5. Globalna jedinstvenost rešenja DJ u normalnom obliku

U dokazu Pikarove teoreme pokazali smo jedinstvenost rešenja u okolini tačke x_0, odnosno tkz. LOKALNU JEDINSTVENOST REŠENJA. Pri uslovima Pikarove teoreme Košijev problem

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

ima i svojstvo GLOBALNE JEDINSTVENOSTI.

Definicija 1 *Košijev problem ima svojstvo* **globalne jedinstvenosti** *u* $\mathbb{G}$*, ako za svako* $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ *i svaka dva rešenje* $y_1(x)$*,* $y_2(x)$ KP (1) *definisana na intervalima* I_1*,* I_2 *koji sadrže tačku* x_0 *važi*

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \text{za svako} \quad x \in I = I_1 \cap I_2\,. \tag{2}$$

Teorema 1 (Teorema o globalnoj jedinstvenosti rešenja) *Neka je funkcija* $f(x, y)$ *definisana i neprekidna u oblasti* $\mathbb{G}$ *i neka zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj* y *na svakom kompaktu sadržanom u* $\mathbb{G}$*. Za svaka dva proizvoljna rešenja* $\varphi(x)$*,* $\psi(x)$ KP (1) *definisana na intervalima* I_1*,* I_2 *koji sadrže tačku* x_0 *važi*

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{za svako} \quad x \in I = I_1 \cap I_2\,.$$

DOKAZ: Pretpostavimo suprotno, da postoji tačka $x_1 \in I = I_1 \cap I_2$ tako da je $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$. Određenosti radi, neka je $x_1 > x_0$. Označimo sa Ω skup svih tačaka intervala I, levo od x_1, u kojima $\varphi(x) = \psi(x)$, tj.

$$\Omega = \{x \,:\; \varphi(x) = \psi(x),\; x \in I\}.$$

Ovaj skup je neprazan, jer mu prema Pikarovoj teoremi pripadaju sve tačke segmenta $[x_0 - h, x_0 + h]$. Dokažimo da je Ω zatvoren skup.

Neka je $\tilde{x}$ tačka nagomilavanja skupa Ω, tj. neka postoji niz (x_n) iz Ω, tako da $x_n \to \tilde{x}$ kad $n \to \infty$. Tada je $\varphi(x_n) = \psi(x_n)$ za svako $n \in N$, a zbog neprekidnosti funkcija φ i ψ je

$$\varphi(\tilde{x}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \psi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \psi(\tilde{x}),$$

pa je, prema tome, $\tilde{x} \in \Omega$.

Kako je skup Ω ograničen, na primer tačkom x_1, on ima supremum

$$x_2 = \sup \Omega, \quad x_2 \in \Omega$$

koji pripada skupu Ω kao tačka nagomilavanja zatvorenog skupa. Otuda je $\varphi(x_2) = \psi(x_2)$, pa je $x_2 \neq x_1$. Prema tome, mora biti $\varphi(x) \neq \psi(x)$ za svako $x \in (x_2, x_1)$, jer bi u suprotnom bilo $x \in \Omega$ i $x > \sup \Omega$.

Neka je $\varphi(x_2) = \psi(x_2) = y_2$. Prema Pikarovoj teoremi Košijev problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_2) = y_2 \tag{3}$$

ima jedinstveno rešenje u nekoj h_1-okolini tačke x_2. Kako su φ, ψ rešenja KP (3), $\varphi(x) = \psi(x)$ za svako $x \in [x_2 - h_1, x_2 + h_1]$. Kako je $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$, $x_1 \notin [x_2 - h_1, x_2 + h_1]$, tj. $x_2 + h_1 < x_1$. To je medjutim suprotno pretpostavci da je $\varphi(x) \neq \psi(x)$ za svako $x \in (x_2, x_1)$.

Prema tome, ne može postojati tačka $x_1 \in I$ u kojoj je $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$, pa je $\varphi(x) = \psi(x)$ za svako $x \in I$. ⊠