2. Integral diferencijalne jednačine

$$y' = f(x,y) \qquad f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$\mathbb{G} \quad \longrightarrow$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja DJ (1)

Definicija 1 *Funkcija $\psi \in C^{(1)}(\mathbb{G})$, koja nije identički jednaka konstanti, naziva se* **integral** DJ *, ako duž bilo kog rešenja ima konstantnu vrednost.*

Prema tome, za proizvoljno rešenje $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$, jednačine (1) mora važiti

$$\psi(x, \varphi(x)) = \text{const}, \quad x \in (a,b).$$

Nadalje će se, bez posebnog naglašavanja, podrazumevati da je bar jedan od parcijalnih izvoda ψ'_x, ψ'_y različit od nule u oblasti $\mathbb{G}$, što je ekvivalentno uslovu da funkcija ψ nije identički jednaka konstanti.

Teorema 1 (Teorema o integralu) *Neka je $\psi \in C^{(1)}(\mathbb{G})$ funkcija koja nije identički jednaka konstanti. Funkcija ψ je integral DJ (1) ako i samo ako je*

$$\psi'_x(x,y) + \psi'_y(x,y)\, f(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{G}. \tag{2}$$

Dokaz: Neka je funkcija $\psi = \psi(x,y)$ integral DJ (1) u oblasti $\mathbb{G}$ i neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ proizvoljna tačka. Tada postoji jedinstveno rešenje $y = \varphi(x)$ ove jednačine, definisano u nekoj okolini (a,b) tačke x_0, koje ispunjava početni uslov $\varphi(x_0) = y_0$. Kako je $\psi(x,\varphi(x)) = \text{const}$, $x \in (a,b)$, to je

$$\frac{d\psi}{dx} = \psi'_x(x,\varphi(x)) + \psi'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad x \in (a,b).$$

$$\psi'_x(x,\varphi(x)) + \psi'_y(x,\varphi(x))f(x,\varphi(x)) = 0, \quad x \in (a,b),$$

$$x = x_0, \varphi(x_0) = y_0$$

$$\psi'_x(x_0,y_0) + \psi'_y(x_0,y_0)f(x_0,y_0) = 0.$$

Kako je $(x_0,y_0) \in \mathbb{G}$ proizvoljna tačka, to (2) važi za svako $(x,y) \in \mathbb{G}$.

Obrnuto, neka važi relacija (2) i neka je $(x_0,y_0) \in \mathbb{G}$ proizvoljna tačka. Neke je $y = \varphi(x), x \in (a,b), x_0 \in (a,b)$ rešenje DJ kroz datu tačku. Kako grafik rešenja $y = \varphi(x), x \in (a,b)$, pripada oblasti $\mathbb{G}$, to je

$$\begin{aligned} 0 = \psi'_x(x,\varphi(x)) + \psi'_y(x,\varphi(x))f(x,\varphi(x)) &= \psi'_x(x,\varphi(x)) + \psi'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) \\ &= \frac{d\psi(x,\varphi(x))}{dx}, \quad x \in (a,b). \end{aligned}$$

Dakle, $\psi(x,\varphi(x)) =$const, $x \in (a,b)$, pa je prema Definiciji 1, $\psi(x,y)$ integral DJ (1). $\square$

Definicija 2 *Ako je funkcija ψ integral* DJ (1) *u oblasti $\mathbb{G}$, relacija*

$$\psi(x,y) = c, \quad c = \text{ const} \tag{3}$$

se naziva **<u>opšti integral</u>** *te jednačine.*

Konstanta c u prethodnoj definiciji je proizvoljna sa ograničenjem da relacija (3) ima smisla. Naredna teorema povezuje opšti integral sa opštim rešenjem DJ.

Teorema 2 *Opštim integralom* (3) DJ (1) *implicitno je određeno opšte rešenje ove* DJ .

Dokaz: Pošto je funkcija $\psi(x,y)$ integral DJ (1), to je $\psi'_y(x,y) \neq 0$ i $\psi'_x(x,y)$, $\psi'_y(x,y)$ su neprekidne funkcije u oblasti $\mathbb{G}$. Prema teoremi o egzisteniciji i izvodu implicitne funkcije jednačina $\psi(x,y) = c$ može se jedinstveno rešiti po y, odnosno postoji neprekidno diferencijabilna funkcija $y = \varphi(x,c)$ takva da je $\psi(x,\varphi(x,c)) \equiv c$.

Dokažimo da je $y = \varphi(x,c)$ opšte rešenje DJ (1).

Po Teoremi 1 je

$$\psi'_x(x,\varphi(x,c)) + \psi'_y(x,\varphi(x,c))f(x,\varphi(x,c)) \equiv 0. \tag{$*$}$$

Diferenciranjem identiteta $\psi(x,\varphi(x,c)) \equiv c$ sledi

$$\psi'_x(x,\varphi(x,c)) + \psi'_y(x,\varphi(x,c))\varphi'(x,c) \equiv 0\,. \tag{$**$}$$

$$(*) \quad \wedge \quad (**) \quad \Longrightarrow \quad \psi'_y(x,\varphi(x,c))\,[\varphi'(x,c) - f(x,\varphi(x,c))] \equiv 0.$$

Kako je $\psi'_y(x,\varphi(x,c)) \neq 0$, to mora biti $\varphi'(x,c) \equiv f(x,\varphi(x,c)$ u oblasti definisanosti funkcije $y = \varphi(x,c)$. Dakle, ova funkcija je rešenje DJ (1). Da je to opšte rešenje sledi iz definicije opšteg rešenja. $\square$

$\boxed{\text{Pitanje:}}$ Ako je ψ integral DJ (1) i $\Phi(t)$ neka data funkcija, definisana u oblasti vrednosti integrala ψ, koje uslove bi trebalo da ispunjava funkcija Φ, da bi funkcija $\theta = \Phi(\psi)$ bila integral ove DJ?

Teorema 3 *Ako je neprekidno diferencijabilna funkcija $\Phi(t)$ definisana u oblasti vrednosti integrala ψ* DJ (1), *pri čemu je $\Phi'(t) \neq 0$ za svako t iz te oblasti, tada je funkcija $\theta(x,y) = \Phi(\psi(x,y))$ integral* DJ (1).

Dokaz: Jasno, $\theta \in C^{(1)}(\mathbb{G})$, pri čemu je bar jedan parcijalni izvod različit od nule u oblasti $\mathbb{G}$. Na primer, ako je $\psi'_y(x,y) \neq 0, (x,y) \in \mathbb{G}$, tada je

$$\theta'_y(x,y) = \Phi'(\psi(x,y))\,\psi'_y(x,y) \neq 0,\ (x,y) \in \mathbb{G}.$$

Šta više, za svako $(x,y) \in \mathbb{G}$ važi

$$\theta'_x(x,y) + \theta'_y(x,y)\,f(x,y) = \Phi'(\psi)\,[\psi'_x(x,y) + \psi'_y(x,y)\,f(x,y)] = 0,$$

jer je $\psi(x,y)$ integral DJ (1). Dakle, prema Teoremi 1 funkcija θ je integral DJ (1). $\square$

Na osnovu prethodnog stava zaključujemo da se poznavanjem jednog integrala $\psi(x,y)$ DJ (1) može dobiti drugi oblik integrala ove jednačine, za pogodan izbor funkcije Φ. Medjutim, pokazaćemo da su ti integrali funkcionalno zavisni.

Funkcija $g(x,y)$ je funkcionalno zavisna od funkcije $f(x,y)$ u zajedničkoj oblasti definisanosti D, ako postoji funkcija $\Phi(t)$, definisana u oblasti vrednosti funkcije $f(x,y)$, tako da je $g(x,y) = \Phi(f(x,y))$ za svako $(x,y) \in D$.

Dovoljni uslovi zavisnosti dveju funkcija izraženi su sledećim tvrđenjem:

Lema 1 *Neka su funkcije $f, g \in C^{(1)}(D)$ i neka je*

$$\frac{D(f,g)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{vmatrix} = 0, \quad (x,y) \in D.$$

Ako za tačku $(x_0,y_0) \in D$ važi $(f'_x(x_0,y_0))^2 + (f'_y(x_0,y_0))^2 \neq 0$, tada je funkcija $g(x,y)$ funkcionalno zavisna od funkcije $f(x,y)$ u nekoj okolini $D_0 \subset D$ tačke (x_0,y_0).

Teorema 4 *Bilo koja dva integrala $\psi(x,y)$ i $\theta(x,y)$ DJ (1), definisana u oblasti $\mathbb{G}$, funkcionalno su zavisna u nekoj oblasti $G_0 \subset \mathbb{G}$.*

Dokaz: Kako su $\psi(x,y)$ i $\theta(x,y)$ integrali DJ (1) u oblasti $\mathbb{G}$, po Teoremi o integralu je

$$\psi'_x(x,y) + \psi'_y(x,y)\,f(x,y) = 0,$$
$$\theta'_x(x,y) + \theta'_y(x,y)\,f(x,y) = 0,$$

što je homogeni sistem po nepoznatim $\{1, f(x,y)\}$, pa kako je njegovo rešenje netrivijalno, sledi

$$\begin{vmatrix} \psi'_x(x,y) & \psi'_y(x,y) \\ \theta'_x(x,y) & \theta'_y(x,y) \end{vmatrix} = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{G}.$$

Kako je za bilo koju tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ bar jedan od parcijalnih izvoda u svakoj vrsti ove determinante različit od nule, po Lemi 1 sledi funkcionalna zavisnost integrala $\psi(x,y)$ i $\theta(x,y)$ u nekoj okolini G_0 posmatrane tačke. $\square$

Prema tome, svaki integral DJ (1) može se izraziti u funkciji samo jednog integrala te jednačine, za određen izbor funkcije Φ. Ova osobina integrala omogućava da se opšti integral izrazi u što jednostavnijem obliku, kao i da se ispita priroda nekih diskutabilnih rešenja.

$\boxed{\text{T:}}$ (Teorema o egzistenciji i izvodu implicitne funkcije): Neka je $E \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in E$.

(i) $F : E \to \mathbb{R}$ je neprekidna

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ postoji i neprekidna je funkcija na E

(iv) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Tada postoji okolina $W_{(x_0,y_0)} = U_{x_0} \times V_{y_0}$ i jednoznačno odredjenja neprekidna funkcija $f : U_{x_0} \to V_{y_0}$ tako da je $y_0 = f(x_0)$ i $F(x, f(x)) = 0$ za svako $x \in U_{x_0}$.

Ako je zadovoljen i uslov

(v) $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ postoji i neprekidna je funkcija na E

tada je $f \in C^1(U_{x_0})$ i za svako $x \in U_{x_0}$ važi:

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F(x, f(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, f(x))}{\partial y}}.$$