati $f':(a,b)\to\mathbb{R}$.

Primetimo da je funkcija $f_1(x)=\sin x$ neparna, a da je njena izvodna funkcija $f_1'(x)=\cos x$ parna. Takođe funkcija $f_2(x)=\cos x$ je parna, dok je njena izvodna funkcija $f_2'(x)=-\sin x$ neparna. Sledeće tvrđenje govori o tome da je to pravilo, tj. izvod (ukoliko postoji) svake parne funkcije je neparna funkcija, dok je izvod neparne funkcije parna funkcija.

Tvrđenje 3.12. *Neka funkcija $f:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ ima izvod u svakoj tački intervala $(-\delta,\delta)$ i neka je funkcija f parna (neparna). Tada je izvodna funkcija $f':(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ neparna (parna).*

Dokaz. Interval $(-\delta,\delta)$ je simetričan skup. Pretpostavimo da je f parna funkcija. Neka je x_0 proizvoljna tačka iz intervala $(-\delta,\delta)$. Tada je

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-(x_0-\Delta x))-f(x_0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Smenom $t=-\Delta x$ (možemo primeniti teoremu o smeni promenljive pri izračunavanju limesa (Teorema 2.51) budući da: $\Delta x\to 0\Longrightarrow t\to 0$, $\Delta x\neq 0\Longrightarrow t\neq 0$ i postoji $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)$) dobijamo

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=f'(x_0). \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) sledi $f'(-x_0)=-f'(x_0)$.

Prema tome, izvodna funkcija f' je neparna.

Slično se dokazuje da ako je f neparna funkcija, da je onda f' parna funkcija. ■

3.2 Diferencijal

Definicija 3.13. Neka je funkcija $y=f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0. Reći ćemo da je funkcija f *diferencijabilna u tački* x_0 ako se priraštaj funkcije u toj tački može napisati u obliku

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0, \tag{3.4}$$

gde je A realan broj, tj.

$$\Delta y=A\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x, \tag{3.5}$$

gde je $\varepsilon(\Delta x)$ beskonačno mala kad $\Delta x\to 0$.

Diferencijal funkcije f u tački x_0, u oznaci $df(x_0)$ ili kraće, dy, je linearna funkcija priraštaja Δx definisana sa:

$$(df(x_0))(\Delta x) = A\Delta x.$$

Dakle, diferencijal je linearna funkcija čiji je argument priraštaj Δx i pisaćemo jednostavno $df(x_0) = A\Delta x$, tj. $dy = A\Delta x$.

Napominjemo da je diferencijal, kao i svaka druga linearna funkcija, definisan za bilo koju vrednost svog argumenta Δx. Sa druge strane, priraštaj funkcije $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ je definisan samo za one vrednosti Δx za koje $x_0 + \Delta x$ pripada domenu funkcije f.

Primetimo da ako je funkcija diferencijabilna u tački x_0, onda je konstanta A u formuli (3.4), odnosno formuli (3.5), jedinstveno određena[1] (videti takođe Lemu 3.77).

Ako je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački intervala (a, b), onda je diferencijal funkcija dveju promenljivih, tačke $\tilde{x} \in (a, b)$ i priraštaja Δx: $(df(\tilde{x}))(\Delta x) = A(\tilde{x})\Delta x$, ili kraće: $dy = A(\tilde{x})\Delta x$.

Zbog veće simetrije formule, Δx se označava dx i zove diferencijal nezavisno promenljive. Prema tome,

$$dy = Adx.$$

Iz (3.5) sledi

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

odakle zaključujemo da se priraštaj funkcije u nekoj tački može aproksimirati diferencijalom funkcije u toj tački (učinjena greška je beskonačno mala višeg reda u odnosu na Δx kad $\Delta x \to 0$):

$$\Delta y \approx dy.$$

Primer 3.14. Nađimo diferencijal funkcije $f(x) = x^3$ u tački 2.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(2+\Delta x) - f(2) = (2+\Delta x)^3 - 2^3\\ &= 2^3 + 3\cdot 2^2\Delta x + 3\cdot 2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2^3\\ &= 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 12\Delta x + (6\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Budući da je $6\Delta x + (\Delta x)^2$ beskonačno mala kad $\Delta x \to 0$, to iz (3.7) sledi da je funkcija f diferencijabilna u tački 2 i da je njen diferencijal u toj tački $df(2) = 12\Delta x$, odnosno $df(2) = 12dx$. •

---

[1] Zaista, ako je $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ kad $\Delta x \to 0$ i $\Delta y = B\Delta x + o(\Delta x)$ kad $\Delta x \to 0$, onda je

$$A\Delta x + o(\Delta x) = B\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

odakle deljenjem sa $\Delta x \neq 0$ dobijamo

$$A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = B + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0. \tag{3.6}$$

Budući da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, prelaskom na graničnu vrednost kad $\Delta x \to 0$ u jednakosti (3.6), dobijamo $A = B$.

Sledeća teorema pokazuje vezu između postojanja izvoda funkcije u nekoj tački i diferencijabilnosti funkcije u toj tački.

Teorema 3.15. *Funkcija f je diferencijabilna u tački x_0 ako i samo ako ima izvod u toj tački.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$): Neka je funkcija f je diferencijabilna u tački x_0. Tada je $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),\quad \Delta x \to 0$, za neki realan broj A, i stoga

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0.$$

Odavde je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Prema tome, funkcija f ima izvod u tački x_0 i $f'(x_0) = A$.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da funkcija f ima izvod u tački x_0, tj. da postoji $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Iz Teoreme 2.40 sledi da postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \quad 0 < |\Delta x| < \delta,$$

gde je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, i prema tome

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x,$$

što znači da je funkcija f diferencijabilna u tački x_0. ■

Iz dokaza Teoreme 3.15 opet vidimo da je broj A iz definicije diferencijabilnosti funkcije f u tački x_0 jednoznačno određen jer $A = f'(x_0)$, i prema tome, i diferencijal funkcije f u toj tački je jednoznačno određen: $df(x_0) = f'(x_0)dx$, tj.

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{3.8}$$

Iz (3.8) sledi

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx},$$

tj. $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Napomenimo da je ovakvu oznaku za izvod uveo Lajbnic[2].

Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, formula (3.5) se može sada zapisati u obliku:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

odakle

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0, \tag{3.9}$$

[2]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), nemački matematičar i filozof

Na osnovu (3.9) vidimo da se diferencijabilna funkcija f u tački x_0 može aproksimirati linearnom funkcijom:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

pri čemu se čini greška koja je beskonačno mala višeg reda u odnosu na $x - x_0$ kad $x \to x_0$.

Sledeća teorema pokazuje vezu između diferencijabilnosti i neprekidnosti funkcije u nekoj tački.

Teorema 3.16. *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, onda je ona neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Neka je funkcija f diferencijabilna u tački x_0. Tada iz (3.9) sledi

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} o(x - x_0) \\ &= f(x_0),\end{aligned}$$

i funkcija f je neprekidna u x_0. ■

Obrat ovog tvrđenja ne važi, tj. ako je funkcija neprekidna u nekoj tački ne mora biti diferencijabilna u toj tački. Primer za to je funkcija $f(x) = |x|$ koja je nerekidna u tački $x = 0$, ali nije diferencijabilna u toj tački jer nema izvod u toj tački (Primer 3.5). Još jedan primer je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

koja je neprekidna u tački $x = 0$ (Primer 2.72). Međutim ova funkcija nema ni levi ni desni izvod u tački $x = 0$, jer funkcija

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \dfrac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x},$$

nema ni levu, ni desnu graničnu vrednost u toj tački (Primer 2.8).

Napomena 3.17. Iz Teoreme 3.16 i Teoreme 3.15 sledi da ako funkcija ima konačan izvod u nekoj tački, onda je ona neprekidna u toj tački. Međutim, ako funkcija ima beskonačan izvod u nekoj tački, onda ona ne mora da bude neprekidna u toj tački. Na primer, funkcija $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$, je prekidna u tački $x = 0$ i ima beskonačan izvod u ovoj tački:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to -0} \frac{-1}{x} == +\infty,$$

i

$$f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

pa je $f'(0) = +\infty$.

Analogno, ako funkcija ima konačan levi (desni) izvod u tački x_0, onda se može dokazati da je funkcija neprekidna sleva (zdesna) u tački x_0. Ako funkcija ima beskonačan levi (desni) izvod u tački x_0, onda ona ne mora biti neprekidna sleva (zdesna) u toj tački, što opet pokazuje prethodni primer.

3.3 Geometrijska interpretacija izvoda i diferencijala

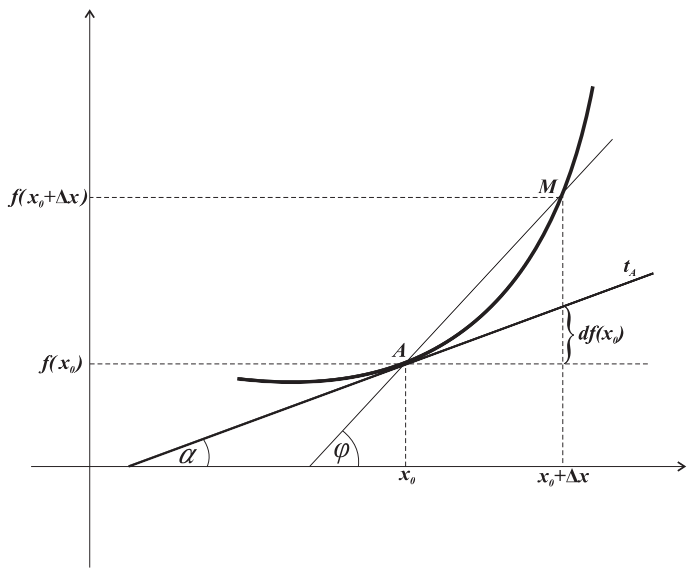
Neka je funkcija f neprekidna na intervalu (a, b) i neka ima izvod u tački $x_0 \in (a, b)$. Uočimo tačke grafika funkcije f: $A(x_0, f(x_0))$ i $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ gde je $\Delta x \neq 0$ i takvo da $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Prava AM se zove sečica grafika i njen koeficijent pravca je

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

gde je φ ugao koji sečica AM zaklapa sa pozitivnim delom $x-$ose, dok je njena jednačina

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0). \tag{3.10}$$

Kada $\Delta x \to 0$ tada se tačka M kreće po grafiku ka tački A, a sečica AM teži tangenti grafika funkcije u tački A, t_A.



Ako je α ugao koji tangenta t_A zaklapa sa pozitivnim delom $x-$ose, onda je $\operatorname{tg} \alpha$ njen koeficijent pravca. Kako je

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi,$$

to je

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi,$$

tj.

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Prema tome, izvod $f'(x_0)$ je jednak koeficijentu pravca tangente grafika funkcije f u tački $A(x_0, f(x_0))$ i njena jednačina je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.11}$$

Kako je diferencijal funkcije f u tački x_0

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x - x_0),$$

iz (3.11) vidimo da je jednak priraštaju ordinate tangente t_A.

Primećujemo da se jednačina tangente grafika funkcije f u tački $A(x_0, f(x_0))$ (jednačina (3.11)) dobija iz jednačine sečice (3.10) prelaskom na limes kad $\Delta x \to 0$.

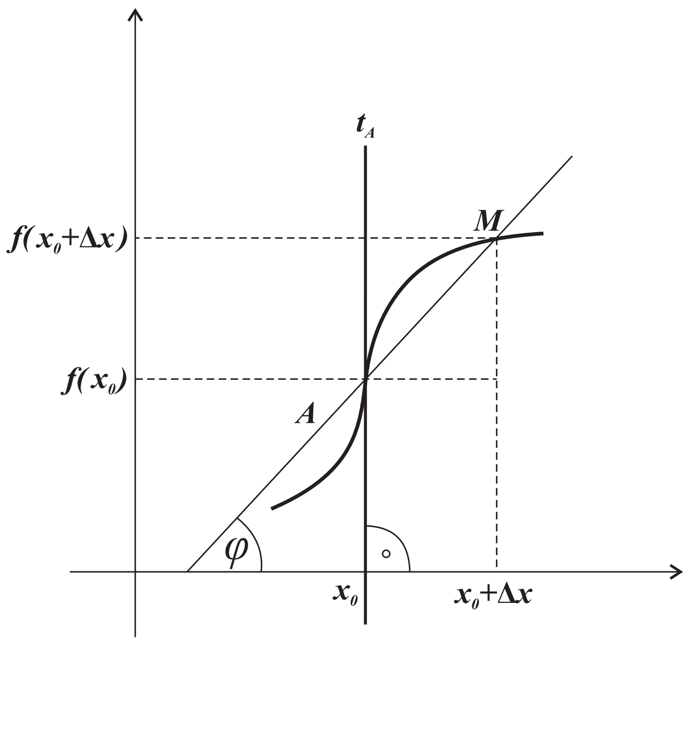
Pretpostavimo da je $f'(x_0) = +\infty$ ili $f'(x_0) = -\infty$. Ako jednačinu sečice (3.10) zapišemo u obliku

$$\frac{y}{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}} - \frac{f(x_0)}{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}} = x - x_0,$$

onda prelaskom na limes kad $\Delta x \to 0$ dobijamo jednačinu

$$x = x_0. \tag{3.12}$$

Prava čija je jednačina (3.12) zove se *vertikalna tangenta* grafika funkcije f u tački $(x_0, f(x_0))$ (ova tangenta obrazuje sa pozitivnim delom x-ose ugao $\frac{\pi}{2}$ ili $-\frac{\pi}{2}$).

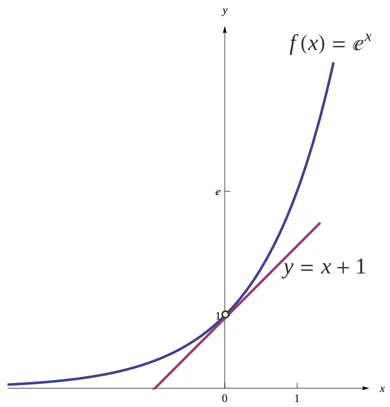


Primer 3.18. Tangenta grafika funkcije $f(x) = e^x$ u tački $(0, 1)$ je

$$y - 1 = f'(0)(x - 0),$$

tj. $(f'(x) = e^x$ za svako $x \in \mathbb{R}$, pa je $f'(0) = e^0 = 1)$

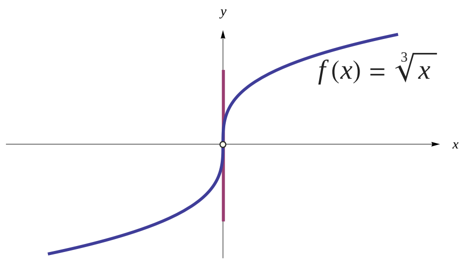
$$y = x + 1. \bullet$$



Primer 3.19. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u tački $x_0 = 0$ ima beskonačan izvod:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Prava $x = 0$, tj. y-osa je vertikalna tangenta grafika funkcije f u tački $(0, 0)$. $\bullet$

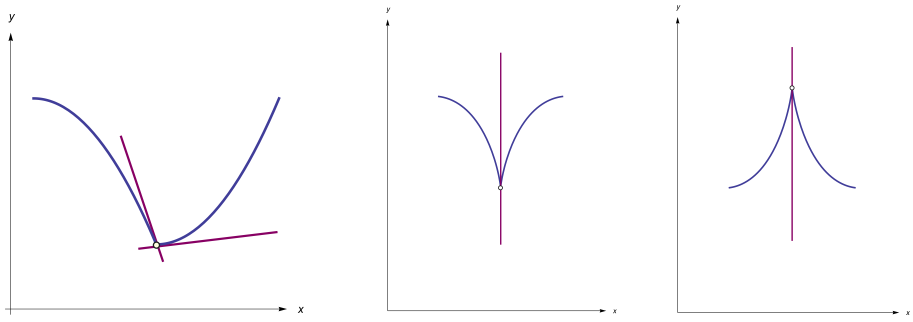


Sada je lako uočiti geometrijsku interpretaciju pojma levog i desnog izvoda. Neka funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ima levi i desni izvod u tački $x_0 \in (a, b)$. Levi izvod $f'_-(x_0)$ je koeficijent pravca *leve tangente* (u upotrebi je i termin polutangenta) grafika funkcije u tački $(x_0, f(x_0))$, dok je desni izvod $f'_+(x_0)$ koeficijent pravca *desne tangente* grafika funkcije u toj tački. Njihove jednačine su respektivno:

$$y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0), \quad \text{i} \quad y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0).$$

Ako je $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ onda se ove tangente razlikuju, tj. ugao između njih je različit od nule, i tačka $(x_0, f(x_0))$ se naziva *ugaonom tačkom* grafika funkcije f.

Ako je $f'_-(x_0) = -\infty$ i $f'_+(x_0) = +\infty$ ili, $f'_-(x_0) = +\infty$ i $f'_+(x_0) = -\infty$, onda je prava $x = x_0$ vertikalna tangenta grafika funkcije u tački $(x_0, f(x_0))$.



Primer ugaone tačke i vertikalne tangente.

Primer 3.20. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{za} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{za} \quad x = 0. \end{cases}$$

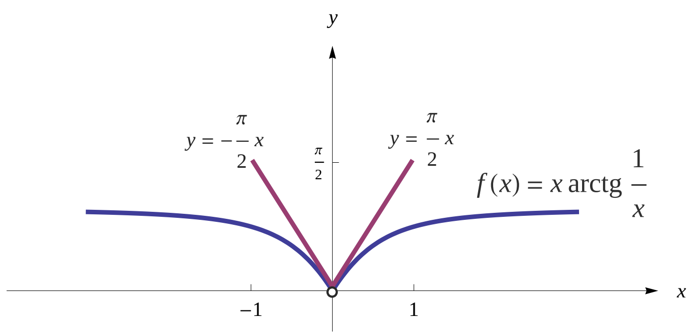
Iz

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2},$$

sledi $f'_-(0) = -\dfrac{\pi}{2}$. Budući da takođe postoji limes:

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x} = \frac{\pi}{2},$$

zaključujemo da funkcija f ima desni izvod u 0 i da je $f'_+(0) = \dfrac{\pi}{2}$.



Prema tome, tačka $(0,0)$ je ugaona tačka grafika funkcije f. Jednačina leve tangente grafika funkcije u toj tački je $y = -\dfrac{\pi}{2}x$, dok je jednačina desne tangente u toj tački $y = \dfrac{\pi}{2}x$. •

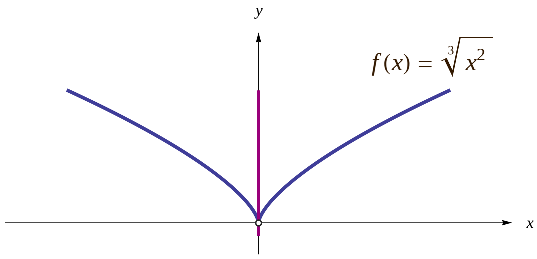
Primer 3.21. Neka je $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Kako je

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = -\infty,$$

to je $f'_-(x_0) = -\infty$, a kako je

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty,$$

to je $f'_+(x_0) = +\infty$, pa je prava $x = 0$, tj. y-osa, vertikalna tangenta grafika funkcije f u tački $(0,0)$. •



3.4 Pravila diferenciranja

U ovoj sekciji izlažemo pravila za nalaženje izvoda zbira, razlike, proizvoda i količnika dva diferencijabilne funkcije, kao i pravila za izvod inverzne i složene funkcije.

Teorema 3.22. *Neka funkcije f i g imaju izvod u tački x_0. Tada i funkcije $f+g$, $f-g$ i fg imaju izvod u tački x_0 i važi*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{3.13}$$

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0), \tag{3.14}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{3.15}$$

Ako je još i $g(x_0) \neq 0$, tada i funkcija $\frac{f}{g}$ ima izvod u tački x_0 i važi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{3.16}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x) - (f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right).\end{aligned}$$

Budući da funkcije f i g imaju izvod u tački x_0, to limesi oba sabirka u zagradi postoje, pa je na osnovu Teoreme 2.28

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

Prema tome, funkcija $f+g$ ima izvod u tački x_0 i važi (3.13).

Analogno se dokazuje da važi (3.14).

(3.15): Budući da funkcija g ima izvod u x_0, na osnovu Teoreme 3.16 funkcija g je neprekidna u x_0, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. Kako i funkcija f ima izvod u x_0, iz

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\\ &\qquad=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &\qquad=\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right),\end{aligned}$$

na osnovu Teoreme 2.28 sledi

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\\ &=\lim_{x\to x_0}g(x)\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

Prema tome, funkcija fg ima izvod u tački x_0 i važi (3.15).

(3.16): Neka funkcije f i g imaju izvod u tački x_0 i neka je $g(x_0)\neq 0$. Sledi g je neprekidna u tački x_0 i iz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\neq 0$, na osnovu Teoreme 2.23 sledi da je $g(x)\neq 0$ za x iz neke okoline tačke x_0. U toj okolini je definisan količnik $\dfrac{f}{g}$ i važi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)}.\end{aligned}$$

Na osnovu Teoreme 2.28 sledi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x_0)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$$
$$= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Prema tome, funkcija $\dfrac{f}{g}$ ima izvod u tački x_0 i važi (3.16). ■

Posledica 3.23. *Ako funkcija f ima izvod u tački x_0, onda i funkcija cf, gde je c konstanta, ima izvod u tački x_0 i važi*

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.22 (3.15) i Primera 3.6 sledi

$$(cf)'(x_0) = c'f(x_0) + cf'(x_0) = 0 + cf'(x_0) = cf'(x_0). \blacksquare$$

Posledica 3.24. *Ako funkcije f i g imaju izvod u tački x_0, onda i funkcija c_1f+c_2g, gde su c_1 i c_2 konstante, ima izvod u tački x_0 i važi*

$$(c_1f + c_2g)'(x_0) = c_1f'(x_0) + c_2g'(x_0).$$

Dokaz. Sledi iz Teoreme 3.22 (3.13) i Posledice 3.23. ■

Primer 3.25. Nađimo izvod funkcije $y_1 = \mathrm{tg}x$ i funkcije $y_2 = \mathrm{ctg}x$.

Na osnovu Teoreme 3.22 (3.16) imamo

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{za } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

i

$$(\mathrm{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{za } x \neq k\pi. \bullet$$

Izvod inverzne funkcije

Teorema 3.26. *Neka je funkcija $y = f(x)$ strogo monotona i neprekidna u nekoj okolini tačke x_0. Ako funkcija f ima izvod u tački x_0 i ako je $f'(x_0) \neq 0$, tada inverzna funkcija f^{-1} ima izvod u tački $y_0 = f(x_0)$ i važi*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Kako je funkcija f strogo monotona i neprekidna u nekoj okolini tačke x_0, to je inverzna funkcija definisana i neprekidna u nekoj okolini $U(y_0)$ tačke $y_0 = f(x_0)$ (Teorema 2.84). Primetimo da kad $y \to y_0$, tada $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$, i ako je $y \neq y_0$, onda je $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0$. Prema tome,

$$\begin{aligned} \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} \\ &= \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Na osnovu Teoreme 2.51 (smena $x = f^{-1}(y)$, $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$, za svako $y \in \overset{\circ}{U}(y_0)$ važi $f^{-1}(y) \neq x_0$, i postoji $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$) sledi

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{3.19}$$

Iz (3.18) i (3.19), budući da je $f'(x_0) \neq 0$, na osnovu Teoreme 2.28 (2.20) sledi

$$\begin{aligned} \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y\to y_0} \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}, \end{aligned}$$

i prema tome, funkcija f^{-1} ima izvod u tački y_0 i $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. ■

Jednakost (3.17) se može zapisati u obliku

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{3.20}$$

Formulu (3.17) takođe zapisujemo kraće:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x},$$

odnosno,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Primer 3.27. Neka je funkcija $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ restrikcija funkcije sin. Tada je f strogo rastuća i neprekidna na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $f'(x) = \cos x \neq 0$ za svako $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pa funkcija f ispunjava uslove Teoreme 3.26 u svakoj tački intervala $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Sledi inverzna funkcija $f^{-1}(y) = \arcsin y$ ima izvod u svakoj tački $y \in (-1, 1)$ i važi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Za $y \in (-1, 1)$, $\arcsin y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pa je $\cos(\arcsin y) > 0$ i stoga[3] , $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2}$. Prema tome,

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \text{za } y \in (-1, 1). \bullet$$

Primer 3.28. Ako je funkcija $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ restrikcija funkcije cos. Tada je f strogo opadajuća i neprekidna na intervalu $(0, \pi)$ i $f'(x) = -\sin x \neq 0$ za svako $x \in (0, \pi)$, pa funkcija f ispunjava uslove Teoreme 3.26 za svako $x \in (0, \pi)$. Zato inverzna funkcija $f^{-1}(y) = \arccos y$ ima izvod u svakoj tački $y \in (-1, 1)$ i

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{-\sin(\arccos y)}.$$

Za $y \in (-1, 1)$, $\arccos y \in (0, \pi)$ i $\sin(\arccos y) > 0$. Sledi[4]

$$\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Prema tome,

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \text{za } y \in (-1, 1). \bullet$$

Primer 3.29. Funkcija $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, \infty)$ koja je restrikcija funkcije tg je strogo rastuća i neprekidna na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Osim toga, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ za $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pa funkcija f ispunjava uslove Teoreme 3.26 za svako $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

[3] Iz osnovnog trigonometrijskog identiteta $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sledi $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, pa je $\cos \alpha = \operatorname{sgn}(\cos \alpha)\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

[4] Slično $\sin \alpha = \operatorname{sgn}(\sin \alpha)\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Stoga inverzna funkcija $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ ima izvod u svakoj tački $y \in (-\infty, \infty)$ i važi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} y)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} y).$$

Budući da je $\cos^2 u = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u}$, $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to je

$$\cos^2(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Prema tome,

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}, \quad \text{za } y \in (-\infty, +\infty). \; \bullet$$

Primer 3.30. Ako je $f : (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$ restrikcija funkcije ctg, onda je $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \neq 0$ za $x \in (0, \pi)$ i f j strogo opadajuća i neprekidna na intervalu $(0, \pi)$. Prema tome, funkcija f ispunjava uslove Teoreme 3.26 za svaku tačku $x \in (0, \pi)$, pa inverzna funkcija $f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$ ima izvod u svakoj tački $y \in (-\infty, \infty)$ i važi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sin^2(\operatorname{arcctg} y)}} = -\sin^2(\operatorname{arcctg} y).$$

Kako je $\sin^2 u = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 u}$, $u \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to je

$$\sin^2(\operatorname{arcctg} y) = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Sledi

$$(\operatorname{arcctg} y)' = -\frac{1}{1+y^2}, \quad \text{za } y \in (-\infty, +\infty). \; \bullet$$

Izvod složene funkcije

Teorema 3.31. *Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0 i neka funkcija $z = F(y)$ ima izvod u tački $y_0 = f(x_0)$. Tada složena funkcija $\Phi(x) = (F \circ f)(x) = F(f(x))$ ima izvod u tački x_0 i važi*

$$\Phi'(x_0) = (F \circ f)'(x_0) = F'(f(x_0))f'(x_0). \tag{3.21}$$

Dokaz. Budući da funkcija f ima izvod u tački x_0 ona je definisana u nekoj okolini $U_0(x_0)$ tačke x_0 i neprekidna je u tački x_0. Funkcija F je definisana u nekoj okolini $V(f(x_0))$ tačke $f(x_0)$ jer ima izvod u toj tački. Kako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, to postoji okolina $U(x_0) \subset U_0(x_0)$ takva da je $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Prema tome, složena funkcija $\Phi = F \circ f$ je definisana u okolini $U(x_0)$ tačke x_0. Neka je

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{F(f(x)) - F(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}, & \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \text{ ako je } f(x) \neq f(x_0) \\ \\ F'(f(x_0)), & \text{za } x \in \overset{\circ}{U}(x_0) \text{ ako je } f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

Kako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$ i $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = F'(y_0) = F'(f(x_0))$, na osnovu Teoreme 2.61, sledi da je

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = F'(f(x_0)). \tag{3.22}$$

Primetimo da za $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ važi jednakost

$$\frac{F(f(x)) - F(f(x_0))}{x - x_0} = h(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Odavde i iz (3.22), na osnovu Tvrđenja 2.28 (2.19), sledi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(f(x)) - F(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} h(x) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = F'(f(x_0)) f'(x_0). \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija Φ ima izvod u tački x_0 i važi $\Phi'(x_0) = F'(f(x_0)) f'(x_0)$. ■

Prethodnu teoremu smo mogli dokazati i na sledeći način: Funkcija $z = F(y)$ je diferencijabilna u tački $y_0 = f(x_0)$, tj.

$$\Delta z = F'(y_0) \Delta y + \varepsilon(\Delta y) \Delta y, \tag{3.23}$$

gde je $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. Funkcija ε nije definisana za $\Delta y = 0$. Biće nam zgodno da je dodefinišimo tako da bude neprekidna za $\Delta y = 0$ stavljajući $\varepsilon(0) = 0$. Jednakost (3.23) će i dalje važiti. Deleći je sa $\Delta x \neq 0$ dobijamo

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3.24}$$

Funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0, tj. postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{3.25}$$

Osim toga, funkcija $y = f(x)$ je neprekidna u tački x_0 (jer ima izvod u toj tački), pa je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Kako je $\Delta y = 0$ za $\Delta x = 0$, zaključujemo da je priraštaj Δy, posmatran kao funkcija čiji je argument Δx, neprekidna funkcija u tački $\Delta x = 0$. Sada na osnovu Tvrđenja 2.77 sledi da je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{3.26}$$

Prelaskom na limes kad $\Delta x \to 0$ u jednakosti (3.24), na osnovu (3.25) i (3.26) dobijamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(y_0) f'(x_0). \quad \blacksquare$$

Formulu (3.21) zapisujemo kraće:

$$z'_x = z'_y y'_x,$$

odnosno,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Primer 3.32. Nađimo izvod funkcije $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Kako je

$$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x},$$

to na osnovu Teoreme 3.31 sledi

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}. \bullet$$

Sada možemo formirati tablicu izvoda osnovnih elementarnih funkcija. S obzirom da se svaka elementarna funkcija dobija primenom konačno mnogo puta aritmetičkih operacija i operacije kompozicije funkcija nad osnovnim elementarnim funcijama, to se korišćenjem ove tablice, Teoreme 3.22 i Teoreme 3.31 može naći izvod bilo koje elementarne funkcije, naravno u tačkama gde taj izvod postoji.

$$(c)' = 0, \quad c = \text{const}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ x > 0,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R},$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1),$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1),$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primer 3.33. Funkcija *hiperblički sinus* je definisana sa

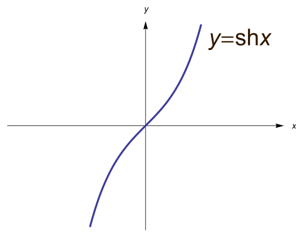
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

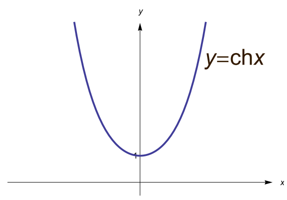
a funkcija *hiperblički kosinus* sa

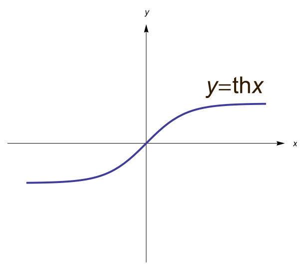
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

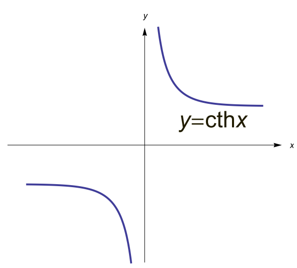
Funkcije *hiperblički tangens* i *hiperblički kotangens* su definisane respektivno sa

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$









Primetimo da važe sledeće jednakosti

$$\mathrm{sh}\,(x \pm y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y, \tag{3.27}$$

$$\mathrm{ch}\,(x \pm y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y \tag{3.28}$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \tag{3.29}$$

$$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x. \tag{3.30}$$

Zaista,

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,y + \mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ = \frac{1}{4}\Big(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)} &+ e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)}\Big) \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \mathrm{sh}\,(x+y), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ = \frac{1}{4}\Big(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-(x+y)} &+ e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-(x+y)}\Big) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \mathrm{ch}\,(x+y), \end{aligned}$$

Jednakost (3.29) sledi iz (3.28): $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\,(x - x) = \mathrm{ch}\,0 = 1$.
Jednakost (3.30) sledi iz (3.27).
Primetimo još da je formulama

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

parametarski zadana elipsa: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$,
dok je formulama

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,t, \quad a,\ b > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

parametarski zadana hiperbola: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Sve ove formule ukazuju na izvesnu sličnost ovih funkcija sa trigonometrijskim funkcijama, odakle i potiče njihov naziv.

Nađimo izvode hiperboličkih funkcija. Na osnovu Teoreme 3.31 sledi $(e^{-x})' = -e^{-x}$ i prema tome,

$$(\mathrm{ch}\,x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,x,$$

$$(\mathrm{sh}\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\,x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}. \bullet$$

Logaritamski izvod

Neka je funkcija $y = f(x)$ pozitivna i diferencijabilna na intervalu (a, b). Tada je funkcija $z = \ln f(x)$ definisana i diferencijabilna na intervalu (a, b). Njen izvod se zove *logaritamski izvod funkcije* f i na osnovu Teoreme 3.31 važi

$$z'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Sledeći primer pokazuje kako je logaritamski izvod podesan za nalaženje izvoda nekih funkcija.

Primer 3.34. Neka su funkcije φ i ψ diferencijabilne na intervalu (a, b) i neka je $\varphi(x) > 0$ za $x \in (a, b)$. Nađimo izvod funkcije $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$ na intervalu (a, b).

Kako je

$$\ln y = \ln \varphi(x)^{\psi(x)} = \psi(x) \ln \varphi(x),$$

to je

$$\frac{y'}{y} = \psi'(x) \ln \varphi(x) + \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

i prema tome,

$$y' = \varphi(x)^{\psi(x)} \left(\psi'(x) \ln \varphi(x) + \psi(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right).$$

Ako je $y = x^x$, onda je prema prethodnom

$$y' = x^x (\ln x + 1). \bullet$$

3.5 Izvodi višeg reda

Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u svakoj tački intervala (a, b). Kao što smo već rekli u sekciji 4.1, njen izvod je funkcija nezavisno promenljive x i zove se *prva izvodna funkcija, prvi izvod* ili *izvod prvog reda* funkcije f i označava sa f' ili $f^{(1)}$.

Ako ta funkcija $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ ima izvod u nekoj tački $x_0 \in (a, b)$, onda se taj izvod $(f')'(x_0)$ zove *drugi izvod* (ili *izvod drugog reda*) funkcije f u tački x_0 i obeležava sa $f''(x_0)$ ili $f^{(2)}(x_0)$.

Ako funkcija $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ ima izvod u svakoj tački intervala (a, b), onda to znači da je na intervalu (a, b) definisana funkcija f'' sa:

$$(\forall x \in (a, b))\ f''(x) = (f')'(x).$$

Funkcija f'' se naziva *drugom izvodnom funkcijom, drugim izvodom* ili *izvodom drugog reda* funkcije f na intervalu (a, b). Označava se još i sa $f^{(2)}$.

Slično se definiše treći izvod funkcije f u tački $x_0 \in (a, b)$ ili na intervalu (a, b):

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0); \quad (\forall x \in (a, b))\ f'''(x) = (f'')'(x).$$

Zove se joši izvod trećeg reda i označava još i sa $f^{(3)}$.

Pretpostavimo da je definisan n-ti izvod funkcije f na intervalu (a, b) za neko $n \in \mathbb{N}$, u oznaci $f^{(n)}$. Tada se $(n + 1)$-vi izvod funkcije f definiše kao izvod funkcije $f^{(n)}$:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x), \quad x \in (a, b),$$

tj.

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(x + \Delta x) - f^{(n)}(x)}{\Delta x}.$$

Za n-ti izvod se kaže da je izvod n-tog reda. Pod izvodom nultog reda, u oznaci $f^{(0)}$ podrazumevamo samu funkciju, $f^{(0)} = f$.

Ako funkcija ima n-ti izvod u tački x_0, onda kažemo da je *n-puta diferencijabilna u tački* x_0, $n = 1, 2, \dots$.

Napomena 3.35. Iz pretpostavke da je funkcija n-puta diferencijabilna u tački x_0, tj. da ima n-ti izvod u tački x_0, sledi da postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 u kojoj funkcija f ima izvod $n - 1$-og reda. Zaista, $f^{(n)}(x_0)$ je prvi izvod funkcije $f^{(n-1)}$ u tački x_0, pa postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 u kojoj je funkcija $f^{(n-1)}$ definisana. Odavde sledi da ako je $n > 1$, funkcija ima i sve izvode reda $k < n-1$ u okolini $U(x_0)$, i da su svi ti izvodi neprekidne funkcije u okolini $U(x_0)$ (s obzirom da iz postojanja izvoda neke funkcije u datoj tački sledi neprekidnost funkcije u toj tački), a samim tim je i funkcija f definisana i neprekidna u okolini $U(x_0)$.

Ako je funkcija n-puta diferencijabilna u svakoj tački intervala (a, b), onda kažemo da je *n-puta diferencijabilna na intervalu* (a, b).

Napomena 3.36. Ako je funkcija n-puta diferencijabilna na intervalu (a, b), onda ima sve izvode do $n - 1$-og reda zaključno neprekidne na intervalu (a, b).

Za funkciju f kažemo da je *n-puta neprekidno diferencijabilna na intervalu* (a, b) ako u svakoj tački ovog intervala ima neprekidan izvod n-tog reda.

Napomena 3.37. Ako je funkcija n-puta neprekidno diferencijabilna na intervalu (a, b), onda ima sve izvode do n-tog reda zaključno neprekidne na intervalu (a, b).

Primeri 3.38. (i) Za $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, važi $f'(x) = a^x \ln a$, $f''(x) = a^x \ln^2 a$, $x \in \mathbb{R}$. Indukcijom se dokazuje da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$, $x \in \mathbb{R}$. Specijalno, $(e^x)^{(n)} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Neka je $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Tada je

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}, \ \ldots .$$

Indukcijom se dokazuje da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \ x > 0.$$

(iii) Za $f(x) = \sin x$ važi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
f''(x) &= -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \\
f^{(4)}(x) &= \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Indukcijom se dokazuje da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.31}$$

Primetimo da (3.31) važi i za slučaj kada je $n = 0$.

Kako je $(\cos x)' = -\sin x$, to je, na osnovu (3.31),

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{(n)} &= ((\cos x)')^{(n-1)} = (-\sin x)^{(n-1)} = -(\sin x)^{(n-1)} \\
&= -\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \bullet
\end{aligned}$$

Primer 3.39. Neka je polinom $P_n \in \mathbb{R}[x]$ stepena n razvijen po stepenoma binoma $(x-a)$:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

Izrazićemo koeficijente c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, preko vrednosti polinoma i njegovih izvoda u tački a.

Jasno, $P_n(a) = c_0$. Nađimo prvi izvod ovog polinoma:

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1}.$$

Odavde sledi da je $P_n'(a) = c_1$. Druga izvodna funkcija polinoma P_n je:

$$P_n''(x) = 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(x-a) + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot c_n(x-a)^{n-2},$$

odakle dobijamo

$$P_n''(a) = 2 \cdot 1 \cdot c_2,$$

pa je

$$c_2 = \frac{P_n''(a)}{2!}.$$

Treća izvodna funkcija polinoma P_n je:

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot c_n (x-a)^{n-3},$$

te je

$$P_n'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3,$$

i stoga

$$c_3 = \frac{P_n'''(a)}{3!}.$$

Nastavljajući postupak, nalazimo konačno n-ti izvod polinoma P_n:

$$P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n = n! \cdot c_n,$$

pa je

$$P_n^{(n)}(a) = n! \cdot c_n,$$

odakle dobijamo

$$c_n = \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}.$$

Prema tome,

$$P_n(x) = P_n(a) + P_n'(a)(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P_n'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \bullet$$

Teorema 3.40. *Neka su funkcije f i g n-puta diferencijabilne na intervalu (a,b). Tada je su i funkcije $f+g$ i $f \cdot g$ n-puta diferencijabilne na intervalu (a,b) i važe sledeće formule:*

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \tag{3.32}$$

i

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x), \quad x \in (a,b). \tag{3.33}$$

Formula (3.33) je poznata pod nazivom Lajbnicova formula.

Dokaz. Dokaz formula (3.32) i (3.33) izvodimo indukcijom.

Za $n = 1$ je $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ i $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Pretpostavimo da formule (3.32) i (3.33) važe za neko $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da one važe i za izvode $(n+1)$-vog reda.

Važi:

$$(f+g)^{(n+1)} = ((f+g)^{(n)})' = (f^{(n)} + g^{(n)})' = (f^{(n)})' + (g^{(n)})' = f^{(n+1)} + g^{(n+1)},$$

i

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n-k+1)}g^{(k)} + f^{(n-k)}g^{(k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k+1)} \\
&= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k+1)} + f^{(0)}g^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Zamenimo sada indeks sumiranja u drugoj sumi: stavimo da je $p = k+1$, pa je $k = p-1$ i $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k+1)} = \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1} f^{(n-p+1)}g^{(p)}$. Ako u prvoj sumi umesto indeksa k stavimo indeks p, pri čemu je $p = k$, dobijamo

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p} f^{(n-p+1)}g^{(p)} + \\
&\quad + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p-1} f^{(n-p+1)}g^{(p)} + f^{(0)}g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{p=1}^{n}\left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right) f^{(n-p+1)}g^{(p)} + f^{(0)}g^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Kako je $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$ i $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, to je

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n+1}{p} f^{(n+1-p)}g^{(p)} + f^{(0)}g^{(n+1)} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p} f^{(n+1-p)}g^{(p)}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Primer 3.41. Neka je $f(x) = x^3 2^x$. Pomoću Lajbnicove formule nađimo $f^{(10)}$. Kako je $(x^3)^{(1)} = 3x^2$, $(x^3)^{(2)} = 3\cdot 2\,x$, $(x^3)^{(3)} = 3\cdot 2 = 6$, $(x^3)^{(4)} = 0$, $(x^3)^{(5)} = 0$, $\ldots$, $(x^3)^{(10)} = 0$, to je

$$\begin{aligned}
(x^3 2^x)^{(10)} &= (2^x)^{(10)}x^3 + \binom{10}{1}(2^x)^{(9)}(x^3)^{(1)} + \binom{10}{2}(2^x)^{(8)}(x^3)^{(2)} \\
&+ \binom{10}{3}(2^x)^{(7)}(x^3)^{(3)} + \binom{10}{4}(2^x)^{(6)}(x^3)^{(4)} + \cdots + \binom{10}{10}2^x(x^3)^{(10)} \\
&= x^3\cdot 2^x\ln^{10}2 + 10\cdot 3\,x^2\cdot 2^x\ln^9 2 + \frac{10\cdot 9}{2}\cdot 6x\cdot 2^x\ln^8 2 + \\
&\quad + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3}\cdot 6\cdot 2^x\ln^7 2 = \\
&= x^3\, 2^x\ln^{10}2 + 30\,x^2\, 2^x\ln^9 2 + 270\,x\, 2^x\ln^8 2 + 720\, 2^x\ln^7 2. \bullet
\end{aligned}$$

Prvi i drugi izvod funkcije date u parametarskom obliku

Neka su funkcije

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{3.34}$$

definisane u nekoj okolini tačke t_0 i neka je jedna od njih, recimo, φ strogo monotona i neprekidna u toj okolini. Tada postoji okolina tačke $\varphi(t_0) = x_0$, u kojoj je definisana inverzna funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$, a takođe i složena funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Za funkciju $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ kažemo da je parametarski data formulama (3.34).

Ako funkcije φ i ψ imaju izvod u tački t_0 i ako je pri tom $\varphi'(t_0) \neq 0$, tada složena funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, ima izvod u tački x_0 i važi

$$y'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{3.35}$$

Zaista, na osnovu Teoreme 3.31 i Teoreme 3.26 sledi

$$y'(x_0) = \psi'(\varphi^{-1}(x_0))(\varphi^{-1})'(x_0) = \psi'(t_0)\frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Formulu (3.35) kraće zapisujemo:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.36}$$

Ako su još funkcije φ i ψ dva puta diferencijabilne u tački t_0, tj. ako postoje $\varphi''(t_0)$ i $\psi''(t_0)$, tada postoji i $y''_{xx}(x_0)$ i opet na osnovu Teoreme 3.31 i Teoreme 3.26 i (3.36) važi

$$\begin{aligned}
y''_{xx}(x_0) &= (y'_x)'_x(x_0) = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x(x_0) = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t(t_0)\ t'_x(x_0) = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t(t_0)\ \frac{1}{x'_t(t_0)} \\
&= \frac{y''(t_0)x'(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{(x'(t_0))^2}\ \frac{1}{x'_t(t_0)} \\
&= \frac{y''(t_0)x'(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{(x'(t_0))^3} \\
&= \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3}
\end{aligned}$$

Primer 3.42. Neka je funkcija zadana formulama

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad a > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Može se pokazati da funkcija $x = a(t - \sin t)$ strogo raste. Na osnovu (3.36) imamo:

$$y'_x(x(t)) = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}, \quad t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

i prema tome,

$$y''_{xx}(x(t)) = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}. \bullet$$

ILI

Prvi i drugi izvod funkcije date u parametarskom obliku

Neka su funkcije

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{3.37}$$

definisane u nekoj okolini tačke t_0 i neka je jedna od njih, recimo, x strogo monotona i neprekidna u toj okolini. Tada postoji okolina tačke $x(t_0) = x_0$, u kojoj je definisana inverzna funkcija $t = t(x)$, a takođe i složena funkcija $y = y(t(x))$. Za funkciju $y = y(t(x))$ kažemo da je parametarski data formulama (3.37).

Ako funkcije x i y imaju izvod u tački t_0 i ako je pri tom $x'(t_0) \neq 0$, tada složena funkcija $y = y(t(x))$, ima izvod u tački x_0 i važi

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}. \tag{3.38}$$

Zaista, na osnovu Teoreme 3.31 i Teoreme 3.26 sledi

$$y'_x(x_0) = y'_t(t(x_0))t'_x(x_0) = y'_t(t_0)\frac{1}{x'_t(t_0)} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)},$$

kraće

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.39}$$

Ako su još funkcije x i y dva puta diferencijabilne u tački t_0, tj. ako postoje $x''(t_0)$ i $y''(t_0)$, tada postoji i $y''_{xx}(x_0)$ i opet na osnovu Teoreme 3.31 i Teoreme 3.26 i (3.36) važi

$$\begin{aligned}
y''_{xx}(x_0) &= (y'_x)'_x(x_0) = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x (x_0) = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t (t(x_0))\, t'_x(x_0) = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t (t_0)\, \frac{1}{x'_t(t_0)} \\
&= \frac{y''(t_0)x'(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{(x'(t_0))^2}\, \frac{1}{x'_t(t_0)} \\
&= \frac{y''(t_0)x'(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)}{(x'(t_0))^3},
\end{aligned}$$

kraće

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t \cdot t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{{x'_t}^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{{x'_t}^3}.$$

Primer 3.43. Neka je funkcija zadana formulama

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad a > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Može se pokazati da funkcija $x = a(t - \sin t)$ strogo raste. Na osnovu (3.39) imamo (umesto $(y(t(x)))'_x$ pišemo kraće y'_x):

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

i prema tome (umesto $(y(t(x)))''_{xx}$ pišemo kraće y''_{xx}),

$$y''_{xx} = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot t'_x = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}. \bullet$$

3.6 Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Značajne su primene izvoda funkcije. Naime, utvrđujući osobine izvodne funkcije f' možemo izvesti zaključke o osobinama funkcije f, odnosno, izvodna funkcija f' se koristi za ispitivanje funkcije f. Sve te primene, a takođe i uspostavljanje veze između diferencijalnog i integralnog računa, se zasnivaju na četiri osnovne teoreme: Fermaovoj[5], Rolovoj[6], Lagranžovoj[7] i Košijevoj. Rolova, Lagranžova i Košijeva teorema su poznate pod zajedničkim nazivom teoreme o srednjoj vrednosti.

Lokalni ekstremum funkcije. Fermaova teorema

Definicija 3.44. Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x_0. Za x_0 kažemo da je *tačka lokalnog maksimuma (minimuma)* ako postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \ \text{ za sve } \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{3.40}$$

Broj $f(x_0)$ se onda zove *lokalni maksimum (minimum)* funkcije f.

Ako postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)) \ \text{ za sve } \ x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

onda kažemo da je x_0 *tačka strogog lokalnog maksimuma (minimuma)*, a broj $f(x_0)$ *strogi lokalni maksimum (minimum)* funkcije f.

Tačke (strogih) lokalnih minimuma i (strogih) lokalnih maksimuma se nazivaju tačkama (strogih) lokalnih ekstremuma, a odgovarajuće vrednosti funkcije u tim tačkama se zovu (strogi) lokalni ekstremumi funkcije.

Ako je x_0 tačka lokalnog ekstremuma funkcije f, govorićemo još i da funkcija f ima lokalni ekstremum u tački x_0.

Primer 3.45. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 2^{x}\ , & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\ , & x \geq 1. \end{cases}$$

Tada je 0 tačka strogog lokalnog minimuma, 1 je tačka lokalnog maksimuma, a svaka tačka $x \in (1, +\infty)$ je istovremeno i tačka lokalnog maksimuma i tačka lokalnog minimuma. •

---

[5]Pierre de Fermat (1601-1665), francuski matematičar

[6]Michel Rolle (1652-1719), francuski matematičar

[7]Joseph Louis Lagrange (1736-1813), francuski matematičar

Primer 3.46. Za funkciju $f(x) = \cos x$, svaka tačka $x_{2k} = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je tačka strogog lokalnog maksimuma i taj lokalni maksimum je jednak 1, dok je svaka tačka $x_{2k+1} = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tačka strogog lokalnog minimuma koji je jednak -1. •

Primer 3.47. Funkcija $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$, $x \in \mathbb{R}$, ima strogi lokalni minimum u tački 0, a u svakoj tački $x \neq 0$ ima istovremeno i lokalni maksimum i lokalni minimum. •

Za funkcija $f(x) = \sqrt{x}$, vrednost funkcije u tački 0 je manja od vrednosti funkcije u ma kojoj drugoj tački domena $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Međutim funkcija je definisana samo u desnoj okolini tačke $x = 0$, pa, u skladu sa našom definicijom, ova tačka nije tačka lokalnog minimuma.

Napomena 3.48. Tačka x_0 je tačka lokalnog ekstemuma funkcije f ako i samo ako priraštaj funkcije u tački x_0, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, ne menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku x_0, odnosno pri promeni znaka priraštaja Δx. Naime, x_0 je tačka lokalnog maksimuma (minimuma) ako i samo ako je $\Delta f \leq 0$ ($\Delta f \geq 0$) nezavisno od znaka dovoljno malog Δx (Δx treba da bude dovoljno malo da bi tačka $x_0 + \Delta x$ pripadala δ-okolini tačke x_0 u kojoj važi nejednakost (3.40)). Pri tom, x_0 je tačka strogog lokalnog maksimuma (minimuma) ako i samo ako je $\Delta f < 0$ ($\Delta f > 0$) nezavisno od znaka dovoljno malog $\Delta x \neq 0$.

U tački lokalnog ekstremuma funkcija ne mora da ima izvod. Primer za to je funkcija $f(x) = |x|$, koja ima strogi lokalni minimum u tački $x = 0$, ali u ovoj tački funkcija nema izvod (videti Primer 3.5). Sledeća teorema pokazuje da ukoliko funkcija u tački lokalnog ekstremuma ima izvod, on mora biti jednak 0.

Teorema 3.49. *(Fermaova teorema) Neka funkcija f u tački x_0 ima lokalni ekstremum. Ako funkcija f ima izvod u tački x_0, onda je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_0 tačka lokalnog maksimuma i da funkcija ima izvod u toj tački. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ važi nejednakost $f(x) \leq f(x_0)$, tj. $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Stoga, ako $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, sledi $x - x_0 < 0$, pa je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \tag{3.41}$$

a ako $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, onda je $x - x_0 > 0$, te je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{3.42}$$

S obzirom da funkcija f ima izvod u tački x_0, to, na osnovu Teoreme 3.3, ona ima i levi i desni izvod u ovoj tački i važi jednakost

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0). \tag{3.43}$$

Iz (3.41), na osnovu Tvrđenja 2.25, sledi

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \tag{3.44}$$

dok iz (3.42) dobijamo

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \tag{3.45}$$

Iz (3.43), (3.44) i (3.45) sledi $f'(x_0) = f'_-(x_0) \ge 0$ i $f'(x_0) = f'_+(x_0) \le 0$, pa je $f'(x_0) = 0$. ■

II način:

Dokaz. Pretpostavimo da je x_0 tačka lokalnog maksimuma i da funkcija ima izvod u toj tački. Tada postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ važi nejednakost $f(x) \le f(x_0)$, tj. $f(x) - f(x_0) \le 0$. Stoga, ako $x \in (x_0-\delta, x_0)$, sledi $x - x_0 < 0$, pa je

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0, \tag{3.46}$$

a ako $x \in (x_0, x_0+\delta)$, onda je $x - x_0 > 0$, te je

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \tag{3.47}$$

S obzirom da funkcija f ima izvod u tački x_0, postoji granična vrednost

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

i na osnovu Tvrđenja 2.10 sledi da postoje i leva i desna granična vrednost, i da su jednake, tj. važi jednakost

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{3.48}$$

Iz Tvrđenja 2.25, prelaskom na graničnu vrednost u (3.46) kad $x \to x_0 - 0$, sledi

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0, \tag{3.49}$$

dok prelaskom na graničnu vrednost u (3.47) kad $x \to x_0 + 0$ dobijamo

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \tag{3.50}$$

Sada iz (3.48), (3.49) i (3.50) sledi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \text{ i } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0,$$

pa je $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$. ■

Kao što vidimo iz dokaza Fermaove teoreme, bilo je dovoljno pretpostaviti da postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, odnosno da postoji izvod u tački x_0 u širem smislu. Dakle, ako postoji izvod u širem smislu u tački lokalnog ekstremuma, onda on mora biti jednak 0.

Geometrijska interpretacija Rolove teoreme je sledeća: ako u tački lokalnog ekstremuma x_0 funkcija ima izvod, onda postoji tangenta grafika funkcije u tački $(x_0, f(x_0))$ i pri tome, ona mora biti paralelna x-osi. Kao što smo već rekli, funkcija u tački lokalnog ekstremuma ne mora imati izvod. Tako na primer, za funkciju $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$, $x \in \mathbb{R}$, tačka $x = 0$ je tačka lokalnog minimuma, međutim funkcija nema izvod u ovoj tački jer nije neprekidna u ovoj tački.

Fermaova teorema govori o tome da je potreban uslov, da diferencijabilna funkcija u tački x_0 ima lokalni ekstremum u toj tački, je da izvod u toj tački bude jednak 0. Međutim ovo nije i dovoljan uslov, tj. ako je izvod funkcije u nekoj tački jednak 0, ta tačka ne mora biti tačka lokalnog ekstremuma. Na primer, funkcija $f(x) = x^3$ ima u tački $x = 0$ izvod jednak 0, ali ova tačka nije tačka lokalnog ekstremuma. Prema tome, nule prvog izvoda su samo kanditati za tačke lokalnih ekstremuma diferencijabilne funkcije.

Primetimo da ako je funkcija definisana u jednostranoj okolini tačke u kojoj inače dostiže najveću ili najmanju vrednost u toj okolini, i u kojoj postoji jednostrani izvod, onda taj izvod ne mora da bude jednak 0. Primer za to je funkcija $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, koja u tački $x = 0$ dostiže najmanju, a u tački $x = 1$ najveću vrednost na segmentu $[0, 1]$, međutim $f'_+(0) = f'_-(1) = 1$.

Rolova teorema

Rolova teorema je prva od tri teoreme o srednjoj vrednosti. Dokazuje se pomoću Fermaove teoreme, a na osnovu nje se dokazuju druge dve teoreme o srednjoj vrednosti.

Teorema 3.50. *(Rolova teorema) Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f je neprekidna na segmentu $[a, b]$,

(ii) f je diferencijabilna u intervalu (a, b),

(iii) $f(a) = f(b)$.

Tada postoji tačka $\xi \in (a, b)$ tako da je $f'(\xi) = 0$.

Dokaz. Ako je funkcija f konstantna, ond je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$, pa za ξ možemo uzeti bilo koju tačku iz intervala (a, b).

Pretpostavimo da funkcija f nije konstantna. Kako je f neprekidna na segmentu, to na osnovu Vajerštrasove teoreme ona dostiže svoj supremum i infimum, tj. postoje tav cke x_m, $x_M \in [a, b]$ tako da je $f(x_m) = m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ i $f(x_M) = M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$. Tada je $M \ne f(a) = f(b)$ ili $m \ne f(a) = f(b)$, jer u protivnom iz $M = f(a)$ i $m = f(a)$ bi sledilo $M = m$, pa bi funkcija bila konstantna, sto je suprotno pretpostavci. Neka je, recimo $M \ne f(a) = f(b)$. Kako je $M = f(x_M)$, odavde sledi da je $x_M \ne a$ i $x_M \ne b$, pa $x_M \in (a, b)$. Prema tome, funkcija je definisana u dvostranoj okolini tačke x_M i u njoj dostiže najveću vrednost, pa je x_M tačka lokalnog ekstremuma. Budući da je funkcija f diferencijabilna u intervalu (a, b), a $x_M \in (a, b)$, funkcija je diferencijabilna u tački x_M, te na osnovu Fermaove teoreme zaključujemo da je $f'(x_M) = 0$. Prema tome, za tačku ξ možemo uzeti x_M. ■

Geometrijska interpretacija Rolove teoreme je sledeća: Ako neprekidna kriva $y = f(x)$ ima tangentu u svakoj tački, i ako su ordinate krajnjih tačaka krive jednake, onda na krivoj postoji tačka u kojoj je tangenta paralelna x-osi.

Primetimo da Rolova teorema tvrdi egzistenciju broja ξ takvog da je $f'(\xi) =$, ali ne utvrđuje i sam taj broj, tj. ne daje efektivni postupak za njegovo nalaženje. Dalje, ova teorema utvrđuje egzistenciju barem jedne tačke u kojoj je izvod funkcije jednak 0, ali ima slučajeva kad takvih tačaka može biti i više.

Napomenjemo da je svaki od uslova u Rolovoj teoremi bitan za važenje tvrđenja teoreme. Naime, funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{za } x \in [0, 1) \\ 0, & \text{za } x = 1. \end{cases}$$

Ova funkcija je ima izvod u svakoj tački intervala $(0, 1)$, takođe, ima jednake vrednosti na krajevima segmenta, $f_1(0) = f_1(1) = 0$, tj. ispunjava uslove (ii) i (iii) Rolove teoreme, ali ne ispunjava uslov (i), jer nije neprekidna sleva u tački $x = 1$. Primetimo da je $f_1'(x) = 1$ za svako $x \in (0, 1)$, dakle ne postoji tačka iz intervala $(0, 1)$ u kojoj bi izvod bio jednak 0.

Funkcija $f_2 = |x|$, $x \in [-1, 1]$, ispunjava usove (i) i (iii), ali ne ispunjava uslov (ii), jer u tački $x = 0$ funkcija nema izvod. Takođe, i ovde ne postoji tačka $\xi \in (-1, 1)$ takava da je $f_2'(\xi) = 0$, jer je $f_2'(x) = -1$ xa $x \in (-1, 0)$ i $f_2'(x) = 1$ za $x \in (0, 1)$.

Dalje, funkcija $f_3(x) = x$, $x \in [0, 1]$, ispunjava uslove (i) i (ii), ali ne i uslov (iii), jer je $f_3(0) = 0 \neq 1 = f_3(1)$. Ovde je $f_3'(x) = 1 \neq 0$ za svako $x \in (0, 1)$.

Iz Rolove teoreme sledi da se između dve nule diferencijabilne funkcije nalazi nula pvog izvoda te funkcije. Preciznije:

Posledica 3.51. *Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$, diferencijabilna u intervalu (a, b) i $f(a) = f(b) = 0$, tada postoji $\xi \in (a, b)$ tako da je $f'(\xi) = 0$.*

Lagranžova teorema i neke posledice

Jedna od najćešće primenjivanih teorema diferencijalnog računa je sledeća Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti.

Teorema 3.52. *(Lagranžova teorema) Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f je neprekidna na segmentu $[a, b]$,

(ii) f je diferencijabilna u intervalu (a, b),

Tada postoji tačka $\xi \in (a, b)$ tako da važi jednakost

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{3.51}$$

Dokaz. Jednačina sečice određene tačkama $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ je

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{3.52}$$

Desnu stranu u formuli (3.52) označimo sa $l(x)$, odnosno posmatrajmo linearnu funkciju

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Za nju važi da je $l(a) = f(a)$ i $l(b) = f(b)$, tj. vrednosti funkcije l u krajnjim tačkama segmenta $[a, b]$ jednake su odgovarajućim vrednostima funkcije f. Linearna funkcija l je neprekidna na $[a, b]$ i ima izvod u svakoj tački intervala (a, b):

$$l'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.53}$$

Posmatrajmo sada funkciju

$$F(x) = f(x) - l(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ova funkcija ispunjava uslove Rolove teoreme, tj. neprekidna je na segmentu $[a.b]$ (kao razlika dve neprekidne funcije), diferencijabilna u intervalu (a, b) (kao razlika dve diferencijabilne funkcije) i pri tom je, na osnovu (3.53),

$$F'(x) = f'(x) - l'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{3.54}$$

a, s obzirom da je $F(a) = f(a) - l(a) = 0$ i $F(b) = f(b) - l(b) = 0$, važi $F(a) = F(b)$. Na osnovu Rolove teoreme zaključujemo da postoji $\xi \in (a, b)$, tako da je

$$F'(\xi) = 0. \tag{3.55}$$

Iz (3.55) i (3.54) sledi

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

pa je $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Geometrijska interpretacija Lagranžove teoreme objašnjava motivaciju za konstukciju funkcije F u dokazu teoreme. Naime, ako neprekidna kriva $y = f(x)$ ima tangentu u svakoj tački, onda na delu krive između tačaka $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ postoji tačka $(\xi, f(\xi))$ tako da je tangenta krive u toj tački paralelna sečici određenoj tačkama A i B.

Primetimo da je Rolova teorema specijalan slučaj Lagranžove teoreme, jer za slučaj da je $f(a) = f(b)$, iz (3.51) sledi $f'(\xi) = 0$. Lagranžova teorema utvrđuje egzistenciju barem jednog broja ξ takvog da važi (3.51), i kao što je već i kod

Rolove teoreme, takvih brojeva može biti više. Kao i Rolova i Lagranžova teorema ne utvrđuje postupak kako se dolazi do takvog broja ξ.

U sledećem tvrđenju I je jedan od intervala oblika $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$, gde su $a,b \in \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna na I, ukoliko je neprekidna u svakoj unutrašnjoj tački intervala I, za slučaj da $a \in I$, neprekidna zdesna u a, i za slučaj da $b \in I$, neprekidna sleva u b.

Teorema 3.53. *Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu I i neka ima izvod u svim unutrašnjim tačkama tog intervala jednak* 0. *Tada je funkcija f konstantna na intervalu I.*

Dokaz. Određenosti radi neka je $I = [a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$. Neka su x_1 i x_2 proizvoljne tačke iz intervala I i neka je $x_1 < x_2$. Tada je $a \le x_1 < x_2 < b$, pa je funkcija neprekidna na segmentu $[x_1,x_2]$ i diferencijabilna u intervalu (x_1,x_2). Prema tome, funkcija f ispunjava uslove Lagranžove teoreme na segmentu $[x_1,x_2]$, odakle sledi da postoji tačka $\xi \in (x_1,x_2)$ tako da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \tag{3.56}$$

Budući da je ξ unutrašnja tačka intervala I, sledi $f'(\xi) = 0$. Sada iz (3.56)dobijamo $f(x_1) = f(x_2)$. S obzirom na proizvoljnost tačaka x_1 i x_2, zaključujumo da je funkcija f konstantna na intervalu I.

Za ostale tipove intervala tvrđenje se dokazuje analogno. ■

Sledeća posledica omogućava uspostavljanje veze između diferencijalnog i integralnog računa.

Posledica 3.54. *Neka su funkcije f, $g : I \to \mathbb{R}$ neprekidne na intervalu I i imaju jednake izvode u svim unutrašnjim tačkama tog intervala. Tada se funkcije f i g razlikuju za konstantu na intervalu I.*

Dokaz. Uočimo funkciju $F(x) = f(x)-g(x)$. Ova funkcija je neprekidna na intervalu I, kao razlika neprekidnih funkcija, i ima izvod u svakoj unutrašnjoj tački x intervala I jednak 0, jer $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Funkcija F ispunjava uslove Teoreme 3.53, odakle sledi da je F konstantna funkcija na intervalu I. Prema tome, postoji $C \in \mathbb{R}$ tako da je $F(x) = C$ za svako $x \in I$, pa je $f(x) = g(x) + C$ za svako $x \in I$, tj. funkcije f i g se razlikuju za konstantu na intervalu I. ■

Primeri 3.55. (i) Pokažimo da je

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \text{ za svako } x \in \mathbb{R}. \tag{3.57}$$

Neka je $F(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$. Ova funkcija je neprekidna na skupu $\mathbb{R}$, diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ i

$$F'(x) = (\operatorname{arctg} x)' + (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \text{ za svako } x \in \mathbb{R}.$$

Na osnovu Tvrđenja 3.53 sledi da je funkcija F konstantna na skupu $\mathbb{R}$, tj. postoji $C \in \mathbb{R}$ tako da je $F(x) = C$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Odavde

$$C = F(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

pa je $F(x) = \dfrac{\pi}{2}$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tj. važi (3.57).

(ii) Pokažimo da je

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ za svako } x \in [-1, 1]. \tag{3.58}$$

Neka je $G(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in [-1, 1]$. Funkcija G je neprekidna na segmentu $[-1, 1]$ kao zbir dve neprekidne funkcije $x \mapsto \arcsin x$ i $x \mapsto \arcsin x$. Budući da funkcije $x \mapsto \arcsin x$ i $x \mapsto \arcsin x$ imaju izvod u svakoj tački intervala $(-1, 1)$, to i funkcija G ima izvod u intervalu $(-1, 1)$ i važi:

$$G'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \text{ za svako } x \in (-1, 1).$$

Iz Tvrđenja 3.53 sledi da je funkcija G konstantna na segmentu $[-1, 1]$, tj. postoji $C \in \mathbb{R}$ tako da je $G(x) = C$ za svako $x \in [-1, 1]$. Odavde

$$C = F(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

pa je $G(x) = \dfrac{\pi}{2}$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tj. važi (3.57). •

Sledeća teorema nam govori da ako postoji desni limes izvoda u tački u kojoj je funkcija inače neprekidna zdesna, da onda postoji i desni izvod funkcije u toj tački i da je upravo jednak tom limesu. Kraće, desni limes izvoda u tački, gde je funkcija neprekidna zdesna, je desni izvod.

Tvrđenje 3.56. *Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, i diferencijabilna u intervalu (a, b) i neka postoji konačna ili beskonačna granična vrednost $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$. Tada je*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} f'(x). \tag{3.59}$$

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ i neka je $x \in (a, b)$ proizvoljna tačka. Funkcija f ispunjava uslove Lagranžove teoreme na segmentu $[a, x]$, pa postoji tačka $\xi \in (a, x)$ takva da je

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a). \tag{3.60}$$

Tačka ξ zavisi od x i za svako fiksirano x može biti više takvih tačaka ξ za koje važi (3.60), tj. $\xi = \xi(x)$ je višeznačna funkcija promenljive x. Za svako $x \in (a, b)$ izaberimo jednu (bilo koju) tačku ξ za koju važi (3.60) i tako ćemo dobiti jednoznačnu funkciju $\xi = \xi(x)$. Prema tome,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi(x)), \tag{3.61}$$

i za funkciju $\xi = \xi(x)$ važi da je $a < \xi(x) < x$ i

$$\lim_{x \to a+0} \xi(x) = a.$$

Budući da postoji $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = L$, na osnovu teoreme o smeni promenljive pri izračunjavanju limesa zaključujemo da postoji $\lim\limits_{x \to a+0} f'(\xi(x))$ i da važi jednakost

$$\lim_{x \to a+0} f'(\xi(x)) = L.$$

Na osnovu (3.61) zaključujemo da postoji

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

To znači da funkcija f ima desni izvod u tački a i da je $f'_+(a) = L$, tj. važi (3.59). ■

Da je prepostavka o neprekidnosti funkcije f u tački a zdesna bitna govori primer funkcije $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Ova funkcija je diferencijabilna u intervalu $(0, +\infty)$, $f'(x) = 0$ za svako $x \in (0, +\infty)$, pa je $\lim\limits_{x \to +0} f'(x) = 0$. Međutim funkcija f nije neprekidna zdesna u 0 i, kao što smo već pokazali u Napomeni 3.17, $f'_+(0) = +\infty$.

Sledeća tvrđenja se odnose na levi i dvostrani izvod, respektivno, i dokazuju se slično Tvrđenju 3.56.

Tvrđenje 3.57. *Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $(a, b]$ i diferencijabilna u intervalu (a, b). Ako postoji konačna ili beskonačna granična vrednost $\lim\limits_{x \to b-0} f'(x)$, onda je*

$$f'_-(b) = \lim_{x \to b-0} f'(x).$$

Limes izvoda u tački, gde je funkcija inače neprekidna, je izvod u toj tački.

Tvrđenje 3.58. *Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ i diferencijabilna u intervalima $(a - \delta, a)$ i $(a, a + \delta)$. Ako postoji konačna ili beskonačna granična vrednost $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$, onda je*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

Primer 3.59. Neka je $f(x) = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$. Tada je za $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(2-3x)}{3\sqrt[3]{x}}$. Budući da je funkcija f neprekidna u 0 i da postoje

$$\lim_{x\to -0} f'(x) = \lim_{x\to -0} \frac{e^{-x}(2-3x)}{3\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{2}{-0}\right) = -\infty$$

i

$$\lim_{x\to +0} f'(x) = \lim_{x\to +0} \frac{e^{-x}(2-3x)}{3\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{2}{+0}\right) = +\infty,$$

na osnovu Tvrđenja 3.56 i 3.57, sledi da je $f'_-(0) = -\infty$ i $f'_+(0) = +\infty$. •

Primetimo da ako ne postoji limes izvoda u nekoj tački a, to ne znači da funkcija nema izvod u tački a. Drugim rečima, egzistencija izvoda funkcije u nekoj tački nije (što se dalo i očekivati) dovoljan uslov za egzistenciju granične vrednosti izvoda u toj tački. Ovo ilustrujemo sledećim primerom.

Primer 3.60. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Za $x \neq 0$ je $f'(x) = 4x + 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. Budući da postoji $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x + 2x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$, dok $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ ne postoji, na osnovu Tvrđenja 2.32 zaključujemo da ne postoji ni $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Međutim funkcija f ima izvod u 0:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(2x + x\sin\frac{1}{x}\right) = 0. \bullet \end{aligned}$$

Košijeva teorema

Rolova, Lagranžova, a takođe i naredna, Košijeva teorema govore o egzistenciji tačke ξ koja se nalazi između tačaka a i b, koja bi se stoga mogla nazvati "srednjom tačkom" odnosno "srednjom vrednošću", i za koju važi neka jednakost. Otuda i ove teoreme nose zajednički naziv: toreme o srednjoj vrednosti.

Košijeva teorema je uopštenje Lagranžove teoreme.

Teorema 3.61. *(Košijeva teorema) Za funkcije f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f i g su neprekidne funkcije na segmentu $[a,b]$,

(ii) f i g su diferencijabilna u intervalu (a, b), pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.

Tada postoji tačka $\xi \in (a, b)$ tako da važi jednakost

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{3.62}$$

Dokaz. Pokazaćemo najpre da razlomak na levoj strani u (3.62) ima smisla, tj. da je njegov imenilac $g(b) - g(a) \neq 0$. Ako bi bilo $g(b) - g(a) = 0$, tj. $g(b) = g(a)$, onda bi funkcija g ispunjavala uslove Rolove teoreme na segmentu $[a, b]$, odakle bi onda sledilo da postoji $x \in (a, b)$ tako da je $g'(x) = 0$, što je suprotno pretpostavci. Prema tome, $g(b) - g(a) \neq 0$.

Uočimo sada pomoćnu funkciju $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in [a, b]$, gde broj λ određujemo iz uslova da je $F(a) = F(b)$, tj. $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)$. Prema tome,

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{3.63}$$

i

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Funkcija F u tom slučaju ispunjava uslove Rolove teoreme (osim $F(a) = F(b)$ važi i da je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna u intervalu (a, b)), odakle sledi da postoji tačka $\xi \in (a, b)$ tako da je $F'(\xi) = 0$. Kako je $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, to je $f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$, i stoga

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{3.64}$$

Iz (3.63) i (3.64) sledi (3.62). ■

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve teoreme. Naime, u slučaju kada je $g(x) = x$, iz formule (3.62) se dobija formula (3.51).

Košijeva teorema ima istu geometrijsku interpretaciju kao i Lagranžova teorema. Da bismo lakše uočili geometrijsku interpretaciju Košijeve teoreme, umesto promenljive x, $x \in [a, b]$, u Košijevoj teoremi uzmimo promenljivu t, $t \in [\alpha, \beta]$, a umesto funkcija f i g, uzmimo funkcije ψ i φ, tim redom. Ako funkcije ψ i φ ispunjavaju uslove Košijeve teoreme na segmentu $[\alpha, \beta]$, onda postoji tačka $\mu \in [\alpha, \beta]$ tako da važi:

$$\frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = \frac{\psi'(\mu)}{\varphi'(\mu)}. \tag{3.65}$$

Za krivu parametarski zadanu jednačinama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, izraz na levoj strani u (3.65) predstavlja koeficijent pravca sečice određene tačkama $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ i $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, dok je izraz na desnoj strani koeficijent pravca tangete krive u tački $C(\varphi(\mu), \psi(\mu))$ (videti (3.35)). Prema tome, na delu krive između tačaka A i B postoji tačka C u kojoj je tantenta krive paralelna sečici određenjoj tačkama A i B.

3.7 Lopitalova pravila

Ako su funkcije f i g beskonačno male kad $x \to a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, u opštem slučaju ne možemo ništa zaključiti o graničnoj vrednosti njihovog količnika. U zavisnosti od funkcija f i g, granična vrednost

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{3.66}$$

može biti jednaka nekom konačnom broju, ili biti jednaka $+\infty$ ili $-\infty$, ili ne postojati uopšte.

Na primer, funkcije $f(x) = x - 1$, $g(x) = (x-1)^3$, $h(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$, su beskonačno male kad $x \to 1$, a $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, dok $\lim\limits_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$. S obzirom da je $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, granična vrednost $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ ne postoji.

Funkcije $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ i $g(x) = x$ su beskonačno male kad $x \to 0$, ali ne postoji ni leva ni desna granična vrednost količnika $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} = \sin \frac{1}{x}$ u tački 0 (videti Primer 2.8).

Zato, ako su f i g beskonačno male funkcije kad $x \to a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, onda kažemo da je količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ *neodređeni izraz oblika* $\frac{0}{0}$ *kad* $x \to a$, da limes (3.66) predstavlja *neodređenost oblika* $\frac{0}{0}$, a za ispitivanje limesa (3.66) kažemo da je *razjašnjavanje neodređenosti oblika* $\frac{0}{0}$.

Takođe ako su f i g dve beskonačno velike funkcije kad $x \to a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, tj. ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ $(+\infty$ ili $-\infty)$, u opštem slučaju, ne možemo ništa reći o graničnoj vrednosti količnika $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ kad $x \to a$. Ta granična vrednost u zavisnosti od funkcija f i g može da postoji ili ne, i ukoliko postoji može da bude jednaka nekom konačnom broju ili $+\infty$ ili $-\infty$. Zato u ovom slučaju kažemo da je količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ *neodređeni izraz oblika* $\frac{\infty}{\infty}$ *kad* $x \to a$ i da je limes (3.66) *neodređenost oblika* $\frac{\infty}{\infty}$.

Napomenimo da ukupno ima 7 oblika neodređenosti. To su

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty,$$
$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Neodređenosti $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 i 1^∞ se pogodnim transformacijama svode na neodređenosti tipa $\dfrac{0}{0}$ i $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Za rešavanje problema upoređivanja beskonačno malih i beskonačno velikih funkcija mogu se koristiti izvodi. Ti postupci se zasnivaju na tvrđenjima koja imaju zajednički naziv Lopitalova pravila.

Teorema 3.62. *Neka su funkcije f i g definisane u okolini tačke $a \in \mathbb{R}$. Ako je $f(a) = g(a) = 0$ i funkcije f i g imaju izvod u tački a, pri čemu je $g'(a) \neq 0$, tada postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{3.67}$$

Dokaz. Budući da funkcije f i g imaju izvod u tački a, to je (videti formulu (3.9) u sekciji 4.1)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a),\ x \to a,\\ g(x) &= g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a),\ x \to a. \end{aligned}$$

Odavde, s obzirom da je $f(a) = g(a) = 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(a)(x-a) + o(x-a),\ x \to a,\\ g(x) &= g'(a)(x-a) + o(x-a),\ x \to a, \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a) + o(x-a)}{g'(a)(x-a) + o(x-a)} = \frac{f'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}}{g'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}},\ x \to a.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to a}\left(f'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}\right) = f'(a)$ i $\lim\limits_{x\to a}\left(g'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}\right) = g'(a) \neq 0$, to na osnovu Tvrđenja 2.28 ((2.20)) sledi da postoji $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i da je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}}{g'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\left(f'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}\right)}{\lim\limits_{x\to a}\left(g'(a) + \dfrac{o(x-a)}{x-a}\right)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \blacksquare$$

Za razliku od Teoreme 3.62, u narednoj teoremi se ne pretpostavlja da funkcije f i g imaju izvod u tački a.

Teorema 3.63. *Neka su za funkcije $f,\ g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f i g su neprekidne na intervalu $[a, b)$,

(ii) f i g su diferencijabilne u untervalu (a, b), pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$,

(iii) $f(a) = g(a) = 0$.

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (konačan ili beskonačan), onda postoji i $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljan broj. Tada funkcije f i g ispunjavaju uslove Košijeve teoreme na segmentu $[a, x]$, pa postoji tačka[8] $\xi = \xi(x) \in (a, x)$ tako da je

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}. \tag{3.68}$$

S obzirom da je $f(a) = g(a) = 0$, iz (3.68) sledi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}. \tag{3.69}$$

Neka postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Kako je $\lim\limits_{x\to a+0} \xi(x) = a$ i $a < \xi(x) < b$, za svako $x \in (a, b)$, na osnovu teoreme o smeni promenljive prilikom izračunavanja limesa, sledi da postoji $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$ i da je

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = L. \tag{3.70}$$

Sada iz (3.69) i (3.70) sledi da postoji $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i da je

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

Analogno tvrđenje važi i za levu, kao i za dvostranu graničnu vrednost.

Teorema 3.64. *Neka su za funkcije $f,\ g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f i g su diferencijabilne u untervalu (a, b) pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$.

[8]Kao u dokazu Tvrđenja 3.56 za svako $x \in (a, b)$ izaberimo jednu (bilo koju) tačku ξ za koju važi (3.68) i tako ćemo dobiti jednoznačnu funkciju $\xi = \xi(x)$.

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(konačan ili beskonačan), onda postoji i* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi jednakost:*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Dodefinišimo funkcije f i g u tački a, stavljajući da je $f(a)=g(a)=0$. Sada su funkcije f i g neprekidne na intervalu $[a,b)$ i ispunjeni su svi uslovi Teoreme 3.63 odakle onda sledi tvrđenje. ■

Analogno tvrđenje važi i za dvostranu graničnu vrednost. Zbog česte upotrebe, to tvrđenje ćemo iskazati zasebnom teoremom.

Teorema 3.65. *Neka funkcije f i g definisane u probodenoj okolini tačke $a\in\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{U}_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f i g su diferencijabilne u untervalima $(a-\delta,a)$ i $(a,a+\delta)$, pri čemu je $g'(x)\neq 0$ za svako $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0.$

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(konačan ili beskonačan), onda postoji i* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi jednakost:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primer 3.66. Nađimo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

Neka je $f(x)=e^x-e^{-x}$ i $g(x)=\sin x$. Primetimo da je $f(0)=g(0)=0$ i da funkcije f i g imaju izvod u svakoj tački $x\in\mathbb{R}$, pri čemu je $f'(x)=e^x+e^{-x}$ i $g'(x)=\cos x$. Postoji okolina tačke $x=0$ u kojoj je $g'(x)=\cos x\neq 0$ (na primer $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ je jedna takva okolina). Budući da postoji

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2,$$

na osnovu Teoreme 3.63, slučaj za dvostranu graničnu vrednost, sledi da postoji $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, tj. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ i da važi jednakost

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

Do ovog zaključka smo mogli doći i na osnovu Teoreme 3.65, jer su funkcije f i g neprekidne u tački $x=0$, pa je $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ i $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$. •

Napomenimo da je nephodno proveriti sve uslove za primenu Lopitalovog pravila. Naime, izostanak provere i jednog od uslova, može nas dovesti do pogrešnog zaključka, kako pokazuje sledeći primer.

Primer 3.67. Za funkcije $f(x) = e^x$ i $g(x) = x$ važi da su diferencijabilne u okolini nule $U = (-\infty, +\infty)$, $g'(x) = 1 \neq 0$ za svako $x \in U$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, međutim $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \neq 0$. Pogrešnom upotrebom Lopitalovog pravila došli bismo do zaključka da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1,$$

što nije tačno, jer granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x}$ ne postoji, budući da postoje leva i desna granična vrednost i da se razlikuju:

$$\lim_{x\to -0} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty, \quad \lim_{x\to +0} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty. \bullet$$

Sledeće teoreme navodimo bez dokaza.

Teorema 3.68. *Neka funkcije f i g definisane u okolini tačke $+\infty$, $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f i g su diferencijabilne u intervalu $(M, +\infty)$, pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (M, +\infty)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$.

Ako postoji $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (konačan ili beskonačan), onda postoji i $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.71}$$

Anlogno tvrđenje se može formulisati za tačku $-\infty$.

Teorema 3.69. *Neka funkcije f i g definisane u probodenoj okolini tačke $a \in \mathbb{R}$, $\mathring{U}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f i g su diferencijabilne u untervalima $(a-\delta, a)$ i $(a, a+\delta)$, pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ ($+\infty$ ili $-\infty$).

Ako postoji $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (konačan ili beskonačan), onda postoji i $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 3.70. *Neka funkcije f i g definisane u okolini tačke $+\infty$, $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) f i g su diferencijabilne u intervalu $(M,+\infty)$, pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (M,+\infty)$,
(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$ ($+\infty$ ili $-\infty$).

Ako postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (konačan ili beskonačan), onda postoji i $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogno tvrđenje se može formulisati za tačku $-\infty$.

Primer 3.71. Ako je $k,\, a \in \mathbb{R},\ k > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$, pokazaćemo da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0. \tag{3.72}$$

Neka je $f(x) = \log_a x$ i $g(x) = x^k$, $x \in (0,+\infty)$. Ovo su dve beskonačno velike funkcije kad $x \to +\infty$. Zaista, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, za $a > 1$ je $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ i za $a \in (0,1)$ važi $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$.

Funkcije f i g su diferencijabilne u intervalu $(0,+\infty)$, pri čemu je

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \quad g'(x) = kx^{k-1} \neq 0, \ x \in (0,+\infty).$$

Prema tome, ispunjeni su uslovi (i) i (ii) Teoreme 3.70. Pokažimo još da postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, to je:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\ln a}}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{kx^k \ln a} = 0.$$

Sada, na osnovu Teoreme 3.70 zaključujemo da postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ i da važi jednakost

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0. \bullet$$

S obzirom na Hajneovu definiciju granične vrednosti funkcije, iz (3.72) sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0,$$

gde je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ i $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Ovim smo dopunili naše izlaganje u okviru Primera 1.51.

Sledeći primeri pokazuju da obrat Lopitalovih teorema ne važi, odnosno iz egzistencije granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ u opštem slučaju ne sledi egzistencija granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Drugim rečima, ukoliko ne postoji $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, u opštem slučaju ne možemo ništa reći o postojanju $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Primeri 3.72. (i) Količnik $\dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ je neodređeni izraz oblika $\dfrac{\infty}{\infty}$ kad $x \to +\infty$. Pokazaćemo da postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$, ali da ne postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'}$.

Zaista, budući da je funkcija $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ beskonačno mala kad $x \to +\infty$, kao proizvod ograničene funkcije $x \mapsto \sin x$ i beskonačno male funkcije $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ kad $x \to +\infty$ (Tvrđenje 2.38), to na osnovu Tvrđenja 2.28 sledi da postoji

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{\sin x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}} = 1.$$

Neka je

$$F(x) = \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Za $x_n = 2n\pi$ i $z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, važi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$ i

$$F(x_n) = \frac{1 - \cos 2n\pi}{1 + \cos 2n\pi} = 0 \to 0, \text{ kad } n \to \infty,$$
$$F(z_n) = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)} = 1 \to 1, \text{ kad } n \to \infty.$$

Odavde, na osnovu Hajneove definicije granične vrednosti funkcije, zaključujemo da ne postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

(ii) Količnik $\dfrac{x + \sin x}{x}$ je neodređeni izraz oblika $\dfrac{\infty}{\infty}$ kad $x \to +\infty$. Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, to postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \sin x}{x}$ i važi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{\sin x}{x}) = 1.$$

Međutim granična vrednost

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \cos x)$$

ne postoji[9]. •

[9] Dokaz ove činjenice se može izvesti analogno dokazu da ne postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ (Primer 2.15) ili metodom svođenja na apsurd. Naime, iz pretpostavke da postoji granična vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\cos x)$, na osnovu Posledice 2.29 ili Tvrđenja 2.31 ((2.31,3) ili (2.31,5)) sledilo bi da postoji $\lim\limits_{x\to+\infty} ((1 + \cos x) - 1)$, tj. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$, što nije tačno.

Primer 3.73. Nađimo graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to+\infty}((x-2)e^{\frac{1}{x}}-x)$.

Ovo je neodređeni izraz oblika $\infty-\infty$. Transformisaćemo ga u neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to+\infty}((x-2)e^{\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}.$$

S obzirom da je $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$, to je $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1-1=0$. Prema tome,

$$\frac{\frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

je neodređeni izraz oblika $\dfrac{0}{0}$. Neka je $f(x)=\frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x}}-1$ i $g(x)=\frac{1}{x}$. Funkcije f i g su diferencijabilne u okolini $(0,+\infty)$ tačke $+\infty$, pri čemu je $f'(x)=\frac{x+2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$ i $g'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0,\ x\in(0,+\infty)$.

Potražimo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=-1.$$

Na osnovu Teoreme 3.68, sledi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-2}{x}e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-1.$$

Prema tome, $\lim\limits_{x\to+\infty}((x-2)e^{\frac{1}{x}}-x)=-1$.

Analogno se dokazuje da je $\lim\limits_{x\to-\infty}((x-2)e^{\frac{1}{x}}-x)=-1$. •

Primer 3.74. Neka je funkcija $f:(-\infty,2]\to\mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x-2}}, & x<2,\\ 0, & x=2.\end{cases}$$

Nađimo $f'_-(2)$. Funkcija f je neprekidna sleva u tački $x=2$ jer je $\lim\limits_{x\to2-0}f(x)=\lim\limits_{x\to2-0}xe^{\frac{1}{x-2}}=0=f(2)$. Za $x<2$ imamo da je $f'(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}$. Nađimo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2-0}f'(x) &= \lim_{x\to2-0}\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}\\ &= \lim_{x\to2-0}(x^2-5x+4)\cdot\lim_{x\to2-0}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2}\\ &= -2\lim_{x\to2-0}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2}=\left(\frac{0}{0}\right).\end{aligned}$$

Poslednji limes nalazimo primenom teoreme o graničnoj vrednosti složene funkcije i Lopitalove teoreme. Koristimo smenu $y = \frac{1}{x-2}$, pri čemu $\frac{1}{x-2} \to -\infty$ kad $x \to 2-0$. Nađimo

$$\lim_{y\to-\infty} y^2 e^y = (0 \cdot \infty) = \lim_{y\to-\infty} \frac{y^2}{e^{-y}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Lako se proverava da su ispunjeni uslovi za primenu Lopitalove teoreme (videti Teoremu 3.70 i komentar nakon ove teoreme), pa je

$$\begin{aligned}\lim_{y\to-\infty} y^2 e^y &= \lim_{y\to-\infty} \frac{y^2}{e^{-y}} = \lim_{y\to-\infty} \frac{(y^2)'}{(e^{-y})'} = \lim_{y\to-\infty} \frac{2y}{-e^{-y}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= \lim_{y\to-\infty} \frac{(2y)'}{(-e^{-y})'} = \lim_{y\to-\infty} \frac{2}{e^{-y}} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = 0.\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme o graničnoj vrednosti složene funkcije (videti Teoremu 2.59 i komentar nakon ove teoreme) sledi

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = \lim_{y\to-\infty} y^2 e^y = 0,$$

pa je $\lim\limits_{x\to 2-0} f'(x) = 0$. Sada na osnovu Tvrđenja 3.57 zaključujemo da je $f'_-(2) = 0$.
•

3.8 Tejlorova formula

Kako za računjanje vrednosti polinoma u nekoj tački koristimo samo osnovne računske operacije-sabiranje i množenje, to su polinomi funkcije čije je vrednosti najjednostavnije izračunati. Zato se prirodno nameće ideja da se vrednosti drugih funkcija, u okolini neke tačke a, zamene odgovarajućim vrednostima nekog polinoma. Taj postupak zamene vrednosti funkcije odgovarajućim vrednostima polinoma zove se *aproksimacija funkcije polinomom.* Razlika između vrednosti funkcije i odgovarajuće vrednosti polinoma zove se *greška aproksimacije.* Aproksimacija je utoliko bolja, ukoliko je greška aproksimacije po apsolutnoj vrednosti manja. Stoga je aproksimacija dobro izvedena ukoliko dozvoljava relativno jednostavnu procenu greške.

Već smo u sekciji 4.1 pokazali da se funkcija koja ima izvod u tački a može aproksimirati polinomom prvog stepena (videti formulu (3.9)):

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

za koji važi da je $P_1(a) = f(a)$, $P_1'(a) = f'(a)$ i

$$f(x) = P_1(x) + o(x-a),\ x \to a.$$

Prirodno se nameće pitanje da li se funkcija koja je n-puta diferencijabilna u tački a može aproksimirati polinomom stepena manjeg ili jednakog n, koji ima osobinu da ima istu vrednost u tački a kao i funkcija f i sve izvode do n-tog reda zaključno u tački a jednake odgovarajućim izvodima funkcije f u tački a, a da pri tom greška aproksimacije bude beskonačna mala višeg reda u odnosu na $(x-a)^n$ kad $x \to a$, tj. da "brže teži 0 od $(x-a)^n$ kad x teži ka a". Odgovor na ovo pitanje je potvrdan, a taj polinom ćemo zvati Tejlorovim[10] polinomom n-tog reda funkcije f u tački a. Preciznije:

Definicija 3.75. Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna u tački a. Polinom T_n stepena ne većeg od n za koji važe jednakosti:

$$T_n(a) = f(a),\ T_n'(a) = f'(a),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a), \tag{3.73}$$

zovemo *Tejlorov polinom reda n funkcije f u tački a.*

Ako je $a = 0$ onda se taj polinom naziva i *Maklorenovim*[11] *polinomom reda n funkcije* f i obeležava sa M_n.

Na osnovu Primera 3.39 zaključujemo da za Tejlorov polinom n-tog reda funkcije f u tački a važi:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= T_n(a) + T_n'(a)(x-a) + \frac{T_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{T_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Izraz na desnoj strani u (3.74) obeležavaćemo još i sa $T_n(x,a)$.

Maklorenov polinom reda n je dat sa:

$$M_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Napomenimo da smo Tejlorov polinom n-tog reda u tački a funkcije f, koja je n-puta diferencijabilna u tački a, mogli definisati na sledeći način: to je polinom određen sa

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{3.75}$$

Ova definicija je ekvivalentna Definiciji 3.75, jer, uzastopnim diferenciranjem n-puta, iz (3.75) dobijamo da važe jednakosti (3.73), a već smo pokazali da za polinom koji zadovoljava uslove (3.73) Definicije 3.75 važi jednakost (3.75).

Pomenimo da kod Tejlorovog polinoma ne treba poistovećivati njegov red sa njegovim stepenom. Naime, stepen Tejlorovog polinoma n-tog reda u tački a funkcije f, $f \not\equiv 0$, manji je ili jednak n. Zaista, ako je $f^{(n)}(a) = \cdots = f^{(n-k)}(a) = 0,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, onda je stepen Tejlorovog polinoma T_n jednak $n-k-1$ i važi da je $T_{n-k-1} = T_{n-k} = \cdots = T_n$. Ako je $f \equiv 0$, tada je Tejlorov polinom ma kog reda ove funkcije u proizvoljnoj tački a upravo nula-polinom.

[10] Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar

[11] Colin Maclaurin (1698-1746), škotski matematičar

Kao što smo već rekli, ako funkciju f aproksimiramo Tejlorovim polinomom, potrebno je dati ocenu greške aproksimacije, tj. razlike:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - T_n(x) \\ &= f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right). \end{aligned} \tag{3.76}$$

Iz (3.76) dobijamo jednakost:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \tag{3.77}$$

koju nazivamo *Tejlorovom formulom n-tog reda funkcije f u tački a*, dok funkciju $R_n(x)$ nazivamo *ostatkom Tejlorove formule n-tog reda.*

Specijalno, ako je $a = 0$, onda se formula

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

zove *Maklorenova formula n-tog reda funkcije f.*

Primetimo da ako je funkcija f baš polinom stepena p, onda je ostatak Tejlorove formule reda $n \geq p$ u proizvoljnoj tački $a \in \mathbb{R}$ jednak 0 jer je funkcija jednaka svom Tejlorovom polinomu reda $n \geq p$. U svim drugim slučajevima greška aproksimacije, tj. ostatak Tejlorove formule biće različit od 0.

Sledeća teorema je poznata pod nazivom Tejlorova teorema i govori o asimptotskom ponašanju ostatka Tejlorove formule u okolini tačke a. Naime, ostatak Tejlorove formule n-tog reda je beskonačno mala višeg reda u odnosu na $(x-a)^n$ kad $x \to a$.

Teorema 3.76. *Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna u tački a. Tada je*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a. \tag{3.78}$$

Drugim rečima, za ostatak Tejlorove formule n-tog reda važi:

$$R_n(x) = o((x-a)^n),\ x \to a. \tag{3.79}$$

Dokaz. Kako je $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, gde je T_n Tejlorov polinom n-tog reda funkcije f u tački a, zaključujemo da je funkcija R_n n-puta diferencijabilna u tački a, a na osnovu jednakosti (3.73) dobijamo

$$\begin{aligned} R_n(a) &= f(a) - T_n(a) = 0, \\ R_n'(a) &= f'(a) - T_n'(a) = 0, \\ R_n''(a) &= f''(a) - T_n''(a) = 0, \\ &\ldots \\ R_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) - T_n^{(n)}(a) = 0. \end{aligned}$$

Da bismo dokazali da je $R_n(x) = o((x-a)^n),\ x \to a$, potrebno je i dovoljno dokazati da je

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{3.80}$$

Ukoliko $n-1$ puta za redom primenimo Lopitalovo pravilo (Teorema 3.65) dobićemo:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}. \tag{3.81}$$

Funkcije $x \mapsto R_n^{(n-1)}(x)$ i $x \mapsto n!(x-a)$ se anuliraju u tački a, imaju izvod u tački a i $(n!(x-a))' = n! \neq 0$, pa primenom Teoreme 3.62 dobijamo

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{R_n^{(n)}(a)}{n!} = 0. \tag{3.82}$$

Iz (3.81) i (3.82) sledi (3.80). ■

Formula (3.78) je poznata pod nazivom Tejlorova formula sa ostatkom u Peanovoj[12] formi. Specijalno, za $a = 0$ dobijamo Maklorenovu formulu sa ostatkom u Peanovoj formi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),\ x \to 0. \tag{3.83}$$

Primetimo da formula (3.78) ne omogućava precizniju ocenu ostatka, tj. greške aproksimacije funkcije Tejlorovim polininomom, već jedino govori o tome da ta greška teži 0 određenom brzinom kada x teži ka a i da se vrednost funkcije $f(x)$ u nekoj tački x može zameniti odgovarajućom vrednošću Tejlorovog polinoma u tački a sa malom greškom samo ako je tačka x "dovoljno blizu" tačke a.

Sledeća lema pokazuje da se funkcija ne može istovremeno aproksimirati sa dva različita polinoma stepena manjeg ili jednakog n sa greškom koja je $o((x-a)^n)$, kad $x \to a$. Drugim rečima, ukoliko postoji polinom stepena manjeg ili jednakog n koji aproksimira funkciju sa greškom koja je $o((x-a)^n)$, kad $x \to a$, onda je on jedinstven.

Lema 3.77. *Neka je*

$$\begin{aligned} &c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ &= d_0 + d_1(x-a) + \cdots + d_n(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Tada je $c_0 = d_0,\ c_1 = d_1,\ \ldots,\ c_n = d_n$.

Dokaz. Prelaskom na limes kad $x \to a$ u jednakosti (3.84) dobijamo da je $c_0 = d_0$, pa je

$$c_1(x-a)+\cdots+c_n(x-a)^n+o((x-a)^n) = d_1(x-a)+\cdots+d_n(x-a)^n+o((x-a)^n),\ x \to a.$$

[12] Giuseppe Peano (1858-1932), italijanski matematičar

Odavde deljenjem sa $x - a$ $(x \neq a)$, budući da je na osnovu Tvrđenja 2.108 $\dfrac{o((x-a)^n)}{x-a} = o((x-a)^{n-1}),\ x \to a$, sledi

$$c_1 + c_2(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}) = d_1 + d_2(x-a) + \\ \cdots + d_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}),\ x \to a,$$

odakle opet prelasom na limes kad $x \to a$ dobijamo $c_1 = d_1$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo $c_i = d_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. ■

Koristeći prethodnu lemu pokazaćemo da je za funkciju f, koja je n-puta diferencijabilna u tački a, jedini polinom stepena n (ili manjeg od n) koji aproksimira funkciju f sa greškom koja je $o((x-a)^n)$, kad $x \to a$, upravo Tejlorov polinom reda n funkcije f u tački a.

Tvrđenje 3.78. *Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna u tački a i neka je*

$$Q_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n \tag{3.85}$$

polinom stepena manjeg ili jednakog n takav da je

$$f(x) = Q_n(x) + o((x-a)^n),\ x \to a. \tag{3.86}$$

Tada je

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.87}$$

tj. polinom Q_n je jednak Tejlorovom polinomu reda n funkcije f u tački a.

Dokaz. Iz Teoreme 3.76 sledi da je

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a.$$

Odavde, iz (3.86) i (3.85) sledi

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = f(a) + f'(a)(x-a) + \\ + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),\ x \to a.$$

Sada na osnovu Leme 3.77 slede jednakosti (3.87). ■

Sledeća teorema omogućava da se funkcija koja je $n+1$-puta diferencijabilna u okolini tačke a aproksimira Tejlorovim polinomom reda n u celoj toj okolini, pri čemu je ovom prilikom ostatak dat u obliku koji omogućava laku procenu greške aproksimacije.

Teorema 3.79. *Neka je funkcija f ima neprekidan n-ti izvod u okolini tačke a, $U(a) = (a-\delta, a+\delta)$, i $(n+1)$-vi izvod u probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(a)$. Tada za svako $x \in U(a)$ i svako $p \in \mathbb{N}$ postoji ξ koje je između a i x tako da važi jednakost:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

gde je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p.$$

Dokaz. Neka je $x \in U(a)$ i pretpostavimo[13] da je $x > a$. Na segmentu $[a,x]$ posmatrajmo funkciju

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(x) - T_n(x,t) \\ &= f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right). \end{aligned}$$

Budući da funkcija f ima neprekidne sve izvode do n-tog reda zaključno u okolini $U(a)$, funkcija φ je neprekidna na segmentu $[a,x]$. Kako funkcija f ima $(n+1)$-vi izvod u probodenoj okolini $\overset{\circ}{U}(a)$, to je funkcija φ diferencijabilna u intervalu (a,x) i važi:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = -f'(t) &- \big(f''(t)(x-t) - f'(t)\big) - \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) \right) \\ &- \left(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \frac{f'''(t)}{3!}3(x-t)^2 \right) - \ldots \\ &- \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n)!}n(x-t)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobijamo

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Izaberimo sada proizvoljnu funkciju ψ koja je neprekidna na segmentu $[a,x]$, diferencijabilna u intervalu (a,x), pri čemu je $\psi'(t) \neq 0$ za svako $t \in (a,x)$.

Funkcije φ i ψ ispunjavaju uslove Košijeve teoreme o srednjoj vrednosti na segmentu $[a,x]$, te postoji $\xi \in (a,x)$ tako da je

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \tag{3.88}$$

[13]U slučaju kada je $x < a$, dokaz ide potpuno analogno, samo se umesto segmenta $[a,x]$ posmatra segment $[x,a]$.

Kako je $\varphi(x) = 0$, $\varphi(a) = f(x) - T_n(x,a) = R_n(x)$ i $\varphi'(\xi) = -\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$, iz (3.88) sledi

$$\frac{-R_n(x)}{\psi(x)-\psi(a)} = \frac{-\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\psi'(\xi)},$$

pa je

$$R_n(x) = \frac{\psi(x)-\psi(a)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n. \tag{3.89}$$

Sada za funkciju ψ izaberimo:

$$\psi(t) = (x-t)^p, \text{ gde je } p \in \mathbb{N}.$$

Jasno, ψ je neprekidna na $[a,x]$, diferencijabilna u (a,x), pri čemu je $\psi'(t) = -p(x-t)^{p-1} \neq 0$ za $t \in (a,x)$, $\psi(x) = 0$, $\psi(a) = (x-a)^p$, pa iz (3.89) dobijamo

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p}{p(x-\xi)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$

tj.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p. \blacksquare \tag{3.90}$$

Za ostatak (3.90) kažemo da je dat u Šlemilh[14]-Rošovom[15] obliku.

Budući da je $\xi \in (a,x)$ za slučaj kada je $a < x$, i $\xi \in (x,a)$ za slučaj kada je $x < a$, imamo da je $0 < \theta = \dfrac{\xi - a}{x-a} < 1$, $\xi = a + \theta(x-a)$ i $x - \xi = (1-\theta)(x-a)$, pa je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{p \cdot n!}(1-\theta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1}, \text{ gde je } \theta \in (0,1). \tag{3.91}$$

Za $p = 1$ dobijamo *Košijev oblik ostatka*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}, \text{ gde je } \theta \in (0,1). \tag{3.92}$$

Ako stavimo da je $p = n+1$, dobijamo *Lagranžov oblik ostatka*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ gde je } \xi \text{ između } a \text{ i } x, \tag{3.93}$$

odnosno,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ gde je } \theta \in (0,1). \tag{3.94}$$

---

[14] O. Schlömilch (1823-1901), nemački matematičar

[15] E. Roche (1820-1883), francuski matematičar

Za slučaj da je u prethodnoj teoremi $a = 0$ dobijamo Maklorenovu formulu n-tog reda funkcije f sa ostatkom u Lagranževom obliku:

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \theta \in (0,1). \quad (3.95)$$

Pre nego što pokažemo da Maklorenova formula parne (neparne) funkcije sadrži samo parne (neparne) stepene promenljive x, primetimo da ako je neparna funkcija f definisana u tački $x = 0$, da je onda njena vrednost u 0 jednaka 0. Zaista,

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Longrightarrow 2f(0) = 0 \Longrightarrow f(0) = 0.$$

Osim toga, iz Tvrđenja 3.12 sledi da su parni izvodi neparne funkcije, kao i neparni izvodi parne funkcije, i sami neparne funkcije i stoga u 0 imaju vrednost jednaku 0.

Tvrđenje 3.80. *Neka neparna (parna) funkcija $f : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\delta > 0$, ima izvode ma kog reda u tački $x = 0$. Tada su koeficijenti uz parne (neparne) stepene promenljive x u Maklorenovoj formuli (ma kog reda) funkcije f jednaki 0.*

Dokaz. Neka je f neparna funkcija. Tada je $f(0) = 0$, prva izvodna funkcija f' je definisana u okolini 0 i na osnovu Tvrđenja 3.12 sledi da je f' parna funkcija. Druga izvodna funkcija je definisana u okolini 0 i opet primenom Tvrđenja 3.12 zaključujemo da je f'' neparna funkcija, pa je $f''(0) = 0$. Nastavljajući tako postupak, dolazimo do zaključka da je $f^{(2k)}(0) = 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je funkcija f parna. Prva izvodna funkcija f', inače definisana u okolini 0, je na osnovu Tvrđenja 3.12 neparna funkcija i prema tome, $f'(0) = 0$. Druga izvodna funkcija f'' je onda parna funkcija definisana u okolini 0, odakle onda sledi da je treća izvodna funkcija f''' neparna funkcija, pa je $f'''(0) = 0$. Nastavljajući postupak, dobijamo da je $f^{(2k-1)}(0) = 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. ■

Primeri 3.81. Budući da funkcije $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{sh} x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$, $x \mapsto (1 + x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1 + x)$ imaju izvode ma kog reda u svakoj tački svog domena, to one ispunjavaju uslove Teoreme 3.76 i Teoreme 3.79 u okolini tačke $a = 0$, odakle slede Maklorenove formule za ove funkcije sa ostatkom u Peanovoj, a takođe i u Lagranžovoj formi.

(i) Za funkciju $f(x) = e^x$ važi:

$$(e^x)^{(n)} = e^x,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},$$

pa je $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je Maklorenova formula n-tog reda ove funkcije sa ostatkom u Peanovoj formi:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0, \quad (3.96)$$

dok Maklorenova formula sa ostatkom u Lagranževom obliku glasi:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ \theta \in (0,1). \quad (3.97)$$

(ii) Neka je $f(x)=\sin x$. Ova funkcija ima takođe izvode ma kog reda u proizvoljnoj tački $x\in\mathbb{R}$ i važi (videti Primere 3.38 (iii)):

$$(\sin x)^{(m)}=\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right),\ \text{za svako } m\in\mathbb{N}.$$

Prema tome, $f^{(m)}(0)=\sin\frac{m\pi}{2}$. Stoga je za $n\in\mathbb{N}$,

$$f^{(2n)}(0)=\sin n\pi=0$$

i

$$\begin{aligned} f^{(2n-1)}(0) &= \sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left((n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(n-1)\pi \\ &= (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Zato Maklorenova formula $(2n-1)$-vog reda ove funkcije sa ostatkom u Peanovoj formi glasi:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1}),\ x\to 0. \tag{3.98}$$

Primetimo da je ovde $M_{2n-1}=M_{2n}$ jer je $f^{(2n)}(0)=0$. Stoga Maklorenova formula $(2n)$-tog reda sa ostatkom u Peanovoj formi glasi:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}),\ x\to 0.$$

Ostatak R_{2n} u Lagraževom obliku je:

$$\begin{aligned} R_{2n}(x) &= \frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi+\theta x\right)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(n\pi+\theta x) \\ &= (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x,\ \theta\in(0,1), \end{aligned}$$

pa Maklorenova formula reda $2n$ sa ostatkom u Lagranževoj formi glasi:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x,\ \theta\in(0,1).$$

(iii) Funkcija $f(x)=\cos x$ ima izvode ma kog reda u proizvoljnoj tački $x\in\mathbb{R}$:

$$f^{(m)}(x)=\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)\ \text{za svako } m\in\mathbb{N},$$

pa je $f^{(m)}(0) = \cos\dfrac{m\pi}{2}$. Za $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$f^{(2n-1)}(0) = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2} = 0$$

i

$$f^{(2n-1)}(0) = \cos\frac{2n\pi}{2} = \cos n\pi = (-1)^n.$$

Maklorenova formula $(2n)$-tog reda ove funkcije sa ostatkom u Peanovoj formi glasi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}),\ x \to 0. \tag{3.99}$$

Kako je $f^{(2n+1)}(0) = 0$, to je $M_{2n} = M_{2n+1}$ i stoga Maklorenova formula $(2n+1)$-og reda sa ostatkom u Peanovoj formi glasi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0.$$

Ostatak R_{2n+1} u Lagraževom obliku je:

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) &= \frac{f^{(2n+2)}(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\Big(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\Big) \\ &= \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left((n+1)\pi + \theta x\right) = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x,\ \theta \in (0,1), \end{aligned}$$

pa Maklorenova formula reda $2n$ sa ostatkom u Lagranževoj formi glasi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x,\ \theta \in (0,1).$$

Funkcija $x \mapsto \cos x$ je parna, i kao što smo i očekivali na osnovu Tvrđenja 3.80, Maklorenova formula ove funkcije sadrži samo parne stepene promenljive x, za raliku od funkcije $x \mapsto \sin x$ koja je neparna, pa Maklorenova formula ove funkcije sadrži samo neparne stepene promenljive x.

(iv) Neka je $f_1(x) = \operatorname{sh} x$ i $f_2(x) = \operatorname{ch} x$. Kako je $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ i $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$, to za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$(\operatorname{sh} x)^{(2n-1)} = \operatorname{ch} x,\quad (\operatorname{sh} x)^{(2n)} = \operatorname{sh} x, \tag{3.100}$$

$$(\operatorname{ch} x)^{(2n-1)} = \operatorname{sh} x,\quad (\operatorname{ch} x)^{(2n)} = \operatorname{ch} x. \tag{3.101}$$

Prema tome,

$$f_1^{(2n-1)}(0) = \operatorname{ch} 0 = 1,\quad f_1^{(2n)}(0) = \operatorname{sh} 0 = 0, \tag{3.102}$$

$$f_2^{(2n-1)}(0) = \operatorname{sh} 0 = 0,\quad f_2^{(2n)}(0) = \operatorname{ch} 0 = 1. \tag{3.103}$$

Iz (3.102) sledi da Maklorenova formula $(2n-1)$-vog reda funkcije $f_1(x)=\operatorname{sh} x$ sa ostatkom u Peanovoj formi glasi:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0.$$

Kako je $f_1^{(2n)}(0)=0$, to za Maklorenove polinome ove funkcije važi $M_{2n-1}=M_{2n}$, te je Maklorenova formula $(2n)$-tog reda:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

Iz (3.100) sledi $f_1^{(2n+1)}(x)=\operatorname{sh} x$, pa je Lagranžov oblik ostatka

$$R_{2n}(x) = \frac{f_1^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\operatorname{sh}(\theta x), \ \theta \in (0,1).$$

Prema tome, Maklorenova formula $2n$-tog reda ove funkcije sa ostatkom u Lagranževoj formi glasi:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\operatorname{sh}(\theta x), \ \theta \in (0,1).$$

Iz (3.28) sledi da Maklorenova formula $2n$-tog reda funkcije $f_2(x)=\operatorname{ch} x$ glasi:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \ x \to 0.$$

Iz $f_2^{(2n+1)}(0)=0$ sledi da za Maklorenove polinome ove funkcije važi $M_{2n}=M_{2n+1}$, pa je Maklorenova formula $(2n+1)$-og reda:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \ x \to 0.$$

Kako je, na osnovu (3.101), $f_2^{(2n+2)}(x)=\operatorname{ch} x$, to je Lagranžov oblik ostatka $R_{2n+1}(x) = \dfrac{f_2^{(2n+2)}(\theta x)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\operatorname{ch}\theta x$, $\theta\in(0,1)$, pa Maklorenova formula $(2n+1)$-og reda sa ostatkom u Lagranževoj formi glasi:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\operatorname{ch}\theta x, \ \theta \in (0,1).$$

Funkcija $x \mapsto \operatorname{sh} x$ ($x \mapsto \operatorname{ch} x$) je još jedan primer da Maklorenova formula neparne (parne) funkcije sadrži samo neparne (parne) stepene promenljive x.

(v) Neka je $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $\alpha\neq 0$, $x\in(-1,+\infty)$. Kako je

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$, metodom matematičke indukcije dokazujemo da je za $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Odavde sledi

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1),$$

pa Maklorenova formula n-og reda ove funkcije sa ostatkom u Peanovoj formi glasi:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n),\ x\to 0. \quad (3.104)$$

Izraz $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ podseća na izraz za binomni koeficijent, i ubuduće ćemo ga kraće označavati sa $\dbinom{\alpha}{n}$. Formulu (3.104) zapisujemo sada na sledeći način:

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n),\ x\to 0. \quad (3.105)$$

Lagranžev oblik ostatka R_n je:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1} \\ &= \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1},\ \theta\in(0,1), \end{aligned}$$

pa Maklorenova formula n-og reda ove funkcije sa ostatkom u Lagranževoj formi glasi:

$$(1+x)^\alpha = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1},\ \theta\in(0,1).$$

(vi) Neka je $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,+\infty)$. Kako je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = (-1)\cdot\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(x) = (-1)(-2)\cdot\frac{1}{(1+x)^3},$$

primenjujući matematičku indukciju dokazujemo za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}.$$

Odavde sledi $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, pa je

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Kako je $f(0) = \ln 1 = 0$, Maklorenova formula n-og reda ove funkcije sa ostatkom u Peanovoj formi glasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\ x \to 0. \tag{3.106}$$

Ostatak R_n u Lagranževom obliku je:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(-1)^n n! \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} \\ &= (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},\ \theta \in (0,1), \end{aligned}$$

pa Maklorenova formula n-tog reda ove funkcije sa ostatkom u Lagranževoj formi glasi:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},\ \theta \in (0,1). \bullet$$

3.9 Ispitivanje monotonosti i nalaženje ekstremnih vrednosti funkcije pomoću izvoda

U sledećoj teoremi I je jedan od intervala oblika $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$, gde su $a,b \in \mathbb{R}$. Ova teorema je još jedna u nizu posledica Lagranžove teoreme i govori nam o tome da je pomoću izvoda moguće ispitati monotonost funkcije.

Teorema 3.82. *Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu I i neka ima izvod u svim unutrašnjim tačkama tog intervala.*

(i) Ako je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) za svaku unutrašnju tačku $x \in I$, onda je funkcija f rastuća (opadajuća) na intevalu I.

(ii) Ako je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za svaku unutrašnju tačku $x \in I$, onda je funkcija f strogo rastuća (strogo opadajuća) na intevalu I.

Dokaz. (i) Neka je, na primer, $I = (a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, i neka je $f'(x) \geq 0$ za svaku unutrašnju tačku intervala I. Neka su x_1 i x_2 proizvoljne tačke iz intervala I takve da je $x_1 < x_2$. Tada je $a < x_1 < x_2 \leq b$, pa je funkcija neprekidna na segmentu $[x_1,x_2]$ i diferencijabilna u intrvalu (x_1,x_2). Iz Lagranžove teoreme sledi da postoji tačka $\xi \in (x_1,x_2)$ takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \tag{3.107}$$

Budući da je ξ unutrašnja tačka intervala I, sledi $f'(\xi) \geq 0$. Kako je $x_2 - x_1 > 0$, iz (3.107) sledi $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, tj. $f(x_2) \geq f(x_1)$. Prema tome, funkcija f je rastuća na intervalu I.

Za ostale tipove intervala tvrđenje se dokazuje slično.

Tvrđenje (ii) se dokazuje analogno tvrđenju (i). ■

Uslov da je izvod pozitivan (negativan) je dovoljan ali ne i potreban uslov da funkcija strogo raste (strogo opada). Drugim rečima, obrat tvrđenja (ii) Teoreme 3.82 ne važi. Primer za to je funkcija $f(x) = x^3$ ($f(x) = -x^3$), koja strogo raste (strogo opada) na skupu $\mathbb{R}$, ali je izvod ove funkcije $f'(x) = 3x^2$ ($f'(x) = -3x^2$) za $x = 0$ jednak 0.

Da obrat tvrđenja (i) Teoreme 3.82 važi, govori nam sledeće teorema.

Teorema 3.83. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u intervalu (a, b).*

Ako je f rastuća (opadajuća) na intervalu (a, b), onda je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) za svako $x \in (a, b)$.

Dokaz. Neka je funkcija f rastuća na intervalu (a, b) i neka je x_0 proizvoljna tačka intervala (a, b). Za proizvoljno $x \in (a, b)$, ako je $x > x_0$, onda je $x - x_0 > 0$ i $f(x) \geq f(x_0)$ (jer je f rastuća funkcija), pa je $f(x) - f(x_0) \geq 0$ i

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{3.108}$$

Ako je $x \in (a, b)$ i $x < x_0$, onda je $x - x_0 < 0$ i $f(x) \leq f(x_0)$, tj. $f(x) - f(x_0) \leq 0$, i opet važi nejednakost (3.108). S obzirom da funkcija ima izvod u x_0, to znači da postoji granična vrednost $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Prelaskom na limes kad $x \to x_0$ u (3.108) dobijamo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \;\blacksquare$$

Ako funkcija ima izvod na segmentu $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, pri čemu u tački a postoji desni izvod, a u tački b levi izvod, i ako je f rastuća (opadajuća) na $[a, b]$, onda je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) za $x \in (a, b)$, $f'_+(a) \geq 0$ ($f'_+(a) \leq 0$) i $f'_-(b) \geq 0$ ($f'_-(b) \leq 0$). Analogno tvrđenje važi za intervale $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.84. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u intervalu (a, b).*

Tada je f rastuća (opadajuća) na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) za svako $x \in (a, b)$.

Dokaz. Sledi iz Teoreme 3.82 (i) i Teoreme 3.83. ■

Teorema 3.85. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu (a, b) i neka u svakoj tački tog intervala ima pozitivan (negativan) izvod, sa izuzetkom eventualno konačno mnogo tačaka u kojima izvod ili ne postoji ili je jednak* 0. *Tada je funkcija f strogo rastuća (strogo opadajuća) na intevalu (a, b).*

Dokaz. Tvrđenje je dovoljno dokazati u slučaju da postoji samo jedna tačka $c \in (a, b)$ u kojoj izvod ili ne postoji ili je jednak 0. Funkcija f je onda neprekidna na intervalima $(a, c]$ i $[c, b)$, i ima pozitivan izvod u svakoj unutrašnjoj tački kako intervala $(a, c]$, tako i intervala $[c, b)$. Na osnovu Teoreme 3.82 (ii) funkcija f je strogo rastuća na intervalu $(a,c]$, a takođe i intervalu $[c,b)$. Pokažimo da je strogo rastuća na (a,b). Neka su x_1 i x_2 proizvoljne tačke iz intervala (a,b), takve da je $x_1 < x_2$. Ako $x_1,\ x_2 \in (a,c]$ ili $x_1,\ x_2 \in [c,b)$, onda, s obzirom da je f strogo rastuća na intervalu $(a,c]$, a takođe i intervalu $[c,b)$, važi da je $f(x_1) < f(x_2)$. Ako $x_1 \in (a,c)$ i $x_2 \in (c,b)$, onda je $f(x_1) < f(c)$ (jer funkcija strogo raste na $(a,c]$) i $f(c) < f(x_2)$ (jer funkcija strogo raste na $[c,b)$), pa je $f(x_1) < f(x_2)$. ∎

Primeri 3.86. (i) Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 1, \\ \sqrt{x}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Za $x < 1$ je $f'(x) = 3x^2$, pa je $f'(x) > 0$ za $x \in (-\infty,0) \cup (0,1)$ i $f'(0) = 0$. Za $x > 1$ imamo da je $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$.

Kako je

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} (x^2+x+1) = 3$$

i

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+0} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

to funkcija f nema izvod u tački $x = 1$. Budući da je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$ i ima pozitivan izvod u svakoj tački $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, to na osnovu Teoreme 3.85 sledi da je f strogo rastuća funkcija na skupu $\mathbb{R}$.

(ii) Funkcija $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ima prvi izvod u svakoj tački $x \ne 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} > 0.$$

Izvod u tački $x = 0$ postoji samo u širem smislu:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = +\infty.$$

Funkcija f je neprekidna na $\mathbb{R}$ i svuda sa izuzetkom tačke $x = 0$ ima pozitivan izvod, pa na osnovu Teoreme 3.85 zaključujemo da je f strogo rastuća funkcija na skupu $\mathbb{R}$. •

Teorema 3.87. *(Potrebni uslovi za egzistenciju ekstremuma) Neka je funkcija f definisana u okolini tačke x_0. Ako je x_0 tačka lokalnog ekstremuma, onda izvod $f'(x_0)$ ili ne postoji ili je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Ako postoji izvod u tački lokalnog ekstremuma, onda je na osnovu Fermaove tereme on jednak 0. ∎

Teorema 3.88. *(Dovoljni uslovi za egzistenciju strogog ekstremuma) Neka je funkcija f definisana u okolini U tačke x_0 i neka je diferencijabilna u svim tačkama iz U sa izuzetkom eventualno tačke x_0 u kojoj je inače neprekidna. Ako izvod menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku x_0, tj. ako postoji $\delta > 0$ tako da f' ima jedan znak u okolini $(x_0-\delta, x_0)$, a suprotan u okolini $(x_0, x_0+\delta)$, onda je x_0 tačka strogog lokalnog ekstremuma. Pri tom, ako je $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0-\delta, x_0)$, a $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0, x_0+\delta)$, onda je x_0 tačka strogog lokalnog maksimuma. Ako je pak $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0-\delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0, x_0+\delta)$, onda je x_0 tačka strogog lokalnog minimuma.*

Dokaz. Neka je $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0-\delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Neka je $x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$. Funkcija f ispunjava uslove Lagranžove teoreme na segmentu sa krajevima u tačkama x i x_0 (na segmentu $[x, x_0]$ ako je $x < x_0$, a ako je $x > x_0$, onda na segmentu $[x_0, x]$), odakle sledi da postoji tačka ξ između x_0 i x tako da važi jednakost:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \tag{3.109}$$

Ako je $x < x_0$, onda je $x - x_0 < 0$ i $f'(\xi) > 0$ budući da je $x < \xi < x_0$, te iz (3.109) sledi da je $f(x) - f(x_0) < 0$, tj. $f(x) < f(x_0)$.

Ako je $x > x_0$, onda je $x - x_0 > 0$ i $f'(\xi) < 0$ jer je u ovom slučaju $x_0 < \xi < x$, pa iz (3.109) sledi opet da je $f(x) - f(x_0) < 0$, tj. $f(x) < f(x_0)$.

Prema tome, x_0 je tačka strogog lokalnog maksimuma.

Analogno dokazujemo u drugom slučaju da je x_0 je tačka strogog lokalnog minimuma. ■

Sledeći primer pokazuje da važenje uslova iz prethodne teoreme nije potreban uslov za egzistenciju strogog lokalnog ekstremuma.

Primer 3.89. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Za $x \neq 0$ važi

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1,$$

pa je

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Odavde dobijamo da za $x \neq 0$ važe nejednakosti

$$x^2 \leq 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 3x^2. \tag{3.110}$$

Kako je $f(0) = 0$, iz (3.110) sledi

$$x^2 \leq f(x) \leq 3x^2, \text{ za svako } x \in \mathbb{R}. \tag{3.111}$$

Iz (3.111) sledi da je za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) > 0 = f(0)$, pa je tačka $x = 0$ tačka strogog lokalnog minimuma.

Za $x \neq 0$ imamo da je $f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Primetimo da za $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ i $z_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, važi

$$f'(x_n) = \frac{2}{n\pi} + \frac{2}{2n\pi} \sin 2n\pi - \cos 2n\pi = \frac{2}{n\pi} - 1 < 0,$$
$$f'(z_n) = \frac{4}{(2n+1)\pi} + \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\pi - \cos(2n+1)\pi = \frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0.$$

Takođe je

$$f'(-x_n) = -\frac{2}{n\pi} - 1 < 0,$$
$$f'(-z_n) = -\frac{4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\delta > 0$ proizvoljno. Kako $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $x_n, z_n \in (0, \delta)$, i prema tome $-x_n, -z_n \in (-\delta, 0)$. Prema tome, u svakoj desnoj, a takođe i levoj okolini tačke $x = 0$ prvi izvod nema stalni znak već ga beskonačno mnogo puta menja. •

Teorema 3.90. *Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna u tački a i neka je*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ i } f^{(n)}(a) \neq 0, \; n \geq 2. \tag{3.112}$$

Ako je n neparan broj, funkcija f u tački a nema lokalni ekstremum.

Ako je n paran broj, funkcija f ima strogi lokalni ekstremum u tački a. Pri tome, ako je $f^{(n)}(a) > 0$, onda je a tačka strogog lokalnog minimuma, a ako je $f^{(n)}(a) < 0$, onda je a tačka strogog lokalnog maksimuma.

Dokaz. Budući da je funkcija f n-puta diferencijabilna u tački a, na osnovu Teoreme 3.76, za nju važi Tejlorova formula n-tog reda sa ostatkom u Peanovoj formi:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), \; x \to a. \tag{3.113}$$

Sada iz (3.113) i (3.112) sledi

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), \; x \to a,$$

Kako je $f^{(n)}(a) \neq 0$, to na osnovu Tvrđenja 2.108 (ii) sledi

$$o((x-a)^n) = o\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right), \; x \to a,$$

pa je

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right), \; x \to a.$$

Iz Tvrđenja 2.108 (xi) sledi da postoji $\delta > 0$ tako da za okolinu $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a važi

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right) \cdot \operatorname{sgn}\left((x-a)^n\right) \text{ za } x \in (a-\delta, a+\delta). \end{aligned} \tag{3.114}$$

Ako je n neparan broj, onda izraz $(x-a)^n$ menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku a. Naime, za $x \in (a-\delta, a)$ je $x - a < 0$, pa je i $(x-a)^n < 0$, tj. $\operatorname{sgn}((x-a)^n)) = -1$, dok za $x \in (a, a+\delta)$ važi $x - a > 0$ i stoga i $(x-a)^n > 0$, tj. $\operatorname{sgn}((x-a)^n)) = 1$. Sada iz (3.114) sledi

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) &= -\operatorname{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right) \text{ za } x \in (a-\delta, a), \\ \operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) &= \operatorname{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right) \text{ za } x \in (a, a+\delta). \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da priraštaj funkcije $f(x) - f(a)$ menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku a, što na osnovu Napomene 3.48 povlači da a nije tačka lokalnog ekstremuma funkcije f.

Ako je n paran broj, onda izraz $(x-a)^n$ ne menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku a, tj. za svako $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ ovaj izraz je pozitivan, tj. $\operatorname{sgn}((x-a)^n) = 1$. Sada iz (3.114) sledi

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right), \text{ za } x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}.$$

Odavde sledi da priraštaj funkcije $f(x) - f(a)$ ne menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku a, što znači da je a tačka lokalnog ekstremuma funkcije f. Pri tom, ako je $f^{(n)}(a) < 0$, onda je priraštaj funkcije $f(x) - f(a) < 0$ za svako $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, pa je a je tačka strogog lokalnog maksimuma. Ako je pak $f^{(n)}(a) > 0$, onda je $f(x) - f(a) > 0$ za svako $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, pa je a je tačka strogog lokalnog minimuma. ■

Posledica 3.91. *Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna u tački a i neka je $f'(a) = 0$ i $f''(a) \neq 0$. Ako je $f''(a) > 0$, onda funkcija f u tački a ima strogi lokalni minimum, a ako je $f''(a) < 0$, onda funkcija f u tački a ima strogi lokalni maksimum.*

Dokaz. Sledi iz Teoreme 3.90 za slučaj kada je $n = 2$. ■

Primer 3.92. Neka je $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Tada je $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$ i $f''(x) = 3x^2 - 6x + 2$. Prema tome,

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2.$$

Kako je $f''(0) = 2 > 0$, $f''(1) = -1 < 0$ i $f''(2) = 2 > 0$, to na osnovu Posledice 3.91 sledi da je 0 tačka strogog lokalnog minimuma, 1 tačka strogog lokalnog maksimuma i 2 tačka strogog lokalnog minimuma. •

Primer 3.93. Za funkciju $f(x) = \sin x + \cos x - e^x$ je $f'(x) = \cos x - \sin x - e^x$ i $f''(x) = -\sin x - \cos x - e^x$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je $f'(0) = 0$ i $f''(0) = -2 < 0$, to je na 0 tačka strogog lokalnog maksimuma. •

Primer 3.94. Za funkciju $f(x) = \sin x + \cos x - e^x$ je $f'(x) = \cos x - \sin x - e^x$ i $f''(x) = -\sin x - \cos x - e^x$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je $f'(0) = 0$ i $f''(0) = -2 < 0$, to je na 0 tačka strogog lokalnog maksimuma. •

Primer 3.95. Ispitajmo da li funkcija $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 7x + 9$ ima ekstremnu vrednost u tački $x = 1$. Kako je za svako $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 16x - 7,\\
f''(x) &= 20x^3 - 24x^2 - 12x + 16,\\
f'''(x) &= 60x^2 - 48x - 12,\\
f^{(4)}(x) &= 120x - 48,
\end{aligned}$$

to je $f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$ i $f^{(4)}(1) = 72 > 0$, pa je $x = 1$ tačka strogog lokalnog minimuma i taj lokalni minimum iznosi $f(1) = 7$. •

3.10 Konveksne i konkavne funkcije

Definicija i osobine

Neka je data funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ i $x_1, x_2 \in (a, b)$ tako da je $x_1 < x_2$. Jednačina sečice određene tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$ je

$$\begin{aligned}
y &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\\
&= \frac{f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x - x_1) - f(x_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1}\\
&= \frac{f(x_1)(x_2 - x_1 - x + x_1) + f(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1}\\
&= \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1}\\
&= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).
\end{aligned}$$

Neka je $l(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$. Tada jednačina sečice glasi:

$$y = l(x).$$

Primetimo da je $l(x_1) = f(x_1)$ i $l(x_2) = f(x_2)$.

Definicija 3.96. *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je konveksna (konkavna) na intervalu (a, b) ako za svake tri tačke $x_1, x, x_2 \in (a, b)$, takve da je $x_1 < x < x_2$, važi nejednakost*

$$\begin{aligned} f(x) &\leq l(x), & (3.115) \\ (f(x) &\geq l(x)) & (3.116) \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) & (3.117) \\ (f(x) &\geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)). & (3.118) \end{aligned}$$

Ako je

$$\begin{aligned} f(x) &< l(x), \\ (f(x) &> l(x)) \end{aligned}$$

onda kažemo da je funkcija f strogo konveksna (strogo konkavna) na intervalu (a, b).

Primetimo da će (3.115), odnosno (3.117), ((3.116), odnosno (3.118)) važiti i kad je $x = x_1$ ili $x = x_2$ (tada je $f(x_1) = l(x_1)$ i $f(x_2) = l(x_2)$).

Uslov konveksnosti (konkavnosti) ima sledeću geometrijsku interpretaciju: ako je funkcija konveksna (konkavna) na intervalu (a, b), onda za svake dve tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$, takve da je $x_1 < x_2$, sve tačke duži AB sečice određene tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$ ne "leže" ispod (iznad) tačaka $(x, f(x))$ grafika funkcije za koje je $x_1 < x < x_2$, odnosno, sve tačke $(x, f(x))$ grafika funkcije za koje je $x_1 < x < x_2$ "leže" ispod ili na (iznad ili na) duži AB sečice određene tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$.

Ako je funkcija strogo konveksna (strogo konkavna) na intervalu (a, b), onda za svake dve tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$, takve da je $x_1 < x_2$, sve tačke $(x, f(x))$ grafika funkcije za koje je $x_1 < x < x_2$ "leže" ispod (iznad) tačaka duži AB sečice određene tačkama $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$.

Pre nego što damo sledeću karakterizaciju konveksnih (konkavnih) funkcija, dokažimo sledeće jednostavno tvrđenje.

Lema 3.97. *Tačka $x \in \mathbb{R}$ pripada segmentu $[x_1, x_2]$ ako i samo ako postoje nenegativni brojevi λ_1 i λ_2 takvi da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ i $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.*

Dokaz. Neka $x \in [x_1, x_2]$. Tada sistem jednačina sa nepoznatima λ_1 i λ_2,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 1, \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & = x, \end{cases}$$

na osnovu Kramerovog pravila, ima jedinstveno rešenje jer je determinanta sistema $x_2 - x_1 \neq 0$:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

i pritom je $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, gde su $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Zbog $\lambda_1 \geq 0$ iz $x_1 < x_2$ sledi $\lambda_1 x_1 \leq \lambda_1 x_2$, dok zbog $\lambda_2 \geq 0$ imamo $\lambda_2 x_1 \leq \lambda_2 x_2$. Odavde i iz $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sledi

$$x_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) x_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x \leq \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) x_2 = x_2. \blacksquare$$

Tvrđenje 3.98. *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je konveksna (konkavna) na intervalu (a, b) ako i samo ako za svake dve tačke x_1, $x_2 \in (a, b)$ i za svaka dva nenegativna realna broja λ_1 i λ_2, takva da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, važi nejednakost*

$$\begin{gathered} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)). \end{gathered} \tag{3.119}$$

Funkcija je strogo konveksna (strogo konkavna) ako i samo ako za svake dve tačke x_1, $x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, i za svaka dva pozitivna realna broja λ_1 i λ_2, takva da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, važi nejednakost

$$\begin{gathered} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ (\quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)). \end{gathered}$$

Dokaz. Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je konveksna na intervalu (a, b). Tada za svake tri tačke $x_1, x, x_2 \in (a, b)$, takve da je $x_1 < x_2$ i $x_1 \leq x \leq x_2$, važi nejednakost

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{3.120}$$

Neka su λ_1 i λ_2 dva nenegativna broja takva da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Tada na osnovu Leme 3.97 imamo da je $x_1 \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leq x_2$, pa za $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ važi nejednakost

(3.120):

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\leq \frac{x_2 - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \\
&= \frac{(1-\lambda_2)x_2 - \lambda_1 x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{\lambda_2 x_2 - (1-\lambda_1)x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \\
&= \frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_1 x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{\lambda_2 x_2 - \lambda_2 x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \\
&= \frac{\lambda_1 (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{\lambda_2 (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} f(x_2) = \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).
\end{aligned}$$

Obrnuto, neka za svake dve tačke $x_1,\ x_2 \in (a,b)$ i za svaka dva nenegativna realna broja λ_1 i λ_2, takva da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, važi nejednakost (3.119), neka je $x_1 < x_2$ i neka je x proizvoljna tačka iz segmenta $[x_1, x_2]$. Tada na osnovu Leme 3.97 sledi da za nenegativne brojeve $\lambda_1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ i $\lambda_2 = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ važi $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ i $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, pa je

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2\right) \\
&\leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).
\end{aligned}$$

Prema tome, za proizvoljne tri tačke $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, takve da je $x_1 \leq x \leq x_2$, važi nejednakost (3.120), pa je funkcija f konveksna na intervalu (a,b). ■

Primer 3.99. Funkcija $f(x) = ax + b$ je konveksna i konkavna na $\mathbb{R}$ (i prema tome, nije strogo konveksna niti strogo konkavna na $\mathbb{R}$). Zaista, neka su λ_1 i λ_2 nenegativni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, i neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + b = a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) b \\
&= \lambda_1 (a x_1 + b) + \lambda_2 (a x_2 + b) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \bullet
\end{aligned}$$

Primer 3.100. Funkcija $f(x) = x^2$ je strogo konveksna na $\mathbb{R}$ jer za proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takve da je $x_1 < x_2$ i proizvoljne pozitivne brojeve λ_1 i λ_2, takve da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, važi

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2 = \lambda_1^2 x_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2^2 x_2^2 \\
&= \lambda_1 (1 - \lambda_2) x_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_2 (1 - \lambda_1) x_2^2 \\
&= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 (x_1^2 - 2 x_1 x_2 + x_2^2) \\
&= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 (x_1 - x_2)^2 \\
&< \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \bullet
\end{aligned}$$

Tvrđenje 3.101. *Funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je konveksna (konkavna) na intervalu (a,b) ako i samo ako za svake tri tačke $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, takve da je $x_1 < x < x_2$, važi nejednakost*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{3.121}$$
$$\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right).$$

Funkcija f je strogo konveksna (strogo konkavna) na intervalu (a,b) ako i samo ako za svake tri tačke $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, takve da je $x_1 < x < x_2$, važi nejednakost

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{3.122}$$
$$\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right).$$

Dokaz. Neka je funkcija f konveksna na intervalu (a,b) i neka su x_1, x, x_2 tačke iz intervala (a,b) takve da je $x_1 < x < x_2$. Tada je

$$f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2). \tag{3.123}$$

Množenjem poslednje nejednakosti sa $x_2 - x_1$ $(x_2 - x_1 > 0)$ dobijamo

$$(x_2-x_1)f(x) \leq (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2),$$

pa je

$$(x_2-x+x-x_1)f(x) \leq (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2),$$

tj.

$$(x_2-x)f(x) + (x-x_1)f(x) \leq (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2),$$

Odavde sledi

$$(x_2-x)(f(x)-f(x_1)) \leq (x-x_1)(f(x_2)-f(x)),$$

pa deobom sa pozitivnim brojem $(x_2-x)(x-x_1)$ dobijamo nejednakost (3.121).

Obrnuto, neka za proizvoljne tri tačke $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, takve da je $x_1 < x < x_2$, važi nejednakost (3.121). Tada obrnutim redom u odnosu na dokaz prethodnog smera dokazujemo da iz nejednakosti (3.121) sledi nejednakost (3.123), što znači da je funkcija f konveksna na intervalu (a,b). ■

Tvrđenje 3.101 ima sledeću geometrijsku interpretaciju: funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je konveksna (konkavna) na intervalu (a,b) ako i samo ako za svake tri tačke $x_1, x, x_2 \in (a,b)$, takve da je $x_1 < x < x_2$, koeficijent pravca sečice kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x, f(x))$ je manji ili jednak (veći ili jednak) od koeficijenta pravca sečice kroz tačke $B(x, f(x))$ i $C(x_2, f(x_2))$, odnosno tanges ugla, koji sečica kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x, f(x))$ gradi sa pozitivnim delom x-ose, je manji ili jednak (veći ili jednak) od tangesa ugla koji sečica kroz tačke $B(x, f(x))$ i $C(x_2, f(x_2))$ gradi sa pozitivnim delom x-ose.

Ispitivanje konveksnosti i konkavnosti pomoću izvoda

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov da diferencijabilna funkcije bude konveksna (konkavna).

Teorema 3.102. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna. Tada je f konveksna (strogo konveksna) na intervalu (a, b) ako i samo ako f' raste (strogo raste) na tom intervalu.*

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija na intervalu (a, b) i neka su x_1, x, x_2 proizvoljne tačke iz intervala (a, b) takve da je $x_1 < x < x_2$. Iz Tvrđenja 3.101 sledi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{3.124}$$

Iz nejednakosti (3.124) prelaskom prvo na limes $\lim\limits_{x \to x_1 + 0}$ dobijamo

$$\lim_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \tag{3.125}$$

i budući da funkcija f ima izvod u tački x_1, to je $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$, a kako je funkcija f neprekidna u tački x_1, to je $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, pa dobijamo da je

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{3.126}$$

Ako u nejednakosti (3.124) pređemo na limes $\lim\limits_{x \to x_2 - 0}$ dobijamo

$$\lim_{x \to x_2 - 0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{3.127}$$

Kako je funkcija f neprekidna u tački x_2, to je $\lim\limits_{x \to x_2 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, i funkcija f ima izvod u tački x_2, pa je $\lim\limits_{x \to x_2 - 0} \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2)$. Prema tome,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \tag{3.128}$$

Sada iz (3.126) i (3.128) sledi

$$f'(x_1) \leq f'(x_2),$$

pa je funkcija f' rastuća na intervalu (a, b).

Ako je funkcija f strogo konveksna na intervalu (a, b), onda iz već dokazanog dela sledi da je f' rastuća funkcija na intervalu (a, b). Pokažimo da je f' strogo rastuća na (a, b). Iz Tvrđenja 3.101 sledi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{3.129}$$

Funkcija f ispunjava uslove Lagranžove teoreme na segmentima $[x_1, x]$ i $[x, x_2]$, pa postoje tačke $\xi_1 \in (x_1, x)$ i $\xi_2 \in (x, x_2)$ takve da je

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad \text{i} \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Iz (3.129) sledi

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2).$$

Budući da je $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, a funkcija f' rastuća, to je

$$f'(x_1) \leq f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \leq f'(x_2).$$

Dakle, $f'(x_1) < f'(x_2)$, pa je funkcija f' strogo rastuća na intervalu (a, b).

Obrnuto, pretpostavimo da je f' rastuća (strogo rastuća) na intervalu (a, b) i neka su $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ proizvoljne tačke takve da je $x_1 < x < x_2$. Funkcija f ispunjava uslove Lagranžove teoreme na segmentima $[x_1, x]$ i $[x, x_2]$, pa postoje tačke $\xi_1 \in (x_1, x)$ i $\xi_2 \in (x, x_2)$ takve da je

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad \text{i} \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2). \tag{3.130}$$

Budući da je $\xi_1 < \xi_2$, to je $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ $(f'(\xi_1) < f'(\xi_2))$, pa iz (3.130) sledi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$
$$\left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\right).$$

Sada na osnovu Tvrđenja 3.101 zaključujemo da je funkcija f konveksna (strogo konveksna) na intervalu (a, b). ■

Slično se dokazuje sledeća teorema:

Teorema 3.103. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna. Tada je f konkavna (strogo konkavna) na intervalu (a, b) ako i samo ako f' opada (strogo opada) na tom intervalu.*

Iz Teorema 3.102 i 3.103 sledi sledeće tvrđenje.

Teorema 3.104. *Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na intervalu (a, b). Tada je funkcija f konveksna (konkavna) na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ za svako $x \in (a, b)$.*

Ako je $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ za svako $x \in (a, b)$, onda je funkcija f strogo konveksna (strogo konkavna) na intervalu (a, b).

Primer 3.105. Funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, je dva puta diferencijabilna na $\mathbb{R}$ i $f''(x) = a^x \ln^2 a > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Na osnovu Teoreme 3.104 sledi da je f strogo konveksna na $\mathbb{R}$. •

Primer 3.106. Funkcija $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, je dva puta diferencijabilna na intervalu $(0, +\infty)$ i

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Ako je $a \in (0, 1)$, onda je $f''(x) > 0$ za svako $x \in (0, +\infty)$, pa je funkcija f strogo konveksna na intervalu $(0, +\infty)$.

Kada je $a > 1$, onda je $f''(x) < 0$ za svako $x \in (0, +\infty)$, i stoga je funkcija f strogo konkavna na intervalu $(0, +\infty)$. •

Primer 3.107. Funkcija $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, je dva puta diferencijabilna na intervalu $(0, +\infty)$:

$$f'(x) = ax^{a-1}, \quad f''(x) = a(a-1)x^{a-2}.$$

Za $a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $f''(x) > 0$ za svako $x \in (0, +\infty)$, pa je funkcija f strogo konveksna na intervalu $(0, +\infty)$.

Ako je $a \in (0, 1)$, onda je $f''(x) < 0$ za svako $x \in (0, +\infty)$, pa je funkcija f strogo konkavna na intervalu $(0, +\infty)$. •

Napomena 3.108. Iz dokaza Teoreme 3.102 sledi da ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na segmentu $[a, b]$ (pod izvodom u tački a podrazumevamo desni izvod, a u tački b levi izvod) i konveksna (respektivno strogo konveksna, konkavna, strogo konkavna) na segmentu $[a, b]$, onda je f' rastuća (respektivno, strogo rastuća, opadajuća, strogo opadajuća) funkcija na segmentu $[a, b]$.

Napomena 3.109. Takođe iz dokaza Teoreme 3.102 sledi da ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, diferencijabilna na intervalu (a, b) i ima izvod f' koji je rastuća (respektivno, strogo rastuća, opadajuća, strogo opadajuća) funkcija na intervalu (a, b), onda je funkcija f konveksna (respektivno, strogo konveksna, konkavna, strogo konkavna) na segmentu $[a, b]$. Zato ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, dva puta diferencijabilna na intervalu (a, b) i $f''(x) \geq 0$ (respektivno, $f''(x) > 0$, $f''(x) \leq 0$, $f''(x) < 0$) za svako $x \in (a, b)$, onda je f konveksna (respektivno, strogo konveksna, konkavna, strogo konkavna) na segmentu $[a, b]$. Analogna tvrđenja bi važila za funkciju definisanu na intervalima $(a, b]$ (gde je a konačan broj ili $-\infty$) ili $[a, b)$ (gde je b konačan broj ili $+\infty$).

Primer 3.110. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, dva puta diferencijabilana na intervalu $(-\infty, 0)$ i na intervalu $(0, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \text{ i } f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \text{ za } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Kako je $f''(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, a takođe i za $x \in (0, +\infty)$, to je funkcija f strogo konkavna na intervalu $(-\infty, 0)$ i takođe, strogo konkavna na intervalu $(0, +\infty)$. Međutim ona nije konkavna na $(-\infty, +\infty)$, jer za svako $x \neq 0$ važi

$$f\left(\frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2}x\right) = f(0) = 0 < f(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x).$$

Osim toga,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to -0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty,$$

i

$$f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty. \bullet$$

Sledeća teorema daje geometrijsku karakterizaciju svojstva konveksnosti (konkavnosti) diferencijabilne funkcije.

Teorema 3.111. *Neka je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ difencijabilna funkcija na intervalu (a, b).*

Funkcija f je konveksna (konkavna) na intervalu (a, b) ako i samo ako tačke njenog grafika nisu ispod (iznad) tačaka tangente konstruisane u proizvoljnoj tački tog grafika.

Funkcija f je strogo konveksna (strogo konkavna) na intervalu (a, b) ako i samo ako su tačke njenog grafika iznad (ispod) tačaka tangente konstruisane u proizvoljnoj tački tog grafika, ne uključujući tačku dodira.

Dokaz. Neka je funkcija f konveksna na intervalu (a, b) i neka je $x_0 \in (a, b)$. Tangenta na grafik funkcije f u tački $(x_0, f(x_0))$ ima jednačinu $y = t(x)$ gde je

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Neka je $x \in (a, b)$ proizvoljna tačka. Tada je

$$f(x) - t(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.131}$$

Primenom Lagranžove teoreme zaključujemo da postoji tačka ξ između tačaka x_0 i x ($\xi \in (x_0, x)$ ako je $x_0 < x$, i $\xi \in (x, x_0)$ ako je $x_0 > x$) takva da je

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \tag{3.132}$$

Iz (3.131) i (3.132) sledi

$$f(x) - t(x) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0). \tag{3.133}$$

Na osnovu Teoreme 3.102 sledi da f' raste na intervalu (a, b).

Ako je $x < x_0$, onda je $\xi \in (x, x_0)$, te je $\xi < x_0$, i stoga je $f'(\xi) \leq f'(x_0)$. Prema tome, $x - x_0 < 0$ i $f'(\xi) - f'(x_0) \leq 0$, pa iz (3.133) sledi da je $f(x) - t(x) \geq 0$.

Ako je $x > x_0$, onda je $\xi \in (x_0, x)$, te je $\xi > x_0$, i stoga je $f'(\xi) \geq f'(x_0)$. Prema tome, $x - x_0 > 0$ i $f'(\xi) - f'(x_0) \geq 0$, pa iz (3.133) sledi da je $f(x) - t(x) \geq 0$.

Obrnuto, neka je $f(x) \geq t(x)$, tj. $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ za svako $x \in (a, b)$. Tada je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \quad \text{za} \;\; x > x_0 \tag{3.134}$$

i

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \quad \text{za} \;\; x < x_0. \tag{3.135}$$

Neka su x_1, x_2, x_3 tačke iz intervala (a, b) takve da je $x_1 < x_2 < x_3$. Iz (3.134), stavljajući da je $x = x_3$ i $x_0 = x_2$, dobijamo

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq f'(x_2), \tag{3.136}$$

dok iz (3.135), stavljajući da je $x = x_1$ i $x_0 = x_2$, dobijamo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \tag{3.137}$$

Iz (3.135) i (3.137) sledi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Sada na osnovu Tvrđenja 3.101 zaključujemo da je funkcija f konveksna na intervalu (a, b).

Ostala tvrđenja se dokazuju slično. ■

Napomena 3.112. Na osnovu Napomene 3.108 i dokaza Teoreme 3.111 sledi da ako je funkcija diferencijabilna na segmentu $[a, b]$ (pod izvodom u tački a podrazumevamo desni izvod, a u tački b levi izvod) i strogo konveksna (strogo konkavna) na $[a, b]$, onda sve tačke grafika leže iznad (ispod) tačaka kako leve tangente grafika funkcije u tački $(b, f(b))$, ne uključujući tačku $(b, f(b))$, tako i desne tangente grafika funkcije u tački $(a, f(a))$, ne uključujući tačku $(a, f(a))$.

Prevojne tačke funkcije

Definicija 3.113. *Neka je funkcija f definisana na intervalu (a, b). Za tačku $x_0 \in (a, b)$ kažemo da je prevojna tačka funkcije f, a za tačku $(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka grafika funkcije, ako je funkcija f neprekidna u tački x_0 i ako postoji $\delta > 0$ tako da je funkcija strogo konveksna na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ i strogo konkavna na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$, ili da je f strogo konkavna na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ i strogo konveksna na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$.*

Ako je funkcija f diferencijabilna u okolini prevojne tačke x_0, sledi da grafik prelazi s jedne na drugu stranu tangente, tj. ako je $y = t(x)$ jednačina te tangente, onda razlika $f(x) - t(x)$ menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku x_0. Međutim ovo je samo potreban ali ne i dovoljan uslov da diferencijabilna funkcija u okolini tačke x_0 ima prevoj u tački x_0, što pokazuje sledeći primer.

Primer 3.114. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Za $x \neq 0$ važi

$$f'(x) = 6x^2 + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = 12x + (6x - \frac{4}{x^3}) \sin \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

Funkcija ima prvi izvod u tački 0:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Prema tome, tangenta grafika funkcije u tački $(0,0)$ je x-osa. Za svako $x > 0$ važi

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin \frac{1}{x^2} \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad -x^3 \leq x^3 \sin \frac{1}{x^2} \leq x^3 \\ &\Longrightarrow \quad x^3 \leq 2x^3 + x^3 \sin \frac{1}{x^2} \leq 3x^3 \\ &\Longrightarrow \quad 2x^3 + x^3 \sin \frac{1}{x^2} > 0, \end{aligned}$$

dok za svako $x < 0$ važi

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin \frac{1}{x^2} \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad -x^3 \geq x^3 \sin \frac{1}{x^2} \geq x^3 \\ &\Longrightarrow \quad x^3 \geq 2x^3 + x^3 \sin \frac{1}{x^2} \geq 3x^3 \\ &\Longrightarrow \quad 2x^3 + x^3 \sin \frac{1}{x^2} < 0. \end{aligned}$$

Prema tome, $f(x) < 0$ za $x < 0$ i $f(x) > 0$ za $x > 0$, pa grafik funkcije prelazi sa jedne na drugu stranu tangente grafika u tački $(0,0)$. Pokazaćemo da $(0,0)$ nije prevojna tačka grafika funkcije.

Primetimo da je za $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f''(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) &= \frac{12}{\sqrt{n\pi}} - 6\sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{12}{\sqrt{n\pi}} - 6\sqrt{n\pi}(-1)^n, \\ f''(-\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) &= -\frac{12}{\sqrt{n\pi}} + 6\sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = -\frac{12}{\sqrt{n\pi}} + 6\sqrt{n\pi}(-1)^n, \end{aligned}$$

pa je $f''(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) > 0$ i $f''(-\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) < 0$ za neparno n, i $f''(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) < 0$ i $f''(-\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) > 0$ za parno n. To znači da drugi izvod beskonačno mnogo puta menja znak u proizvoljno maloj, kako desnoj tako i levoj okolini tačke 0, te stoga funkcija beskonačno mnogo puta menja karakter konveksnosti u proizvoljno maloj desnoj, a takođe i levoj okolini tačke 0 (Teorema 3.104). Prema tome, 0 nije prevojna tačka funkcije f.[16] •

Sledeća teorema govori o tome da prevojne tačke funkcije treba tražiti među tačkama u kojima drugi izvod ne postoji ili je jednak 0.

Teorema 3.115. *(Neophodni uslovi za egzistenciju prevojne tačke) Neka je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na intervalu (a, b). Ako je $x_0 \in (a, b)$ prevojna tačka funkcije f, onda $f''(x_0)$ ili ne postoji ili je $f''(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_0 prevojna tačka funkcije f i da postoji $\delta > 0$ tako da je funkcija strogo konkavna na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ i strogo konveksna na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. Na osnovu Teoreme 3.102 i Teoreme 3.103 sledi da f' strogo opada na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ i strogo raste na $(x_0, x_0 + \delta)$. To znači da funkcija f' ima lokalni minimum u tački x_0, pa na osnovu Fermaove teoreme, ako postoji $f''(x_0)$, mora biti $f''(x_0) = 0$. ■

Teorema 3.116. *(Dovoljni uslovi za egzistenciju prevojne tačke) Neka je funkcija $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i dva puta diferencijabilna na intervalima $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$. Ako $f''(x)$ menja znak pri prolasku argumenta kroz tačku x_0, tj. ako je funkcija f'' pozitivna (negativna) na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ i negativna (pozitivna) na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$, onda je x_0 prevojna tačka funkcije f.*

Dokaz. Neka je je funkcija f'' pozitivna (negativna) na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ i negativna (pozitivna) na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. Iz Teoreme 3.104 sledi da je funkcija f strogo konveksna (strogo konkavna) na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ i strogo konkavna (strogo konveksna) na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$, pa je x_0 prevojna tačka funkcije f. ■

---

[16] Zaista, ako bi 0 bila prevojna tačka funkcije f, onda bi postajalo $\delta > 0$ tako da je funkcija strogo konveksna na intervalu $(0, \delta)$, a strogo konkavna na intervalu $(-\delta, 0)$, ili je strogo konkavna na intervalu $(0, \delta)$, a strogo konkvesna na intervalu $(-\delta, 0)$. Određenosti radi pretpostavimo da je funkcija f strogo konveksna na intervalu $(0, \delta)$, a strogo konkavna na intervalu $(-\delta, 0)$. Iz Teoreme 3.104 sledi da je

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{za } x \in (0, \delta) \tag{3.138}$$

i

$$f''(x) \leq 0 \quad \text{za } x \in (-\delta, 0). \tag{3.139}$$

S obzirom da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0$, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$, $\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \in (0, \delta)$ i $-\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \in (-\delta, 0)$. Međutim za parno n takvo da je $n \geq n_0$ važi $f''(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) < 0$ i $\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \in (0, \delta)$, što je u suprotnosti sa (3.138), a takođe i $-\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \in (-\delta, 0)$ i $f''(-\frac{1}{\sqrt{n\pi}}) > 0$, što je u suprotnosti sa (3.139).

Primer 3.117. Funkcija $f(x) = \cos x$ ima drugi $f''(x) = -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ i

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcija $f''(x)$ menja znak pri prolazu kroz svaku od tačaka $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Prema tome, svaka od tačaka $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je prevojna tačka funkcije f. •

Primer 3.118. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ima prvi i drugi izvod u svakoj tački $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

i

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Budući da je $f''(x) > 0$ za $x < 0$, i $f''(x) < 0$ za $x > 0$, to je f strogo konveksna na intervalu $(-\infty, 0)$ i strogo konkavna na intervalu $(0, +\infty)$, neprekidna je u 0, pa je 0 tačka prevoja funkcije f. Tangenta grafika funkcije u tački $(0, 0)$ je vertikalna, to je prava $x = 0$, tj. y-osa. I u ovom slučaju se može, u određenom smislu, reći da grafik funkcije u tački $(0, 0)$ prelazi s jedne na drugu stranu svoje tangenta •

Primer 3.119. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Funkcija je neprekidna u tački 1, strogo konveksna na intervalu $(-\infty, 1)$ jer je $f''(x) = 2 > 0$ za $x < 1$, dok je strogo konkavna na intervalu $(1, +\infty)$ jer je $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0$ za $x > 1$. Prema tome, tačka $x = 1$ je prevojna tačka funkcije. Primetimo da funkcija nema izvod u tački 1 jer je $f'_-(1) = 2$ i $f'_+(1) = \frac{1}{2}$.
•

Teorema 3.120. *Neka je data funkcija $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$. Ako je funkcija f $(n+1)$-puta diferencijabilna u tački x_0, gde je n paran broj, $n \geq 2$, i ako je*

$$f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0 \neq f^{(n+1)}(x_0),$$

onda je x_0 prevojna tačka funkcije f.