4. Egzistencija i jedinstvenost rešenja DJ u normalnom obliku

Fundamentalna pitanja koja se postavljaju u vezi Košijevog problema

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

(1) **Egzistencija rešenja:** Pod kojim uslovima postoji rešenje KP (1) definisano u nekoj okolini tačke x_0?

(2) **Jedinstvenost rešenja:** Ako rešenje KP postoji, pod kojim uslovima je to rešenje jedinstveno? Odnosno, pod kojim uslovima postoji samo jedna integralna kriva DJ koja prolazi kroz datu početnu tačku?

(3) **Interval egzistencije rešenja:** Koji je maksimalni interval (α, β) egzistencije rešenje Košijevog problema (1)?

Lema o ekvivalenciji

Neka je funkcija f definisana u oblasti $\mathbb{D}$ i neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ data tačka. Problem egzistencije i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema (1) je u direktnoj vezi sa egzistencijom i jedinstvenošću rešenja odgovarajuće integralne jednačine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{2}$$

Definicija 1 *Neka je funkcija f definisana u oblasti $\mathbb{D}$. Funkcija $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, je rešenje integralne jednačine (2) ako je za svako $x \in (a, b)$:*

1. $(x, \varphi(x)) \in \mathbb{D}$;
2. $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$

Naredno tvrđenje upućuje na *ekvivalenciju rešavanja Košijevog problema* (1) *i odgovarajuće integralne jednačine* (2).

Lema 1 [Lema o ekvivalenciji] *Neka je $f \in C(\mathbb{D})$. Funkcija $y = \varphi(x) \in C^1(a, b)$ je rešenje Košijevog problema (1) ako i samo ako je $y = \varphi(x)$ neprekidno rešenje integralne jednačine (2).*

Dokaz: ($\Rightarrow$): Ako je funkcija $y = \varphi(x) \in C^1(a,b)$ rešenje Košijevog problema (1), tada integralna kriva pripada oblasti $\mathbb{D}$. Dakle, $(x, \varphi(x)) \in \mathbb{D}$ za svako $x \in (a,b)$. Leva i desna strana jednakosti $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $x \in (a,b)$ su neprekidne, pa integracijom na $[x_0, x]$ se dobija , sledi

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt, \ x \in (a,b)\,, \tag{3}$$

pa je $y = \varphi(x), x \in (a,b)$ neprekidno rešenje integralne jednačine (2).

($\Leftarrow$): Ako je $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$ neprekidno rešenje integralne jednačine (2), zbog neprekidnosti funkcije f funkcija $f(s, \varphi(s))$ je neprekidna kao funkcija po $s \in (a,b)$, pa je integral u (3) diferencijabilna funkcija. Deferenciranjem (3) dobija se $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ za svako $x \in (a,b)$, odnosno $\varphi(x) \in C^1(a,b)$ je rešenje DJ $y' = f(x,y)$. Kako je $\varphi(x_0) = y_0$, funkcija $y = \varphi(x), x \in (a,b)$ je rešenje Košijevog problema (1). $\square$

Peanova teorema egzistencije rešenja

Neka je (X, d) metrički prostor i $\mathcal{F}$ skup realnih neprekidnih funkcija na X.

Definicija 2 *Skup $\mathcal{F} \subset C(X)$ je* **uniformno ograničen***, ako postoji $M > 0$ tako da je $|f(x)| \leq M$ za svako $x \in X$ i svako $f \in \mathcal{F}$.*

Definicija 3 *Skup $\mathcal{F} \subset C(X)$ je* **ekvineprekidan***, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ za svako $f \in \mathcal{F}$ i svako $x_1, x_2 \in X$ koji zadovoljavaju $d(x_1, x_2) < \delta$.*

Teorema Arzela-Ascoli je fundamentalni rezultat o kompaktnosti u skupu $C(I)$ neprekidnih realnih funkcija na $I = [a,b]$.

Teorema 1 (Teorema Arzela-Ascoli) *(i) Skup $\mathcal{F} \subset C(I)$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren, uniformno ograničen i ekvineprekidan.*

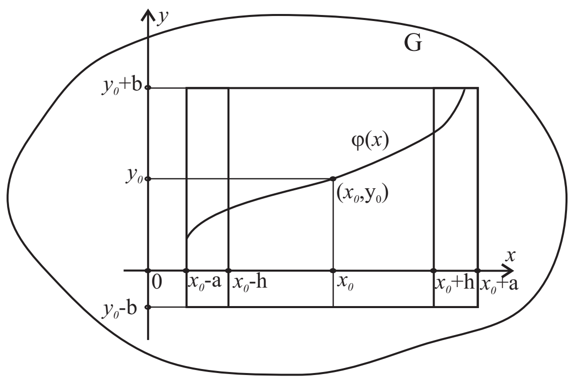
(ii) Podskup $\mathcal{F}$ metričkog prostora $C(I)$ je relativno kompaktan ako i samo ako je uniformno ograničen i ekvineprekidan.

(iii) Za svaki uniformno ograničen, ekvineprekidan niz funkcija $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definisanih na zatvorenom i ograničenom skupu $[a,b]$ postoji uniformno konvergentan podniz.

Neka je $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup. Uočimo proizvoljnu tačku (x_0, y_0) u oblasti $\mathbb{G}$. Pošto je $\mathbb{G}$ otvoren skup, za svaku tačku postoje realni brojevi $a > 0$ i $b > 0$ tako da pravougaonik

$$\Pi = \{(x, y) \ : \ |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}$$

pripada oblasti $\mathbb{G}$.



U nastavku razmatramo metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ sa Euklidovom metrikom

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2)$$

Teorema 2 (Peanova teorema) *Neka je funkcija $f = f(x, y)$ definisana i neprekidna na pravougaoniku Π. Tada postoji rešenje $y = \varphi(x)$ Košijevog problema (1) definisano na $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, gde je*

$$M = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Dokaz Peanove teoreme:

Neka je $\Pi_1 = \{(x, y) \ : \ |x - x_0| \leq h, \ |y - y_0| \leq b\} \subseteq \Pi$.

Jednostavnosti radi, dokazaćemo egzistenciju rešenja na $[x_0, x_0 + h]$. Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$ i definišimo $\gamma_m = \frac{h}{m}$. Segment $[x_0, x_0 + h]$ podelimo na $m + 1$ podsegmenata dužine γ_m, tačkama $x_k = x_0 + k\gamma_m$, za $1 \leq k \leq m$.

Prvi korak: Po Lemi o ekvivalenciji dovoljno je dokazati egzistenciju neprekidnog rešenja integralne jednačine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

na segmentu $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Drugi korak - *Konstrukcija niza funkcija* $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *na* $[x_0, x_0+h]$. Za svako $m \in \mathbb{N}$ definišimo funkciju φ_m rekurzivno po k, $1 \le k \le m-1$:

$$\varphi_m(x) = y_0, \qquad \text{za} \quad x_0 \le x \le x_0 + \gamma_m = x_1,$$
$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\gamma_m} f(s, \varphi_m(s))ds \qquad \text{za} \quad x_k \le x \le x_{k+1},\ 1 \le k \le m-1\,.$$

Prva jednakost definiše funkciju φ_m na $[x_0, x_0+\gamma_m]$, nakon čega druga jednakost najpre definiše vrednost funkcije $\varphi_m(x)$ na $[x_0+\gamma_m, x_0+2\gamma_m]$, pa zatim na $[x_0+2\gamma_m, x_0+3\gamma_m]$ itd. do $[x_0+(m-1)\gamma_m, x_0+h]$.

Primetimo da ako je $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $1 \le k \le m-1$, onda je $\varphi_m(s)$ već definisano za

$$x_0 \le s \le x - \gamma_m \le x_{k+1} - \gamma_m = x_k\,. \tag{4}$$

Pokažimo da za svako $m \in \mathbb{N}$:

(a) $\varphi_m \in C[x_0, x_0+h]$;

(b) grafik funkcije φ_m je u pravougaoniku Π_1 tj. za svako $x \in [x_0, x_0+h]$ je $|\varphi_m(x) - y_0| \le b$;

Za $x \in [x_0, x_1]$ je $\varphi_m(x) = y_0$, pa svojstva (a) i (b), očigledno važe. Dokažimo da važe svojstva (a) i (b) rekurzivno po k.

Za $x \in [x_k, x_{k+1}]$, prema (4) je $\varphi_m(s)$ je već definisano i neprekidno preslikavanje na $[x_0, x-\gamma_m]$, pa je $f(s, \varphi_m(s))$ neprekidna kao funkcija od s, odakle sledi da je funkcija

$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x-\gamma_m} f(s, \varphi_m(s))ds$$

diferencijabilna na $[x_k, x_{k+1}]$. Prema tome, za $x \in [x_0, x_2]$, kako je $\varphi_m \in C[x_0, x_1]$, $\varphi_m \in C[x_1, x_2]$ i

$$y_0 = \varphi_m(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1-\gamma_m} f(s, \varphi_m(s))ds = y_0,$$

zaključujemo najpre da je $\varphi_m \in C[x_0, x_2]$. Zatim rekurzivno po k zaljučujemo da je $\varphi_m \in C[x_0, x_0+h]$.

Pretpostavimo da je

$$|\varphi_m(x) - y_0| \le b \quad \text{za svako} \ \ x \in [x_1, x_k], \ \ 2 \le k < m\,. \tag{5}$$

Tada za $x \in [x_k, x_{k+1}]$, imamo prema (4) i (5) da je $|\varphi_m(s) - y_0| \leq b$ za $s \in [x_0, x - \gamma_m]$, pa je $(s, \varphi_m(s)) \in \Pi_1$. Dakle, za $x \in [x_k, x_{k+1}]$ imamo da je

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x-\gamma_m} |f(s, \varphi_m(s))| ds \leq \int_{x_0}^{x_k} |f(s, \varphi_m(s))| ds \\ &\leq M(x_k - x_0) = M k \gamma_m \leq Mh \leq b\,, \end{aligned}$$

odakle sledi da (b) važi za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Treći korak - *Niz funkcija $\{\varphi_m\}$ je uniformno ograničen:* Za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$ i za svako $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x)| &\leq |y_0| + \int_{x_0}^{x_0+h-\gamma_m} |f(s, \varphi_m(s))|\, ds \leq |y_0| + M(h - \gamma_m) \\ &\leq |y_0| + Mh \leq |y_0| + b, \end{aligned}$$

Četvrti korak - *Niz funkcija $\{\varphi_m\}$ je ekvineprekidan:* Pokažimo da je

$$\Big|\varphi_m(u) - \varphi_m(v)\Big| \leq M|v - u|, \qquad \text{za svako} \;\; u, v \in [x_0, x_0 + h]\,.$$

Za svako $u, v \in [x_0, x_0 + h]$ i za svako $m \in \mathbb{N}$ imamo

(i) za $u, v \in [x_0, x_0 + \gamma_m]$:

$$\Big|\varphi_m(u) - \varphi_m(v)\Big| = 0$$

(ii) za $u \in [x_0, x_0 + \gamma_m]$ i $v \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$\Big|\varphi_m(u) - \varphi_m(v)\Big| \leq \int_{x_0}^{v-\gamma_m} |f(s, \varphi_m(s))|\, ds \leq M|v - \gamma_m - x_0| \leq M|v - u|$$

(iii) za $u \in [x_j, x_{j+1}]$, $v \in [x_k, x_{k+1}]$, $j \leq k$:

$$\Big|\varphi_m(u) - \varphi_m(v)\Big| \leq \int_{u-\gamma_m}^{v-\gamma_m} |f(s, \varphi_m(s))|\, ds \leq M|v - u|$$

Peti korak - *Primena teorema Arzela-Ascoli:* Niz $\{\varphi_m\}$ sadrži podniz $\{\varphi_{m_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ koji ravnomerno konvergira na $[x_0, x_0 + h]$ ka neprekidnoj funkciji φ. Pokažimo da tada važi i

$$f(x, \varphi_{m_i}(x)) \rightrightarrows f(x, \varphi(x)), \quad i \to \infty \qquad \text{na} \;\; [x_0, x_0 + h]\,. \tag{6}$$

(i) funkcija f je neprekidna na kompaktu Π_1, pa je i ravnomerno neprekidna. Zato, za $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da za svako $(x, y), (s, z) \in \Pi_1$ za koje je $d((s, z), (x, y)) < \delta$ važi

$$|f(x, y) - f(s, z)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

(ii) kako je niz $\{\varphi_{m_i}\}$ ravnomerno konvergentan ka φ, postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $|\varphi_{m_i}(x) - \varphi(x)| < \delta/2$ za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$ i svako $i \geq N_1$.

(iii) φ je neprekidna na kompaktu $[x_0, x_0 + h]$, pa i ravnomerno neprekidna na njemu. Zato, postoji $\delta_1 > 0$ tako da je $|\varphi(x) - \varphi(s)| < \delta/2$, za svako $x, s \in [x_0, x_0 + h]$ takve da je $|x - s| < \delta_1$;

(iv) postoji $N_2 \in \mathbb{N}$ tako da je $\gamma_{m_i} < \delta_1$ za svako $i \geq N_2$.

Neka je sada $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, $x \in [x_0, x_0 + h]$ i $i \geq N_0$. Onda je,

$$\begin{aligned} &\big|f(x, \varphi_{m_i}(x)) - f(x, \varphi(x))\big| \\ < &\Big|f(x, \varphi_{m_i}(x)) - f(x, \varphi(x + \gamma_{m_i}))\Big| + \Big|f(x, \varphi(x + \gamma_{m_i})) - f(x, \varphi(x))\Big|, \end{aligned}$$

Kako je $i > N_2$, imamo da je $\gamma_{m_i} < \delta_1$, i kako je $i \geq N_1$ biće prema (iii) i (ii)

$$\begin{aligned} d\Big((x, \varphi(x + \gamma_{m_i})), (x, \varphi_{m_i}(x))\Big) &= \big|\varphi(x + \gamma_{m_i}) - \varphi_{m_i}(x)\big| \\ &< \big|\varphi(x + \gamma_{m_i}) - \varphi(x)\big| + \big|\varphi(x) - \varphi_{m_i}(x)\big| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta\,. \end{aligned}$$

i

$$d\Big((x, \varphi(x + \gamma_{m_i}), x), (x, \varphi(x))\Big) = \big|\varphi(x + \gamma_{m_i}) - \varphi(x)\big| < \frac{\delta}{2} < \delta\,.$$

Zato je prema (i)

$$\Big|f(x, \varphi_{m_i}(x)) - f(x, \varphi(x + \gamma_{m_i}))\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad \Big|f(x, \varphi(x + \gamma_{m_i})) - f(x, \varphi(x))\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

odnosno

$$\big|f(x, \varphi_{m_i}(x)) - f(x, \varphi(x))\big| < \varepsilon$$

za svako $x \in [x_0, x_0 + h]$ i svako $i \geq N_0$. Dakle, važi (6), pa je

$$\lim_{i\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{m_i}(s))\, ds = \int_{x_0}^{x} \lim_{i\to\infty} f(s, \varphi_{m_i}(s))\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds. \tag{7}$$

Šesti korak - *Funkcija* φ *je rešenje* KP (1) *na segmentu* $[x_0, x_0+h]$: Imamo da je

$$\varphi_{m_i}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{m_i}(s))\, ds - \int_{x-\gamma_{m_i}}^{x} f(s, \varphi_{m_i}(s))\, ds. \tag{8}$$

Kako je
$$\left|\int_{x-\gamma_{m_i}}^{x} f(s,\varphi_{m_i}(s))\,ds\right| \le M\,\frac{h}{m_i} \to 0, \quad i\to\infty\,,$$
biće

$$\lim_{i\to\infty}\int_{x-\gamma_{m_i}}^{x} f(s,\varphi_{m_i}(s))\,ds = 0\,. \tag{9}$$

Dakle, prelaskom na graničnu vrednost kada $i\to\infty$, iz (8), koristeći (7) i (9), zaključujemo da je φ neprekidno rešenje integralne jednačine (3) na segmentu $[x_0, x_0+h]$, pa je prema Lemi 1 rešenje Košijevog problema (1) na tome segmentu. □

Pikarova teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja

⋆ funkcija $f: G\to\mathbb{R}$, $G\subset\mathbb{R}^2$, zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom $L>0$ po promenljivoj y u oblasti G, ako za bilo koje tačke $(x,y_1),(x,y_2)\in G$ važi
$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le L\,|y_2-y_1|.$$

⋆ ako su funkcije $f, f'_y\in C(G)$, tada funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom L po promenljivoj y na svakom konveksnom kompaktu $K\subset G$, pri čemu je $L=\sup_{K}|f'_y(x,y)|$.

⋆ Pokazaćemo da su neprekidnost funkcije f u oblasti $\mathbb{G}$ i pretpostavka da funkcija f zadovoljavaju Lipšicov uslov po promenljivoj y na svakom kompaktu sadržanom u $\mathbb{G}$ DOVOLJNI USLOVI EGZISTENCIJE I JEDINSTVENOSTI REŠENJA DJ $y'=f(x,y)$ u oblasti $\mathbb{G}$.

Primer 1. Opšte rešenje DJ $y'=2\sqrt{y}$ je familija funkcija $y=(x-c)^2$, $x\ge c$, pa integralne krive čine delovi parabola desno od tačaka $(c,0)$.

$y=0$ je **singularno rešenje** (rešenje koje nije sadržano u opštem rešenju ni za koju vrednost konstante c)

prava $y=0$ je **singularna integralna kriva**, jer kroz proizvoljnu tačku $(x_0,0)$ ove prave prolaze dve integralne krive:
$$y=0 \quad \text{i} \quad y=(x-x_0)^2,\ \ x\ge x_0$$
sa zajedničkom tangentom u toj tački.

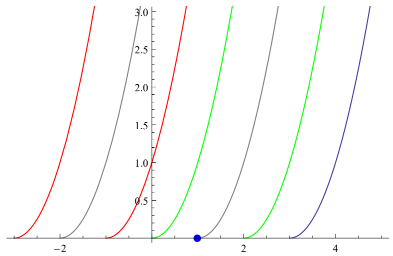


Figure 1: Integralne krive DJ $y' = 2\sqrt{y}$

Funkcija

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0, \\ (x-x_0)^2, & x > x_0, \end{cases}$$

je takođe rešenje jednačine koje prolazi kroz tačku $(x_0, 0)$, a koje nije ni partikularno, ni singularno.

Rešenje Košijevog problema $y' = 2\sqrt{y}$, $y(x_0) = 0$ nije jedinstveno, odnosno u svim tačkama x-ose narušena je jedinstvenost rešenja !!!

Primetimo da $f'_y(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \to \infty$, $y \to 0$, odnosno $f'_y(x,y)$ nije neprekidna funkcija za $y = 0$.

Primer 2. Opšte rešenje DJ $y' = 1/y^2$ je $y = \sqrt[3]{3x+c}$. Oblast definisanosti DJ je $\mathbb{R}^2$. Funkcija $f(x,y) = 1/y^2$ je neprekidna i zadovoljava Lipšicov uslov na svakom kompaktu K koji ne sadrži tačke x-ose, jer za svako $(x,y_1),(x,y_2) \in K$ sledi

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} \right| \le \frac{|y_1+y_2|}{y_1^2 y_2^2} |y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|,$$

gde je

$$L = \max_K \frac{|y_1+y_2|}{y_1^2 y_2^2}.$$

Ovo ne važi ako kompakt K sadrži tačke x-ose, jer za $y_1 = ky_2$, $k = \text{const} > 0$, sledi $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \to \infty$ kad $y_2 \to 0$, pa Lipšicov uslov nije ispunjen.

Kroz proizvoljnu tačku $(x_0, 0)$ na x-osi prolazi samo jedna integralna kriva

$$y = \sqrt[3]{3(x-x_0)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa je $\mathbb{R}^2$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja ove jednačine, odnosno u tačkama x-ose NIJE narušena jedinstvenost rešenja iako funkcija $f(x,y)$ ne zadovoljava Lipšicov uslov na kompaktu K koji sadrži tačke x-ose !!! Primetimo, naravno da $y = 0$ uopšte nije rešenje date DJ.

Sledeća teorema predstavlja osnovnu teoremu u teoriji diferencijalnih jednačina, jer daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema (1) u nekoj okolini tačke x_0. U literaturi je poznata kao PIKAROVA TEOREMA ili KOŠI–LIPŠIC–PIKAROVA TEOREMA. Uobičajeni postupci dokazivanja Pikarove teoreme su *metodom sukcesivnih aproksimacija ili primenom Banahove teoreme o nepokretnoj tački.*

Teorema 3 (Pikarova teorema) *Neka je funkcija $f = f(x, y)$ definisana i neprekidna na pravougaoniku Π i neka zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj y na Π. Neka je*

$$M = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Tada Košijev problem (1) ima na $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ **jedinstveno** *rešenje $y = \varphi(x)$.*

$\boxed{\text{A}}$ DOKAZ EGZISTENCIJE REŠENJA KP: Neka je

$$\Pi_1 = \{(x, y) \ : \ |x - x_0| \le h, \ |y - y_0| \le b\} \subseteq \Pi.$$

Prvi korak: Po Lemi o ekvivalenciji dovoljno je dokazati egzistenciju neprekidnog rešenja integralne jednačine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

na segmentu $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Drugi korak – *Konstrukcija niza sukcesivnih aproksimacija:* Za početnu aproksimaciju se uzima proizvoljna funkcija $\varphi_0 \in C(I)$ tako da je $\varphi_0(x_0) = y_0$ i $(x, \varphi_0(x)) \in \Pi_1$ za svako $x \in I$. Ne narušavajući opštost, stavićemo $\varphi_0(x) \equiv y_0$ i definisati na segmentu I niz sukcesivnih aproksimacija

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt, \quad n \in N. \end{cases}$$

Funkcije φ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, imaju sledeće osobine:

(*i*) $\varphi_n \in C(I)$;

(*ii*) $\varphi_n(x_0) = y_0$;

(*iii*) grafik bilo koje funkcije φ_n je u pravougaoniku Π_1;

Osobina (i) se jednostavno dokazuje matematičkom indukcijom. Dokažimo osobinu (iii). Iz činjenice da je $\{(x, y_0) : x \in I\} \subset \Pi_1$, sledi $|f(x, y_0)| \leq M$, pa je za $x \in I$,

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \right| \\ &\leq M\, |x - x_0| \leq M\, h \leq M\, \frac{b}{M} = b. \end{aligned}$$

Dakle, grafik funkcije $y = \varphi_1(x)$, $x \in I$ je u Π_1. Pretpostavimo da je grafik funkcije $y = \varphi_n(x)$, $x \in I$ u Π_1, tj. $\{(x, \varphi_n(x)), x \in I\} \subset \Pi_1$, i dokažimo da to važi i za funkciju $y = \varphi_{n+1}(x), x \in I$. Kako je $\max_{\Pi_1} |f(x, \varphi_n(x)| \leq M$, po prethodnom postupku je

$$|\varphi_{n+1}(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_n(t))|\, dt \right| \leq M\, |x - x_0| \leq b,$$

pa su, dakle, u Π_1 grafici svih sukcesivnih aproksomacija.

Treći korak – *Dokaz ravnomerne i apsolutne konvergencije niza sukcesivnih aproksimacija na segmentu* I : Dokazaćemo da niz funkcija $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ravnomerno i apsolutno konvergira na segmentu I ka funkciji $y = \varphi(x)$, $x \in I$, koja je neprekidno rešenje integralne jednačine (2).

Za niz parcijalnih suma $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionalnog reda

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \tag{11}$$

važi

$$S_n(x) = \varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + \cdots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] = \varphi_n(x)\,,$$

pa se taj niz poklapa sa nizom funkcija $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dakle, za dokaz ravnomerne konvergencije funkcionalnog niza $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na segmentu I, dovoljno je dokazati ravnomernu konvergenciju funkcionalnog reda (11) na istom segmentu. Zbog toga ćemo proceniti opšti član ovog reda, imajući u vidu činjenicu da funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov po drugom argumentu na kompaktu Π_1. Otuda je

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = |\varphi_1(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \right| \leq M|x - x_0|,$$

$$
\begin{aligned}
|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t))-f(t,y_0)|\,dt\right| \\
&\le L\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t)-y_0|\,dt\right| \le LM\left|\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt\right| \\
&\le LM\frac{|x-x_0|^2}{2!} \\
|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_2(t))-f(t,\varphi_1(t))|\,dt\right| \\
&\le L\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\,dt\right| \le L^2M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(t-x_0)^2}{2}\,dt\right| \\
&\le L^2M\frac{|x-x_0|^3}{3!}, \quad x\in I.
\end{aligned}
$$

Polazeći od induktivne pretpostavke

$$
|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}\,\frac{|x-x_0|^n}{n!}, \quad x\in I, \tag{12}
$$

jednostavno sledi

$$
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \le ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\ x\in I,
$$

tako da nejednakost (12) važi za svako $n\in\mathbb{N}$, odakle je

$$
|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}\,\frac{h^n}{n!},\ \ x\in I.
$$

Dakle, opšti član funkcionalnog reda (11) može majorirati opštim članom brojnog konvergentnog reda, pa primenom Vajerštrasovog kriterijuma zaključujemo da funkcionalni red (11) apsolutno i ravnomerno konvergira na segmentu I.

Četvrti korak – *Dokaz da granična funkcija niza sukcesivnih aproksimacija predstavlja neprekidno rešenje integralne jednačine* (2)*:*

Označimo sa φ graničnu funkciju niza sukcesivnih aproksimacija, tj. funkciju definisanu sa

$$
\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x), \quad x\in I. \tag{13}
$$

Jasno, $\varphi(x_0)=y_0$. Šta više, zbog ravnomerne konvergencije funkcionalnog reda (11), odnosno niza sukcesivnih aproksimacija $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, funkcija φ je neprekidna na segmentu I i njen grafik je u pravougaoniku Π_1 (za svako fiksirano $\widetilde{x} \in I$, svi članovi brojnog konvergentnog niza $\{\varphi_n(\widetilde{x})\}_{n\in\mathbb{N}}$ su iz kompakta $[y_0 - b, y_0 + b]$, tako da granična vrednost $\varphi(\widetilde{x})$ ne može biti van ovog kompakta). Pored toga, kako je

$$|f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x))| \leq L|\varphi_n(x) - \varphi(x)|, \quad x \in I,$$

imamo da

$$f(x, \varphi_n(x)) \rightrightarrows f(x, \varphi(x)), \quad n \to \infty \qquad \text{na } [x_0, x_0 + h]\,.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\, dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, \varphi_n(t))\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Prema tome, kada $n \to \infty$ u (10) dobija se

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt, \quad x \in I, \tag{14}$$

odakle zaključujemo da je funkcija $y = \varphi(x), x \in I$ neprekidno rešenje integralne jednačine (2) koja odgovara Košijevom problemu (1). Po Lemi 1 ona je rešenje Košijevog problema (1) na segmentu I.

$\boxed{\text{B}}$ Dokaz jedinstvenosti rešenja KP: Pretpostavimo suprotno, da pored rešenja $y = \varphi(x)$, $x \in I$ postoji i neko drugo rešenje $y = \xi(x)$, $x \in I$, istog Košijevog problema. Prema Lemi 1, $\xi(x)$ je rešenje odgovarajuće integralne jednačine

$$\xi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \xi(t))\, dt, \quad x \in I,$$

odakle je

$$\begin{aligned}
|\varphi_0(x) - \xi(x)| &= |\xi(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t))|\, dt\right| \\
&\leq M \cdot |x - x_0|\,, \quad x \in I\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x) - \xi(x)| &\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_0(t)) - f(t, \xi(t))|\, dt\right| \\
&\leq L \left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_0(t) - \xi(t)|\, dt\right| \leq L\, M \left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt\right| \\
&= M\, L\, \frac{|x - x_0|^2}{2}, \quad x \in I\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\varphi_2(x) - \xi(x)| &\le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \xi(t))| \, dt \right| \\
&\le L \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \xi(t)| \, dt \right| \le M\, L^2 \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^2}{2} \, dt \right| \\
&= M\, L^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!}, \quad x \in I\, .
\end{aligned}
$$

Matematičkom indukcijom se dokazuje

$$
|\varphi_n(x) - \xi(x)| \le M\, L^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad x \in I,\, n \in \mathbb{N},
$$

odakle je

$$
|\varphi_n(x) - \xi(x)| \le M\, L^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad x \in I,\, n \in \mathbb{N}\, . \tag{15}
$$

Kako

$$
\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty\, ,
$$

iz (15) sledi da niz funkcija $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ravnomerno konvergira ka funkciji ξ na segmentu I. Kako ovaj niz ravnomerno konvergira ka funkciji φ na istom segmentu, zbog jedinstvenosti graničnih vrednosti mora biti $\varphi(x) = \xi(x)$ za svako $x \in I$. $\square$

Posledica 1 *Neka je $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^2$ otvoren. Ako su funkcije $f, f'_y \in C(\mathbb{G})$, tada je $\mathbb{G}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja DJ $y' = f(x, y)$.*

Dokaz. Neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$. Tada postoje $a > 0, b > 0$ tako da

$$
\Pi = \{(x, y) \ : \ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\} \subseteq \mathbb{G}.
$$

Ako su funkcije $f, f'_y \in C(\mathbb{G})$, za svake dve tačke $(x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$ postoji $\theta \in (0, 1)$ tako da

$$
f(x, y_1) - f(x, y_2) = {f_y}'\Big(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2)\Big)(y_1 - y_2)\, .
$$

$$
\Longrightarrow \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|
$$

Dakle, funkcija $f(x, y)$ zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom L po promenljivoj y na Π, pri čemu je $L = \max_{(x,y)\in\Pi} |f'_y(x, y)|$. Prema Pikarovoj TEJR postoji jedinstveno rešenje KP (1) definisano u okolini tačke x_0. $\square$

Približno rešavanje Košijevog problema DJ: Pikarov metod sukcesivnih aproksimacija je jedan od metoda za približno rešavanje Košijevog problema DJ. Naime, n-ti član niza može se uzeti za približno rešenje Košijevog problema (1), tj.

$$\varphi(x) \approx \varphi_n(x) \qquad x \in I\,.$$

Veoma često, već za male vrednosti n, zbog komplikovane integracije niz sukcesivnih aproksimacija se ne može efektivno odrediti, što ukazuje na ograničenu primenu Pikarove metode u efektivnom nalaženju približnog rešenja.

Iz (15) se može odrediti grešku aproksimacije rešenja $\varphi(x)$ sa $\varphi_n(x)$ na segmentu $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. Stavljajući $\varphi(x)$ umesto $\xi(x)$ u (15), dobija se ocena

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq M\, L^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x \in I\,.$$

Ocena greške po ovoj formuli u mnogim slučajevima može biti komplikovana. Jedan praktični metod za prekidanje izračunavanja je

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \varepsilon\,, \quad x \in I$$

gde je ε unapred zadata tačnost.