GLAVA I - Diferencijalne jednačine prvog reda

1. Osnovni pojmovi, definicije i teoreme

OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA U IMPLICITNOM OBLIKU:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad F : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^3$$

OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA U NORMALNOM OBLIKU:

$$y' = f(x, y) \qquad f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

Uporedo sa DJ (1) razmatra se RECIPROČNA DJ

$$x' = \frac{1}{f(x, y)}\,. \tag{2}$$

Definicija 1 *Oblast definisanosti* DJ (1) *je unija oblasti definisanosti funkcija f i $1/f$.*

oblast definisanosti DJ (1) ne sadrži tačke u kojima funkcije f i $1/f$ nisu definisane.

oblast definisanosti DJ (1) je i oblast definisanosti recipročne DJ (2)

$\mathbb{D} \longrightarrow$ oblast definisanosti DJ

Primer 1 Za DJ

$$y' = \frac{y \ln y}{x} \tag{3}$$

funkcija $f(x, y) = y \ln y/x$ je definisana u oblasti $((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) \times (0, \infty)$, a recipročna funkcija u oblasti $(-\infty, \infty) \times ((0, 1) \cup (1, \infty))$. Ove funkcije su neodređene u tački $(0, 1)$, te je oblast definisanosti ove jednačine $\mathbb{D} = ((-\infty, \infty) \times (0, \infty)) \setminus \{(0, 1)\}$. $\square$

DJ (1) se može izraziti u *diferencijalnom obliku*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

kao i u *simetričnom obliku*

$$\frac{dx}{N(x,y)} = -\frac{dy}{M(x,y)}.$$

Prednost ovakvog izražavanja je u tome što su promenljive x i y ravnopravne. Oblast definisanosti DJ u diferencijalnom obliku čine sve tačke zajedničke oblasti definisanosti funkcija M i N u kojima je $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$. Analogno važi i za DJ u simetričnom obliku.

Definicija 2 *U oblasti definisanosti $\mathbb{D}$ jednačine (1), funkcija $y = \varphi(x)$ definisana za $x \in (a,b)$, je* **rešenje ove jednačine***, ako za svako $x \in (a,b)$ važi:*

(i) postoji $\varphi'(x)$;
(ii) $(x, \varphi(x)) \in \mathbb{D}$;
(iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Definicija 3 *Ako je funkcija $y = \varphi(x), x \in (a,b)$, rešenje* DJ (1), *geometrijsko mesto tačaka $\Gamma = \{(x, \varphi(x)),\ x \in (a,b)\}$ je* **integralna kriva DJ** *ili* **grafik rešenja**.

Zbog druge osobine u definiciji rešenja, sledi da grafik rešenja pripada oblasti $\mathbb{D}$.

Košijev problem za DJ (1): *Za datu tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ odrediti rešenje $y = \varphi(x)$ jednačine* (1), *definisano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava uslov* (*Košijev uslov, početni uslov*)

$$\varphi(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Rešenje Košijevog problema (1)–(4) postoji ako postoji interval (a,b) kome pripada tačka x_0 i ako postoji funkcija $y = \varphi(x)$, definisana na tom intervalu, koja je rešenje DJ (1) i koja zadovoljava uslov (4).

Geometrijski, rešiti Košijev (početni) problem znači naći integralnu krivu date DJ koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0).

Ako $f(x,y) \to \infty$ kad $x \to x_0,\ y \to y_0$, određuje se Košijevo rešenje $x = \psi(y)$ recipročne DJ koje zadovoljava početni uslov $\psi(y_0) = x_0$.

Fundamentalna pitanja koja se postavljaju u vezi Košijevog problema su:

(1) **Egzistencija rešenja:** Pod kojim uslovima postoji rešenje KP (1)–(4) definisano u nekoj okolini tačke x_0? Odnosno, da li postoji integralna kriva DJ koja prolazi kroz početnu tačku?

(2) **Jedinstvenost rešenja:** Ako rešenje KP postoji, pod kojim uslovima je to rešenje jedinstveno? Odnosno, pod kojim uslovima postoji samo jedna integralna kriva DJ koja prolazi kroz datu početnu tačku?

(3) **Interval egzistencije rešenja:** Koji je maksimalni interval (α, β) egzistencije rešenje Košijevog problema (1)–(4)?

Definicija 4 *Podskup oblasti definisanosti* DJ (1) *kroz čiju svaku tačku prolazi neka integralna kriva, naziva se* **oblast egzistencije rešenja** *ovog sistema. Ako, pored toga, kroz svaku tačku ove oblasti prolazi samo jedna integralna kriva, takva oblast je* **oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja**.

Definicija 5 *Tačka kroz koju prolazi jedna i samo jedna integralna kriva, naziva se* **obična tačka diferencijalne jednačine prvog reda**.

$\mathbb{Q} \longrightarrow$ oblast egzistencije rešenja DJ

$\mathbb{G} \longrightarrow$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja DJ

$$\mathbb{G} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{D}$$

Egzistencija rešenja

Dovoljan uslov egzistencije rešenja DJ (1) u oblasti $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ je $f \in C(\mathbb{Q})$.

Teorema 1 (Peanova teorema) *Neka je $f \in C(\mathbb{Q})$. Tada za svako $(x_0, y_0) \in \mathbb{Q}$ postoji rešenje $y = \varphi(x)$* KP (1)–(4) *definisano u okolini tačke x_0.*

Jedinstvenost rešenja

Definicija 6 *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom $L > 0$ po promenljivoj y u oblasti D, ako za bilo koje dve tačke $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ važi*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Teorema 2 (Pikarova teorema) *Neka je funkcija $f \in C(\mathbb{G})$ i neka zadovoljavaju Lipšicov uslov po promenljivoj y na svakom kompaktu sadržanom u $\mathbb{G}$. Tada za svako $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ postoji jedinstveno rešenje $y = \varphi(x)$* DJ (1)*, definisano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava početni uslov $\varphi(x_0) = y_0$, odnosno $\mathbb{G}$ je oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja* DJ.

Ova teorema je *lokalnog karaktera*, jer daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja samo u nekoj okolini tačke x_0.

Lema 1 *Ako su funkcije $f, f'_y \in C(D)$, tada funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom L po promenljivoj y na svakom konveksnom kompaktu $K \subset D$, pri čemu je $L = \max_K |f'_y(x, y)|$.*

Dokaz se zasniva na neposrednoj primeni Lagranžeove teoreme o srednjoj vrednosti:*Ako su funkcije $f, f'_y \in C(D)$, za svake dve tačke $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{D}$ postoji $\theta \in (0, 1)$ tako da*

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = {f_y}'\Big(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2)\Big)(y_1 - y_2)\,.$$

$$\Longrightarrow \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Uslovi ovog tvrđenja se mogu oslabiti pretpostavkom da je funkcija f'_y ograničena na konveksnom kompaktu K, umesto $f'_y \in C(\mathbb{D})$.

Primetimo da obrnuto tvrđenje ne važi, jer funkcija f može zadovoljavati Lipšicov uslov u nekoj oblasti, a da nema parcijalni izvod $f'_y(x, y)$ u svim tačkama te oblasti. Na primer, funkcija $f(x, y) = |y| \sin x$ nema parcijalni izvod po y u tačkama x-ose, ali zadovoljava u $\mathbb{R}^2$ Lipšicov uslov sa konstantom $L = 1$ po promenljivoj y, jer je

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \big|\,|y_2| - |y_1|\,\big| \leq |y_2 - y_1| \quad \text{za svako } (x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Prema Pikarovoj teoremi i Lemi 1, dovoljni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja DJ (1) u oblasti $\mathbb{G}$ su $f, f'_y \in C(\mathbb{G})$.

Teorema 3 *Ako je $f, f'_y \in C(\mathbb{G})$, onda je $\mathbb{G}$ je oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja* DJ.

1.2. Vrste rešenja DJ

DJ (1) može imati različite vrste rešenja:

⋆ Košijevo rešenje

⋆ opšte rešenje

⋆ singularno rešenje

⋆ opšti integral

Definicija 7 *Funkcija $y = \varphi(x, c)$, $x \in (a, b)$, $c \in H \subset R$, gde je c parametar, naziva se* **opšte rešenje** DJ (1)*, ako je:*

(i) jednačina $y = \varphi(x, c)$ rešiva po c, $c = \psi(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$

(ii) funkcija $y = \varphi(x, c)$ je rešenje DJ (1) *u oblasti $\mathbb{G}$ za proizvoljan izbor parametra $c \in H$ određenog kao $c = \psi(x_0, y_0)$ za neku tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$.*

▷ $\varphi(x, \psi(x, y)) = y$ za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$

▷ za proizvoljnu tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ jednačina $y = \varphi(x, c)$ je rešiva po $c = c_0 = \psi(x_0, y_0)$. Tada je funkcija $y = \varphi(x, c_0)$ je rešenje DJ (1) koje zadovoljava početni uslov $\varphi(x_0, c_0) = \varphi(x_0, \psi(x_0, y_0)) = y_0$

Stav 1 *Opšte rešenje* DJ (1) *sadrži sva Košijeva rešenja čije integralne krive pripadaju oblasti $\mathbb{G}$.*

Dokaz: Neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ proizvoljna tačka i $y = g(x)$ Košijevo rešenje DJ (1) definisano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava početni uslov $g(x_0) = y_0$. Neka je $y = \varphi(x, c)$ opšte rešenje te jednačine. Jednačina $y = \varphi(x, c)$ je rešiva po c; $c = \psi(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$, pa postoji konstanta c_0 takva da je $\psi(x_0, y_0) = c_0$. Definišimo funkciju $\varphi(x, c_0) := g_1(x)$. Ova funkcija je rešenje DJ (1) čija integralna kriva prolazi kroz tačku (x_0, y_0), jer je $g_1(x_0) = \varphi(x_0, c_0) = \varphi(x_0, \psi(x_0, y_0)) = y_0$. Kako kroz tačku (x_0, y_0) prolaze integralne krive dvaju rešenja istog Košijevog problema, a $\mathbb{G}$ je oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja, ova rešenja se moraju poklapati na zajedničkom intervalu definisanosti. Kako je proizvoljno Košijevo rešenje sadržano u opštem rešenju, opšte rešenje sadži sva Košijeva rešenja. □

Opšte rešenje DJ (1) je rešenje koje zavisi od proizvoljne konstante c, ako se iz njega za odgovarajući izbor konstante može dobiti bilo koje Košijevo rešenje.

Primer 2 $y' = y^2$

▷ Oblast definisanosti DJ je $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$. Kako je $f(x,y) = y^2$ i $f'_y(x,y) = 2y$, to je $f,\ f'_y \in C(\mathbb{R}^2)$, pa je $\mathbb{D} = \mathbb{G} = \mathbb{R}^2$.

▷ Opšte rešenje je $y = \frac{1}{c-x}$. Ako stavimo $k = 1/c$, opšte rešenje je $y = \frac{k}{1-kx}$.

▷ Košijevo rešenje kroz tačku $(-1,1)$ je $\varphi_1(x) = -1/x$, $x \in (-\infty, 0)$, sadržano je u opštem rešenju za $c = 0$;

▷ Košijevo rešenje kroz tačku $(1,0)$ je $\varphi_2(x) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$, sadržano je u opštem rešenju za $k = 0$ (odnosno $c = \infty$). □

Definicija 8 *Rešenje* DJ (1) *je* **partikularno** *ako je sadržano u opštem rešenju za konkretnu vrednost parametra* $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Pri rešavanju sistema DJ poseban problem predstavljaju rešenja koja nisu sadržana u opštem rešenju, pa zahtevaju dodatnu diskusiju. Ona se, prema tome, ne mogu dobiti iz opšteg rešenja ni za koju vrednost konstante c, a njihove integralne krive ne pripadaju oblasti jedinstvenosti rešenja.

Definicija 9 *Rešenje* $y = \varphi(x)$ DJ (1) *je* **singularno** *ako kroz svaku njegovu tačku osim njega prolazi i neko drugo rešenje, koje u toj tački ima istu tangentu kao i rešenje* $y = \varphi(x)$, *a razlikuje se od njega u ma kojoj okolini tačke dodira.*

Integralna kriva singularnog rešenja je **singularna integralna kriva**.

Definicija 10 Singularna tačka DJ (1) *je tačka koja zadovoljava jedan od sledeća dva uslova:*

(i) kroz nju prolazi više od jedne integralne krive koje se u toj tački dodiruju;

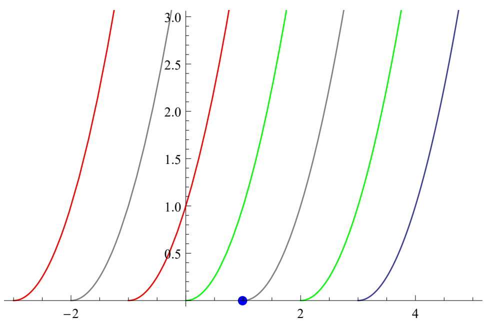
(ii) kroz nju ne prolazi niti jedna integralna kriva DJ , *ali u proizvoljnoj okolini te tačke nalazi se bar jedna obična tačka* DJ .

Svaka tačka koja leži na singularnoj integralnoj krivi DJ je singularna tačka.

Primer 3 $y' = 2\sqrt{y}$.

Oblast definisanosti DJ je $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Kako je $f(x, y) = 2\sqrt{y}$, $f'_y(x, y) = 1/\sqrt{y}$, to je $f \in C(\mathbb{D})$, ali $f'_y \in C(\mathbb{R} \times (0, \infty))$. Dakle, oblast egzistencije rešenja je $\mathbb{Q} = \mathbb{D}$, dok je $\mathbb{G}_1 = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, prema Teoremi 3, podskup oblasti egzistencije i jedinstvenosti rešenja, ali da bi odredili ovu oblast moramo rešiti DJ i ispitati da li i tačke prave $y = 0$ pripadaju oblasti egzistencije i jedinstvenosti rešenja date DJ.

Opšte rešenje DJ $y' = 2\sqrt{y}$ je familija funkcija $y = (x + c)^2$, $x \geq -c$, pa integralne krive čine delovi parabola desno od tačaka $(-c, 0)$



Slika 1: Integralne krive DJ $y' = 2\sqrt{y}$

$y = 0$ je rešenje koje nije sadržano u opštem rešenju ni za koju vrednost konstante c $\longrightarrow$ **singularno rešenje (?)**

Kroz tačku $(-x_0, 0)$ prolaze dve integralne krive:

$$y = 0 \text{ i } y = (x + x_0)^2,\ x \geq -x_0$$

sa zajedničkom tangentom u toj tački, pa je prava $y = 0$ **singularna integralna kriva**.

Dakle, oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja date DJ je

$$\mathbb{G} = \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

jer je u tačkama prave $y = 0$ narušena jedinstvenost rešenja. $\square$

REŠITI DIFERENCIJALNU JEDNAČINU ZNAČI:
⋆ ODREDITI OPŠTE REŠENJE;
⋆ ODREDITI SVA SINGULARNA REŠENJA;
⋆ ISPITATI PONAŠANJE REŠENJA U BLIZINI SINGULARNIH TAČAKA.

1.3. Geometrijska interpretacija rešenja DJ

Neka je $\varphi(x)$ rešenje Košijevog problema (1)+(4). Pošto je

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0),$$

vrednost $f(x_0, y_0)$ je koeficijent pravca tangente Košijevog rešenja u tački (x_0, y_0).

Jednačina tangente rešenja $y = \varphi(x)$ u tački (x_0, y_0), $y_0 = \varphi(x_0)$ je

$$t: \ y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

$$t: \ y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Vektor tangente je $(1, f(x_0, y_0))$.

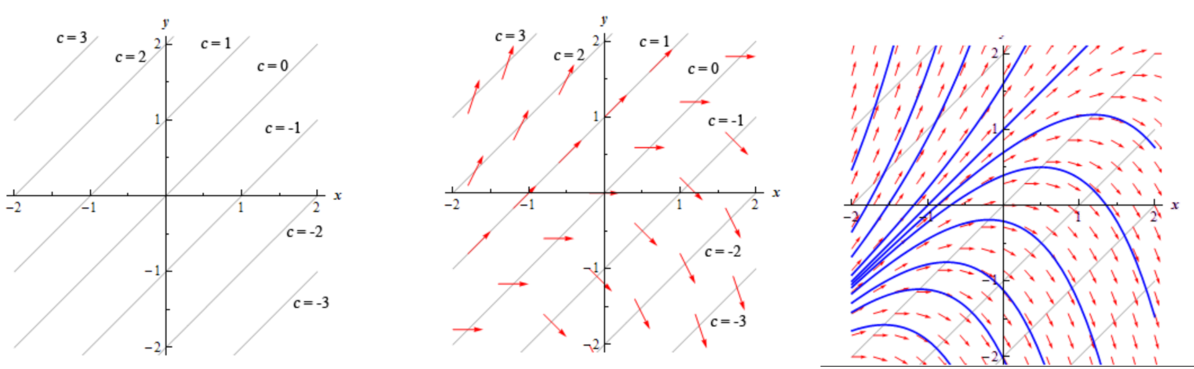
Vektorsko polje DJ je skup tačaka i odgovarajućih vektora tangenti integralne krive u tim tačkama:

$$V = \left\{ (a, b), \Big(1, f(a, b)\Big) \,\Big|\, (a, b) \in \mathbb{Q} \right\}$$

⋆ grafička interpretacija rešenja DJ koja se dobija bez rešavanja DJ

Izoklina je geometrijsko mesto tačaka u kojima polje pravaca ima istu vrednost.

Primer 4 Odredimo vektorsko polje DJ $y' = y - x$. Familija izoklina je $\{(x, y) : y - x = c,\, c \in \mathbb{R}\}$, tj. pramen pravih $y = x + c, c \in \mathbb{R}$.



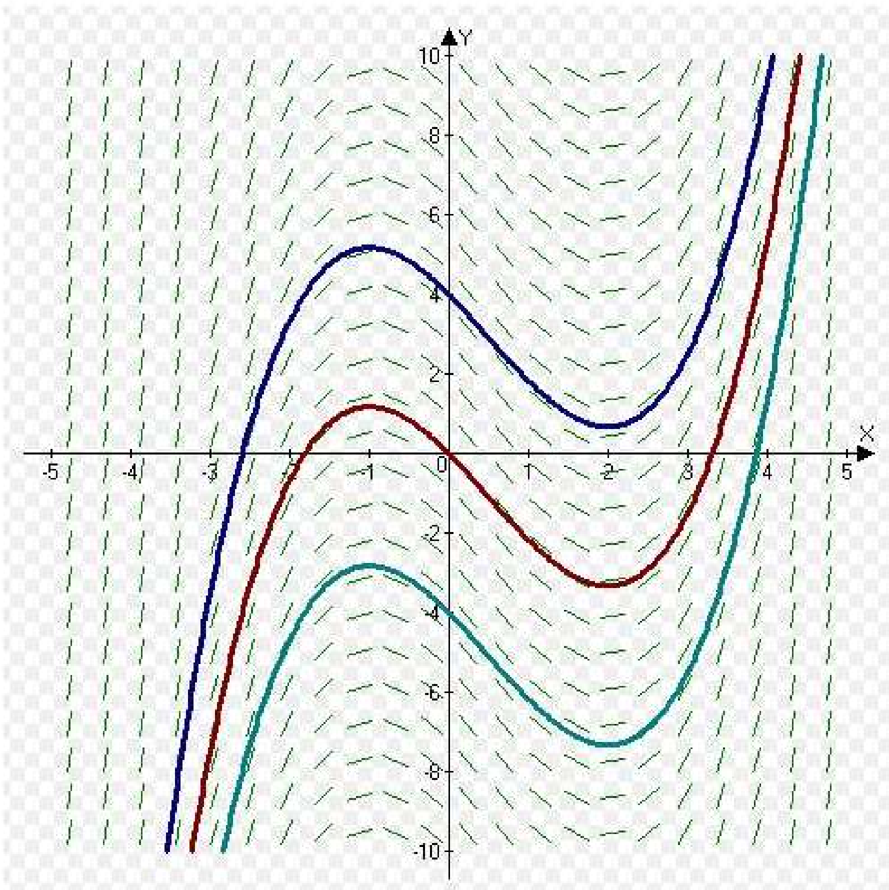
(a) (b) (c)

Slika 2: Izokline, vektorsko polje i integralne krive DJ $y' = y - x$

Na Slici 2-(a) prikazane su izokline za $c \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

- Za $c = 0$, duž prave $y = x$, pravac polja određen je vektorom $(1, f(a, a)) = (1, 0)$;
- za $c = 1$, duž prave $y = x + 1$, pravac polja je određen vektorom $(1, f(a, a + 1)) = (1, 1)$;
- za $c = -1$, duz prave $y = x - 1$, pravac polja je određen vektorom $(1, f(a, a - 1)) = (1, -1)$,

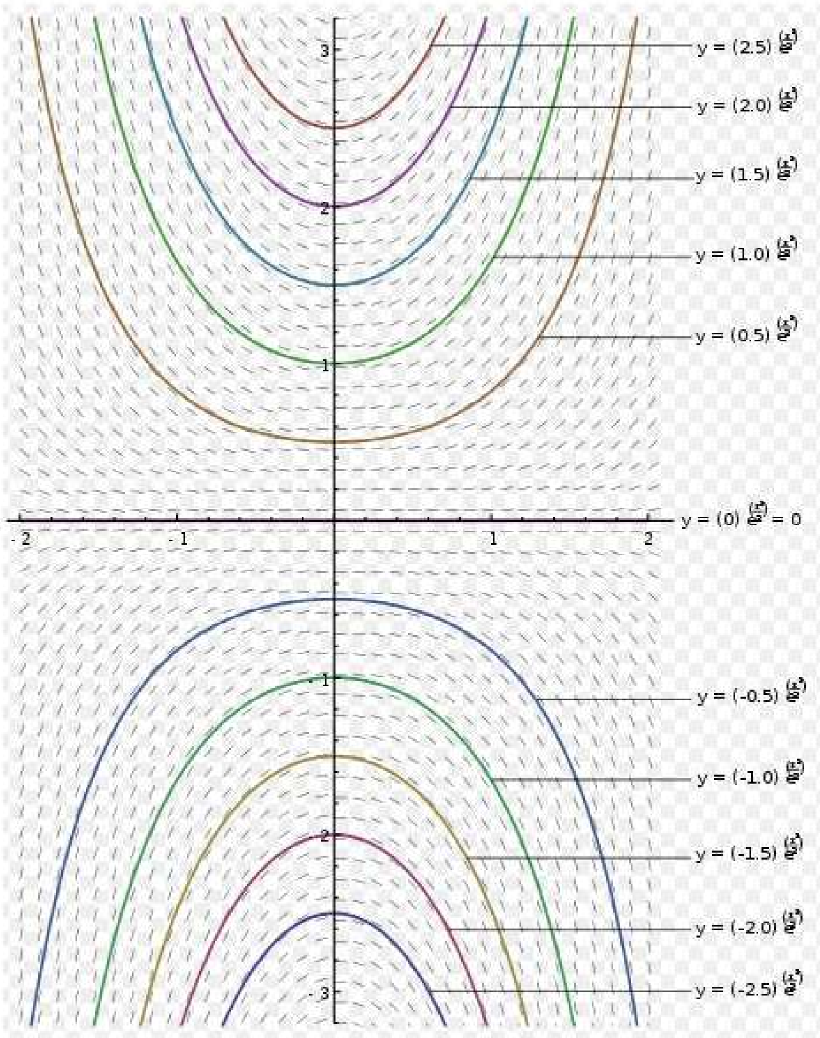
itd. (Slika 2-(b)). Na Slici 2-(c) prikazano je vektorsko polje i prateći polje pravaca, mogu se skicirati integralne krive date DJ. $\square$



Polje pravaca i integralne krive DJ $y' = x^2 - x - 1$
čije je opšte rešenje $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x + C$, $C \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + 4$$
$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + 0$$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 4$$



Polje pravaca i integralne krive DJ $y' = x \cdot y$ čije je opšte rešenje $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$