6. Neprodučivost rešenja

Nedostatak Pikarove teoreme je njen lokalni karakter, zato što uvrđuje dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost Košijevog rešenja problema

$$(1) \qquad y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

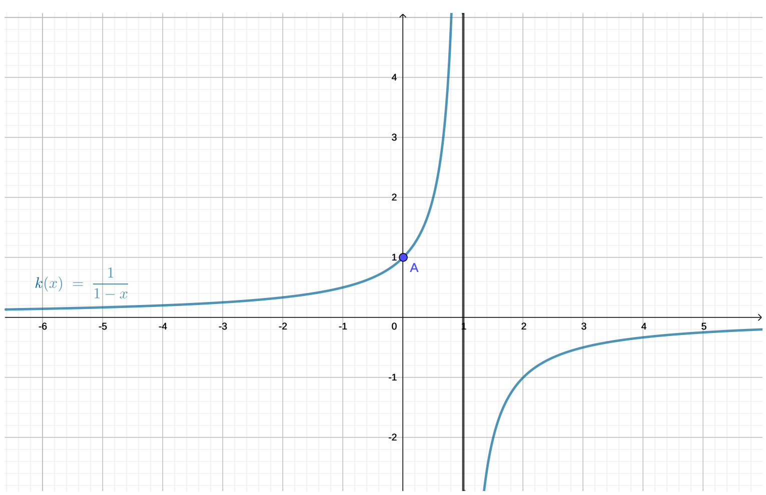
samo u nekoj okolini početne tačke x_0. Prirodno se nameće pitanje dokle se može proširiti interval definisanosti ovog rešenja. Pokazaćemo da ako $f \in C^1(\mathbb{E})$, $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$, KP (1) ima jedinstveno rešenje $y(x)$ definisano na maksimalnom intervalu egzistencije (α, β), pri čemu je ili $\beta = +\infty$ ili ako je $\beta < +\infty$, $\lim_{x \to \beta^-} y(x) = \infty$ ili postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{x \to \beta^-} y(x) = y_\beta$$

ali je $(\beta, y_\beta) \in \partial\mathbb{E}$. Odnosno, ili je $\alpha = -\infty$ ili je $\alpha > -\infty$ i $\lim_{x \to \alpha^+} y(x) = \infty$ ili postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{x \to \alpha^+} y(x) = y_\alpha$$

ali je $(\alpha, y_\alpha) \in \partial\mathbb{E}$.



Slika 1: Rešenja Košijevog problema(2)

Naredni primer pokazuje da se rešenje ne može produžiti izvan intervala (α, β) ako je $\beta < +\infty$ i

$$\lim_{x \to \beta^-} y(x) = \infty\,.$$

Primer 1. Posmatrajmo KP

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1\,. \tag{2}$$

Oblast definisanosti ove DJ je $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ i $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Prema TEJR postoji jedinstveno rešenje KP (2) definisano u okolini početne tačke $x_0 = 0$. Rešenje KP (2) je

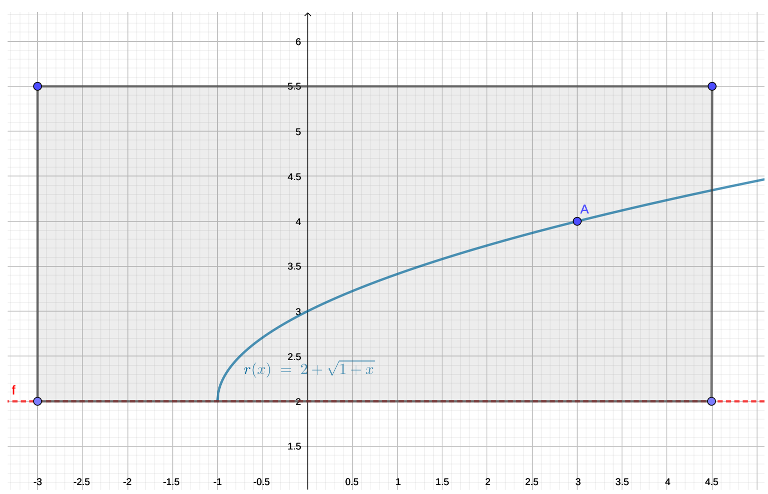
$$k(x) = \frac{1}{1-x}$$

i definisano je na maksimalnom intervalu egzistencije $(\alpha, \beta) = (-\infty, 1)$. Rešenje KP se dakle može produžiti neograničeno nalevo, ali je ovo rešenje neproduživo nadesno izvan intervala $(-\infty, 1)$ (videti Sliku 1). Takodje, $\lim_{x\to 1^-} k(x) = \infty$.

Naredni primer pokazuje da je (α, β) maksimalni interval egzistencije rešenja, ako je $\beta < +\infty$ i postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{x\to\beta^-} y(x) = y_\beta,$$

ali je $(\beta, y_\beta) \in \partial\mathbb{E}$.



Slika 2: Rešenja Košijevog problema (3)

Primer 2. Posmatrajmo KP

$$y' = \frac{1}{2(y-2)}, \quad y(3) = 4\,. \tag{3}$$

Funkcija $f(x,y) = (2(y-2))^{-1}$ je neprekidno-diferencijabilna na $\mathbb{E} = \mathbb{R}\times(2,\infty)$, pa prema TEJR kroz tačku $(3,4) \in \mathbb{E}$ prolazi jedinstveno rešenje Košijevog problema (3) definisano u nekoj okolini tačke $x_0 = 3$. Rešenje KP je

$$r(x) = 2 + \sqrt{1+x}$$

definisano na maksimalnom intervalu egzistencije $(\alpha, \beta) = (-1, +\infty)$. Dakle, rešenja Košijevog problema može se produžiti neograničeno nadesno, ali je ovo rešenje neproduživo nalevo izvan intervala $(-1, \infty)$ (videti Sliku 2). Primetimo da je rub oblasti $\mathbb{E}$ prava $y = 2$ i da je $\lim_{x \to -1^+} r(x) = r_\alpha = 2$ pri čemu tačka $(\alpha, r_\alpha) = (-1, 2)$ pripada pravoj $y = 2$, odnosno $(\alpha, r_\alpha) = (-1, 2) \in \partial E$.

Primer 3. Posmatrajmo, Košijev problem

$$y' = xy\,, \quad y(0) = 1\,. \tag{4}$$

Kako je funkcija $f(x, y) = xy$ neprekidna na $\mathbb{R}^2$ i zadovoljava Lipšicov uslov po y na svakom kompaktu

$$\Pi = \{(x, y)\ |x| \leq a,\ |y - 1| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$$

prema Pikarovoj Teoremi $\mathbb{G} = \mathbb{R}^2$. Prema Pikarovoj TEJR postoji jedinstveno rešenje KP (4) definisano na $[-h, h]$, gde je

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{a(b+1)}\right\}, \quad M = \max_{\Pi} f(x, y) = a(b+1)\,.$$

S druge strane $\varphi(x) = e^{x^2/2}$ je rešenje datog KP koje je definisano za svako $x \in \mathbb{R}$. Dakle, Pikarova TEJR garantuje jedinstvenost rešenja KP u okolini tačke $x_0 = 0$, dok rešenje tog KP postoji na mnogo većem intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Uvođenjem pojma neproduživog rešenja pokazaćemo da se oblast definisanosti Košijevog rešenja, čiju egzistenciju i jedinstvenost u okolini početne tačke garantuje Pikarova teorema, može proširiti do maksimalnog otvorenog intervala na kome je rešenje definisano ili do ruba oblasti $\mathbb{G}$ egzistencije i jedinstvenosti rešenje Košijevog problema.

Definicija 1 *Rešenje $y = \varphi(x)$ KP (1), definisano na intervalu $(\alpha, \beta) \ni x_0$ se naziva* PRODUŽIVO REŠENJE *ako postoji rešenje $y = \xi(x)$ KP (1) definisano na intervalu $(\alpha_1, \beta_1) \ni x_0$, $\alpha_1 \leq \alpha < \beta \leq \beta_1$ tako da je*

$$\varphi(x) = \xi(x) \text{ za svako } x \in (\alpha, \beta).$$

Rešenje ξ naziva se PRODUŽENJE REŠENJA *φ.*

Definicija 2 *Rešenje KP (1) je* NEPRODUŽIVO *ako se bilo koje njegovo produženje poklapa sa njim. Oblast definisanosti neproduživog rešenja naziva se* MAKSIMALNI INTERVAL EGZISTENCIJE REŠENJA KOŠIJEVOG PROBLEMA.

U nastavku razmatramo metrički prostor $(\mathbb{R}^2, d)$ sa Euklidovom metrikom

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \quad x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2)$$

i neka je za $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ i $x \in \mathbb{R}^2$,

$$d(x,Y) = \inf\{d(x,y) \,:\, y \in Y\}\,.$$

Napomenimo da ako je Y zatvoren, preslikavanje $x \mapsto d(x,Y)$ je neprekidno.

Pojam neprodu\u017eivog re\u0161enja

Neproduživo rešenje se može okarakterisati sledećom teoremom:

Teorema 1 *Neka $(x_0,y_0) \in \mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ je oblast egzistencije rešenja KP (1) i neka je $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren. Rešenje $y = \varphi(x)$ KP (1) definisano na (α,β) je neproduživo nadesno (nalevo) ako i samo važi jedan od naredna tri uslova:*

(i) $\beta = +\infty \quad (\alpha = -\infty)$

(ii) $|\varphi(x)| \to \infty$ *kada* $x \to \beta - 0 \quad (x \to \alpha + 0)$

(iii) $d\big((x,\varphi(x)), \partial\mathbb{D}\big) \to 0$ *kada* $x \to \beta - 0 \quad (x \to \alpha + 0)$.

Dokaz: $(\Rightarrow:)$ Pretpostavimo da je rešenje $y = \varphi(x)$ KP (1) definisano na $(\alpha,\beta) \ni x_0$ neproduživo nadesno i da ne važi ni jedan od uslova (i), (ii) i (iii). Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz takav da $x_n \in (\alpha,\beta)$ i

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta < \infty\,. \tag{5}$$

Tada je $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen (jer smo pretpostavili da ne važi (ii)), pa ima konvergentan podniz $\{\varphi(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\varphi(\widetilde{x}_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Neka je

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(\widetilde{x}_k) = y_\beta\,. \tag{6}$$

Kako

$$(\widetilde{x}_k, \varphi(\widetilde{x}_k)) \to (\beta, y_\beta), \quad k \to \infty \quad \wedge \quad (\widetilde{x}_k, \varphi(\widetilde{x}_k)) \in \mathbb{D},\ k \in \mathbb{N},$$

sledi da

$$(\beta, y_\beta) \in \overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}\,.$$

Dokažimo da $(\beta, y_\beta) \in \mathbb{D}$. Označimo sa $\mathbb{D}^c = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{D}$. Pretpostavimo suprotno da $(\beta, y_\beta) \notin \mathbb{D}$, tj. $(\beta, y_\beta) \in \mathbb{D}^c \subset \overline{\mathbb{D}^c}$. Prema tome, $(\beta, y_\beta) \in \overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{D}^c} = \partial\mathbb{D}$. Dakle,

$$d\big((\widetilde{x}_k, \varphi(\widetilde{x}_k)), \partial\mathbb{D}\big) \to d\big((\beta, y_\beta), \partial\mathbb{D}\big) = 0\,, \quad k \to \infty$$

što je suprotno pretpostavci da (iii) ne važi. Dakle, $(\beta, y_\beta) \in \mathbb{D}$ i kako je $\mathbb{D}$ otvoren skup, postoji pravougaonik

$$\Pi = \{(x,y) \ : \ \beta - a \le x \le \beta,\ |y - y_\beta| \le b\} \subset \mathbb{D}\,.$$

Neka je

$$N = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|\,.$$

Za $b > 0$, kako važi (5) i (6), postoji $K > 0$ tako da za svako $k \ge K$ je

$$\beta - a < \widetilde{x}_k < \beta, \qquad \beta - \frac{b}{2N} < \widetilde{x}_k < \beta, \qquad |\varphi(\widetilde{x}_k) - y_\beta| < \frac{b}{2}\,.$$

Dokažimo da je

$$|\varphi(x) - y_\beta| < b \ \text{ za svako } x \in (\widetilde{x}_K, \beta)\,. \tag{7}$$

Pretpostavimo suprotno, da postoji $\eta \in (\widetilde{x}_K, \beta)$ tako da je $|\varphi(\eta) - y_\beta| = b$ i $|\varphi(x) - y_\beta| < b$ za svako $x \in (\widetilde{x}_K, \eta)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{b}{2} &= b - \frac{b}{2} < |\varphi(\eta) - y_\beta| - |\varphi(\widetilde{x}_K) - y_\beta| \\
&\le |\varphi(\eta) - \varphi(\widetilde{x}_K)| = \left|\int_{\widetilde{x}_K}^{\eta} \varphi'(s)ds\right| = \left|\int_{\widetilde{x}_K}^{\eta} f(s,\varphi(s))ds\right| \\
&\le N\,|\eta - \widetilde{x}_K| \le N\frac{b}{2N} = \frac{b}{2},
\end{aligned}$$

što je kontradikcija. Dakle,važi (7).

Tada, za svako $x, t \in [\widetilde{x}_K, \beta)$ je

$$|\varphi(x) - \varphi(t)| = \left|\int_t^x \varphi'(s)ds\right| = \left|\int_t^x f(s,\varphi(s))ds\right| \le N|x-t|\,.$$

Dakle, prema Košijevom kriterijumu postoji granična vrednost $\lim_{x\to\beta-}\varphi(x)$, odakle zaključujemo da je

$$\lim_{x\to\beta-}\varphi(x) = y_\beta\,.$$

Definišimo

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (\alpha, \beta) \\ y_\beta, & x = \beta \end{cases}$$

Tada je $\psi \in C^1(\alpha, \beta]$. Zaista, zbog neprekidnosti funkcije f je

$$\lim_{x\to\beta-0}\psi'(x) = \lim_{x\to\beta-0} f(x,\psi(x)) = \lim_{x\to\beta-0} f(x,\varphi(x)) = f(\beta, y_\beta) = f(\beta, \psi(\beta))\,.$$

Prema tome, $y = \psi(x)$ je rešenje KP (1) na $(\alpha, \beta]$, što je suprotno pretpostavci da je rešenje $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ neproduživo rešenje.

Košijev kriterijum za graničnu vrednost funkcije: *Neka je data funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$. *Granična vrednost* $\lim_{x \to c} f(x)$ *postoji ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da je* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ *za svako* $x, y \in X$ *tako da je* $|x - c| < \delta$ *i* $|y - c| < \delta$.

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da važi jedan od uslova (i), (ii) ili (iii). Ako se rešenje $y = \varphi(x)$ KP (1) definisano na (α, β) može produžiti na $(\alpha, \beta]$, onda produženje $y = \psi(x)$ mora biti neprekidna funkcija, a tačka $(\beta, \psi(\beta))$ mora pripadati oblasti $\mathbb{D}$. To medjutim nije moguće ako važi neki od uslova (i)–(iii). Zaista, da ne može važiti ni jedan od uslova (i) i (ii) je očigledno, pa onda mora važiti uslov (iii). Pored toga, kako $(\beta, \psi(\beta)) \in \mathbb{D} \subset \overline{\mathbb{D}}$, postoji niz $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$, tako da $(x_n, y_n) \to (\beta, \psi(\beta))$ kada $n \to \infty$, odakle

$$d\big((x_n, y_n), \partial\mathbb{D}\big) \to d\big((\beta, \psi(\beta)), \partial\mathbb{D}\big), \quad n \to \infty$$

Prema (iii) je $d\big((x_n, y_n), \partial\mathbb{D}\big) \to 0$, $n \to \infty$, odakle sledi $d\big((\beta, \psi(\beta)), \partial\mathbb{D}\big) = 0$, odnosno $(\beta, \psi(\beta)) \in \partial\mathbb{D} = \overline{\mathbb{D}} \cap \overline{\mathbb{D}^c}$. Dakle, $(\beta, \psi(\beta)) \in \overline{\mathbb{D}^c} = \mathbb{D}^c$, jer je $\mathbb{D}^c$ zatvoren skup. Na osnovu dobijene kontradikcije da $(\beta, \psi(\beta)) \notin \mathbb{D}$, zaključujemo da ako važi jedan od uslova (i), (ii) ili (iii), rešenje $y = \varphi(x)$ KP (1) definisano na (α, β) je neproduživo. $\boxtimes$

Primetimo da ako je oblast $\mathbb{D}$ ograničena, slučajevi (i) i (ii) otpadaju i svako neproduživo rešenje DJ zadovoljava uslov (iii).

(A) Može se pokazati da ako je funkcija f neprekidna u oblasti $[x_0, x_0 + a] \times \mathbb{Y}$, maksimalni interval egzistencije rešenja Košijevog problema je

(i) $J = [x_0, x_0 + a]$ ili
(ii) $J = [x_0, x_0 + \delta)$, $\delta < a$ i $|y(x)| \to \infty$, $x \to \delta$.

(B) Može se pokazati da ako je funkcija f neprekidna na zatvorenju $\bar{E}$ otvorenog skupa $E \subset \mathbb{R}^2$, maksimalni interval egzistencije rešenja Košijevog problema je

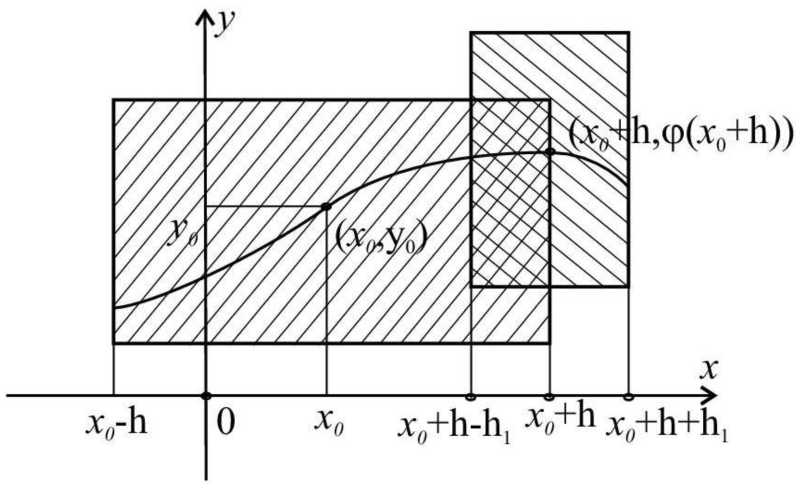
(i) $J = [x_0, \infty)$ ili
(ii) $J = [x_0, \delta]$, $\delta < \infty$, $(\delta, y(\delta)) \in \partial E$ ili
(iii) $J = [x_0, \delta)$, $\delta < \infty$ i $|y(x)| \to \infty$, $x \to \delta$.

Intuitivna ideja o produženju rešenja

Neka je $\mathbb{G}$ (oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja DJ $y' = f(x,y)$) otvoren skup. Za svaku tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ postoje realni brojevi $a > 0$ i $b > 0$ tako da pravougaonik

$$\Pi = \{(x,y) \ : \ x_0 \leq x \leq x_0 + a, \ |y - y_0| \leq b\}$$

pripada oblasti $\mathbb{G}$. Koši-Pikarovom teoremom su dokazane egzistencija i jedinstvenost rešenja $y = \varphi(x)$ Košijevog problema (1) na segmentu $[x_0, x_0 + h_0]$.



Uočimo tačku (x_1, y_1), gde je $x_1 = x_0 + h_0$, $y_1 = \varphi(x_0 + h_0)$ i ponovimo prethodni postupak, uzimajući (x_1, y_1) za početnu tačku. Postoji jedinstveno rešenje $y = \psi(x)$ Košijevog problema

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_1) = y_1 \tag{8}$$

definisano na nekom segmentu $[x_1, x_1 + h_1]$. Kako je $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ su rešenja KP (8), pa prema Teoremi globalne jedinstvenosti rešenja je $\varphi(x) = \psi(x)$ za svako $x \in [x_1 - h_1, x_1]$. Prema tome, kako je $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$, "lepljenjem" prethodna dva rešenja možemo formirati novo neprekidno rešenje $y = \varphi_1(x)$ KP (1), definisano na intervalu $[x_0 - h_0, x_1 + h_1]$, odnosno $[x_0 - h_0, x_0 + h_0 + h_1]$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [x_0 - h_0, x_0 + h_0] \\ \psi(x), & x \in [x_0 + h_0, x_0 + h_0 + h_1] \end{cases}$$

Nastavljajući postupak, možemo formirati novo rešenje $y = \varphi_2(x)$ definisano na intervalu $[x_0 - h_0, x_0 + h_0 + h_1 + h_2]$, itd. Ostaje otvoren problem dokle se može nastaviti ovakav postupak, odnosno dokle se može produžiti interval egzistencije jedinstvenog rešenja.

Egzistencija neproduživog rešenja

Sledeća teorema daje odgovor na postavljeno pitanje dokle možemo nastaviti opisani postupak produženja rešenja.

Teorema 2 (Egzistencija neproduživog rešenja) *Neka je $\mathbb{G}$ otvoren, funkcija $f \in C(\mathbb{G})$ zadovoljavaju Lipšicov uslov po promenljivoj y na svakom kompaktu sadržanom u $\mathbb{G}$. Za bilo koju tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ postoji neproduživo rešenje Košijevog problema (1).*

Dokaz: Označimo sa

$$\Pi_0 = \{(x, y) \ : \ x_0 \le x \le x_0 + r_0, \ |y - y_0| \le r_0\}$$

gde je r_0 jednako polovini najkraćeg rastojanja tačke (x_0, y_0) do ruba oblasti $\mathbb{G}$ ako $\mathbb{G} \ne \mathbb{R}^2$ ili $r_0 = 1$ ako $\mathbb{G} = \mathbb{R}^2$. Tada $\Pi_0 \subset \mathbb{G}$. Neka je

$$M_0 = \max_{(x,y)\in\Pi_0} |f(x, y)|, \qquad h_0 = \min\left\{r_0, \frac{r_0}{M_0}\right\}.$$

Prema Koši-Pikarovoj teoremi postoji jedinstveno rešenje $y = \varphi_0(x)$ Košijevog problema (1) definisano na segmentu $[x_0, x_0 + h_0]$. Uočimo tačku (x_1, y_1), gde je $x_1 = x_0 + h_0$, $y_1 = \varphi_0(x_1)$ i označimo sa

$$\Pi_1 = \{(x, y) \ : \ x_1 \le x \le x_1 + r_1, \ |y - y_1| \le r_1\},$$

i

$$M_1 = \max_{(x,y)\in\Pi_1} |f(x, y)|, \qquad h_1 = \min\left\{r_1, \frac{r_1}{M_1}\right\}$$

gde je r_1 odredjeno na isti način kao r_0. Postoji jedinstveno rešenje $y = \varphi_1(x)$ Košijevog problema

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_1) = y_1$$

definisano na nekom segmentu $[x_1, x_1 + h_1]$. Funkcija

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0, x_0 + h_0] \\ \varphi_1(x), & x \in [x_0 + h_0, x_0 + h_0 + h_1] \end{cases}$$

je rešenje Košijevog problema (1) definisano je na $[x_0, x_1 + h_1]$.

Nastavljajući postupak, dobijamo rešenje $y = \varphi(x)$ definisano na $[x_0, \beta)$, gde je $\beta = \lim_{n\to\infty} x_n \le +\infty$. Dokažimo da je konstruisano rešenje neproduživo nadesno. Prema Teoremi 1. to je očegledno ako je

(1) $\beta = +\infty$ ili

(2-a) $\beta < +\infty$, $\liminf_{x\to\beta-0} \varphi(x) < \limsup_{x\to\beta-0} \varphi(x)$, ili

(2-b) $\beta < +\infty$, $|\varphi(x)| \to +\infty$ kada $x \to \beta - 0$, jer ni u jednom od ovih slučajeva funkcija $y = \varphi(x)$ se ne može dodefinisati do neprekidnosti u tački $x = \beta$. Ostaje slučaj kada je

$$\beta < +\infty, \quad \lim_{x\to\beta-0} \varphi(x) = y_\beta \,.$$

U tom slučaju da bi pokazali da je rešenje $y = \varphi(x)$ neproduživo treba pokazati da tačka (β, y_β) ne može biti unutrašnja tačka skupa $\mathbb{G}$, tj. da mora biti $(\beta, y_\beta) \in \partial\mathbb{G}$, jer tada prema uslovu (iii) Teoreme 1. zaključujemo da je rešenje $y = \varphi(x)$ neproduživo.

Zaista, ako tačka $(\beta, y_\beta) \in \mathbb{G}$, možemo odrediti pozitivne konstate $r_\beta, M_\beta, h_\beta$ za tačku (β, y_β) na isti način kao i r_i, M_i, h_i za neku tačku (x_i, y_i). Tada, kako $x_n \to \beta$ i $\varphi(x_n) = y_n \to y_\beta$ kada $n \to \infty$, imamo

$$r_n = \frac{1}{2}\, d((x_n, y_n), \partial\mathbb{G}) \to \frac{1}{2}\, d((\beta, y_\beta), \partial\mathbb{G}) = r_\beta, \quad n \to \infty$$

što povlači da

$$M_n \to M_\beta \ \text{ i } \ h_n \to h_\beta \ \text{ kada } n \to \infty \,.$$

Onda $x_{n+1} = x_n + h_n \to \beta + h_\beta$, $n \to \infty$. Zbog jedinstvenosti granične vrednosti niza $\{x_n\}$ mora biti $\beta = \beta + h_\beta$, tj. $h_\beta = 0$, odakle je $r_\beta = 0$, što je suprotno pretpostavci $r_\beta > 0$. Dakle, $(\beta, y_\beta) \in \partial\mathbb{G}$, pa je rešenje $y = \varphi(x)$ prema Teoremi 1. neproduživo. $\boxtimes$.

Iz konstrukcije neproduživog rešenja $y = \varphi(x)$ Košijevog problema (1) sledi da je ono produženje svakog drugog rešenja $y = \psi(x)$ tog KP.

Teorema 3 (Jedinstvenost neproduživog rešenja) *Ako su $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ dva neproduživa rešenja Košijevog problema (1), tada su ona definisana na istom intervalu i poklapaju se na njemu.*

Dokaz: Neka je rešenje $y = \varphi(x)$ definisano na intervalu (α, β), a rešenje $y = \psi(x)$ definisano na intervalu (α_1, β_1). Iz neproduživosti rešenja φ, $y = \varphi(x)$ je produženje rešenja $y = \psi(x)$, pa mora biti

$$\alpha \le \alpha_1 < \beta_1 \le \beta \,, \qquad \varphi(x) = \psi(x),\ x \in (\alpha_1, \beta_1)\,. \tag{9}$$

S druge strane, iz neproduživosti rešenja ψ, $y = \psi(x)$ je produženje rešenja $y = \varphi(x)$, pa mora biti

$$\alpha_1 \le \alpha < \beta \le \beta_1 \,, \qquad \varphi(x) = \psi(x),\ x \in (\alpha, \beta)\,. \tag{10}$$

Dakle, iz (9) i (10) je $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ i $\varphi(x) = \psi(x)$, za svako $x \in (\alpha, \beta)$. $\boxtimes$