АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

Јун 1 - I део **30.06.2020.**

1. *(5 poena)* Нека је $\mathbf{G} = (\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}, \cdot)$, $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ и $\theta : G \to Sym(H)$ пресликавање дефинисано са $\theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \sigma_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ где је $\sigma_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}(z) = \frac{az+c}{bz+d}, z \in H$. Доказати да је θ дејство групе $\mathbf{G}$ на скуп H. ($\mathbf{G}$ је група 2×2 матрица са реалним коефицијентима чија је детерминанта 1 и операцијом множења матрица, скуп H је горња полураван. Доказати и да је $\sigma_A \in Sym(H), A \in G$!)

2. *(5 poena)* Нека су p и q различити прости бројеви, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{G}$ група реда pq^n, $\mathbf{P}$ p-подгрупа Силова групе $\mathbf{G}$ и $\mathbf{Q}$ q-подгрупа Силова групе $\mathbf{G}$. Доказати:
   (а) $\mathbf{P} = N(\mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q} \lhd \mathbf{G}$.
   (б) Ако је $|G| = pq^3$ тада је $\mathbf{P} \lhd \mathbf{G}$ или $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{G}$ или $|G| = 24$.

3. *(5 poena)*
   (а) Нека је $\mathbf{G} = \mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{H_n}$ и за свако $i = \overline{1, n}, a_i \in H_i, r(a_i) = n_i \in \mathbb{N}$. Одредити ред елемента $a_1 a_2 \cdots a_n$.
   (б) Нека је p прост број, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{C}_{p^n}$ циклична група реда p^n. Испитати да ли је $\mathbf{C}_{p^n}$ разложива група.

4. *(5 poena)* Нека су $\mathbf{H}$ и $\mathbf{K}$ нормалне подгрупе групе $\mathbf{G}$, такве да су $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ решиве групе. Доказати да је решива и група $\mathbf{G}/(\mathbf{H} \cap \mathbf{K})$.

АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

Јун 1 - I део **30.06.2020.**

1. *(5 poena)* Нека је $\mathbf{G} = (\{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}, \cdot)$, $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ и $\theta : G \to Sym(H)$ пресликавање дефинисано са $\theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \sigma_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ где је $\sigma_{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}(z) = \frac{az+c}{bz+d}, z \in H$. Доказати да је θ дејство групе $\mathbf{G}$ на скуп H. ($\mathbf{G}$ је група 2×2 матрица са реалним коефицијентима чија је детерминанта 1 и операцијом множења матрица, скуп H је горња полураван. Доказати и да је $\sigma_A \in Sym(H), A \in G$!)

2. *(5 poena)* Нека су p и q различити прости бројеви, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{G}$ група реда pq^n, $\mathbf{P}$ p-подгрупа Силова групе $\mathbf{G}$ и $\mathbf{Q}$ q-подгрупа Силова групе $\mathbf{G}$. Доказати:
   (а) $\mathbf{P} = N(\mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q} \lhd \mathbf{G}$.
   (б) Ако је $|G| = pq^3$ тада је $\mathbf{P} \lhd \mathbf{G}$ или $\mathbf{Q} \lhd \mathbf{G}$ или $|G| = 24$.

3. *(5 poena)*
   (а) Нека је $\mathbf{G} = \mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{H_n}$ и за свако $i = \overline{1, n}, a_i \in H_i, r(a_i) = n_i \in \mathbb{N}$. Одредити ред елемента $a_1 a_2 \cdots a_n$.
   (б) Нека је p прост број, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{C}_{p^n}$ циклична група реда p^n. Испитати да ли је $\mathbf{C}_{p^n}$ разложива група.

4. *(5 poena)* Нека су $\mathbf{H}$ и $\mathbf{K}$ нормалне подгрупе групе $\mathbf{G}$, такве да су $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}/\mathbf{K}$ решиве групе. Доказати да је решива и група $\mathbf{G}/(\mathbf{H} \cap \mathbf{K})$.

Пример: Одредити све неизоморфне групе реда 20.