

## 7. Primena DJ prvog reda

**CRIME SCENE INVESTIGATION:** U hotelskoj sobi temperature 24° policija je u ponoć otkrila telo žrtve. Temperatura tela bila je 28°. Sat kasnije, temperatura tela bila je 26°. Kada se otprilike dogodio zločin?

$$\text{MATEMATIKA} + \text{FIZIKA} = \checkmark$$

**ŠIRENJE VIRUSA:** U gradu od 100.000 stanovnika 10. marta su registrovana prva 5 slučajeva zaraženih virusom SARS-CoV-2, dok je 30. marta 2020. godine registrovano 785 stanovnika zaraženih virusom SARS-CoV-2. Nakon 10 dana (9. aprila 2020.) registrovano je 2867 Covid-19 obolelih. Kada će 5000 stanovnika tog grada biti zaražena virusom SARS-CoV-2? Kada će 10000 stanovnika tog grada biti zaražena virusom SARS-CoV-2? Koliko stanovnika će biti zaraženo nakon 70 dana?

**BROJ STANOVNIKA:** U sledećoj tabeli dati su podaci o broju stanovnika u SAD (u milionima):

<i>Godina</i>	<i>Broj stanovnika</i>
1800	5.30
1820	9.64
1840	17.06
1860	31.44
1880	50.19
1900	76.21

Koliko će stanovnika SAD biti 1930?

$$\text{MATEMATIKA} + \text{BIOLOGIJA} = \checkmark$$

**STAROST ARHEOLOŠKIH PRONALAZAKA :** Da li ste se zapitali kako se procenjuje starost jedne stene, fosila ili predmeta? Da li vas je iznenadilo neverovatno precizno navođenje starosti nečega što potiče iz davnih perioda mladosti naše planete?

*U arheološkom lokalitetu u Egiptu, utvrđeno je da drvo od koga je napravljen sarkofag sadrži 63% izotopa  $^{14}\text{C}$ . Kolika je starost drveta kojim je napravljen sarkofag?*

$$\text{MATEMATIKA} + \text{HEMIJA} = \checkmark$$

## NEWTONOV ZAKON HLADENJA

DJ prvog reda mogu se koristiti za rešavanje različitih problema određivanja temperature. Na primer, moguće je odrediti vreme ubista u kriminalističkim slučajevima, inženjeri mogu određivati temperature objekta pri projektovanju sisteme za hlađenje i grejanje zgrada, možemo odrediti vreme potrebno za hlađenje šoljice kafe npr. Rešavanje svakog od ovih problema zasniva se na primeni *Njutnovog zakona hlađenja*.

Neka je  $T = T(t)$  temperatura objekta u vremenskom trenutku  $t$ . **NEWTONOV ZAKON HLADENJA** kaže da je promena temperature objekta proporcionalna razlici temperature objekta  $T$  i temperature okoline  $T_S$ . Ovaj zakon je dobra aproksimacija procesa hlađenja u uslovima kada je temperatura okoline konstantna. Matematički model glasi

$$(1) \quad T'(t) = -k(T(t) - T_S), \quad T(0) = T_0,$$

gde je  $k > 0$  koeficijent hlađenja, a  $T_0$  početna temperatura objekta. Rešenje dobijene DJ sa razdvojenim promenljivim je

$$\frac{dT}{T - T_S} = -k dt \Rightarrow \ln |T - T_S| = -kt + c \Rightarrow T(t) = T_S + Ce^{-kt}.$$

Iz početnog uslova imamo

$$T_0 = T(0) = C + T_S \Rightarrow C = T_0 - T_S.$$

Dakle, rešenje početnog problema (1) je

$$(2) \quad T(t) = (T_0 - T_S)e^{-kt} + T_S.$$

Primetimo da ako je  $k > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = 0$ , tako da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_S$ , odnosno temperatura objekta teži temperaturi okoline.

**CRIME SCENE INVESTIGATION:** U hotelskoj sobi temperature  $24^\circ$  policija je u ponoć otkrila telo žrtve. Temperatura tela bila je  $28^\circ$ . Sat kasnije, temperatura tela bila je  $26^\circ$ . Kada se otprilike dogodio zločin?

REŠENJE: Kako je  $T_S = 24$ ,  $T_0 = T(0) = 28$ ,  $T(1) = 26$  biće

$$28 = T(0) = 24 + C \Rightarrow C = 4$$

Dakle, rešenje početnog problema je  $T(t) = 24 + 4e^{-kt}$ , odakle se dobija

$$26 = T(1) = 24 + 4 \cdot e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = 0.5 \Rightarrow k = \ln 2$$

Ako je vreme ubistva  $t_0$ , kako je  $T(t_0) = 37$  imamo

$$37 = T(t_0) = 24 + 4 \cdot e^{-\ln 2 t_0} \Rightarrow -\ln 2 \cdot t_0 = \ln \frac{13}{4}$$
$$\Rightarrow t_0 = \frac{\ln 4 - \ln 13}{\ln 2} \approx -1.7 \approx -1h \ 42min.$$

VREME UBISTVA JE PRIBLIŽNO 22:18.  $\square$

**Primer 1** Marko je izjutra u 7:00 pre polaska na posao skuvao sebi kafu i kada je dodao mleko temperatura kafe u šoljici je bila  $90^\circ$ . Dok u 7:30 nije krenuo na posao nije stigao da popije celu šoljicu kafe, pa je u šoljici ostalo kafe čija je temperatura bila  $45^\circ$ . Kada se u 20:00 vratio kući temperatura ostavljene kafe u šoljici je bila  $30^\circ$ . Kolika je temperatura Markovog stana?

REŠENJE: Kako je  $T_0 = T(0) = 90$ ,  $T(0,5) = 45$  i  $T(13) = 30$  biće iz (2)

$$45 = (90 - T_S)e^{-0.5k} + T_S, \quad 30 = (90 - T_S)e^{-13k} + T_S,$$

odakle se dobija  $k = 2.77259$  i temperatura Markovog stana  $T_S = 30$ .  $\square$

Ako se temperatura okoline  $T_S$  menja, situacija je komplikovanija. Na primer, posmatrajmo problem grejanja i hlađenja zgrade, ako se spoljna temperatura menja u toku 24h. Ako pretpostavimo da unutar zgrade nema posebnog sistema hlađenja i grejanja, DJ koju treba rešiti da bi odredili temperaturu  $T(t)$  unutar zgrade je

$$(3) \quad \frac{dT}{dt} = k(C(t) - T(t)),$$

gde je  $C(t)$  funkcija koja određuje spoljnu temperaturu, a  $k > 0$  je koeficijent hlađenja koji zavisi od izolacije zgrade. Prema (3) ako je  $C(t) > T(t)$ , onda je  $dT/dt > 0$ , tj.  $T(t)$  vremenom raste, a ako je  $C(t) < T(t)$ , onda je  $dT/dt < 0$ , odnosno temperatura zgrade  $T(t)$  opada vremenom.

**Primer 2** Spoljašnja temperatura u Nišu, u aprilu, u toku jednog dana određena sa

$$C(t) = \frac{5}{9} \left( 38 - 10 \cos \frac{\pi t}{12} \right), \quad 0 \leq t \leq 24.$$

Ako je koeficijent hlađenja zgrade  $k = 1/4$ , temperatura unutar zgrade u ponoć je  $T_0 = 15^\circ$ , odrediti kada će temperatura unutar zgrade dostići svoj maksimum i odrediti maksimalnu temperaturu unutar zgrade.

REŠENJE: Početni problem koji treba rešiti je

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4} \left( \frac{5}{9} \left( 38 - 10 \cos \frac{\pi t}{12} \right) - T(t) \right), \quad T(0) = 15.$$

DJ je linearna,

$$\frac{dT}{dt} + kT(t) = \frac{5}{36} \left( 38 - 10 \cos \frac{\pi t}{12} \right) = kC(t)$$

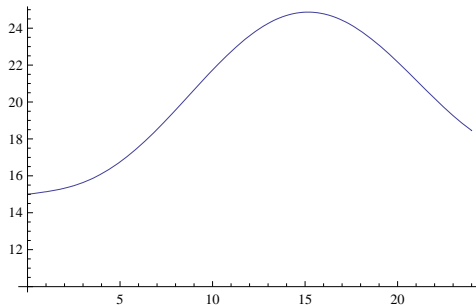
i rešenje početnog problema je

$$T(t) = e^{-t/4} \left( P_0 + \frac{5}{36} \int_0^t e^{s/4} \left( 38 - 10 \cos \frac{\pi s}{12} \right) ds \right),$$

odnosno

$$T(t) = 5 \frac{342 + 38\pi^2 - e^{-t/4}(9 + 11\pi^2) - 90 \cos(\pi t/12) - 30\pi \sin(\pi t/12)}{9(9 + \pi^2)}$$

i prikazano je na Slici 1 za  $t \in [0, 24]$ .



Slika 1: Primer 2.  $\sim$  temperatura zgrade u toku 24h

Sa grafika zaključujemo da se maksimalna temperatura u zgradi dostiže oko 15h. Da bi se preciznije odredilo vreme, treba naći koren jednačine  $T'(t) = 0$ , što je moguće jedino numeričkim rešavanjem. Za koren jednačine blizu  $t = 15$  dobija se  $t_{max} = 15.1624$ , odnosno maksimalna temperatura biće dostignuta u 15:10. Maksimalna temperatura zgrade u vreme  $t_{max}$  je onda  $T_{max} = 24.869^\circ$ .  $\square$

**Primer 3** U kafiću Milena i Ivana su naručile kafu i kada im je konobar doneo šoljice temperatura kafe u njima je bila  $90^\circ$ . Milena je odmah dolila mleko sobne temperature  $22^\circ$ , a Ivana je u svoju šoljicu dolila mleko nakon 5 minuta.

(a) Koja će kafa biti toplija nakon 8 minuta?

(b) Šta se događa ako se dolije hladno mleko iz frižidera temperature  $4^\circ$ ?

## POPULACIONA DINAMIKA

Veliki broj problema koji uključuju porast ili opadanje broja jedinki neke populacije (biljaka, životinja, bakterija, virusa, kancerogenih ćelija itd.) može se rešiti primenom DJ prvog reda, koje predstavljaju dinamički model kojim je opisana dinamika rasta veličine neke populacije u funkciji od vremena.

Populacija je grupa jedinki iste vrste koja naseljava određeni prostor i mogu međusobno da se razmnožavaju dajući potomstvo. Veličinu populacije određuje broj jedinki populacije, a kada se kaže "rast populacije" misli se na povećanje veličine populacije, odnosno broja jedinki te populacije. Veličina populacije regulisana je raznim faktorima:

- faktorima koji ne zavise od gustine populacije: klimatski faktori, prirodne katastrofe (poplave, zemljotresi, požari, vulkanske erupcije), bolesti, itd.
- faktorima koji zavise od gustine populacije: prirodni resursi (hrana, voda, svetlost, prostor), predatorstvo, kompeticija, itd.

**EKSPONENCIJALNI MODEL RASTA POPULACIJE:** Modeliranje rasta veličine populacije je staro oko dve stotine godina i vezano je za engleskog matematičara Maltusa<sup>1</sup>. Njegov model rasta datira iz 1798., tkz. *Maltusov model* predstavlja prvi i najjednostavniji matematički model rasta veličine jedne populacije u okviru nekog ekosistema. Maltusov model rasta populacije je sledeći: **PROMENA VELIČINE POPULACIJE PROPORCIONALNA JE VELIČINI POPULACIJE**, odnosno, promena u broju jedinki neke populaciji biće veća što je u populaciji više jedinki. Ovo je razumna pretpostavka za rast populacije u idealnim uslovima (neograničeni resursi, odgovarajuća prehrana, nepostojanje bolesti, nepostojanje prirodnih neprijatelja, itd.). Obeležimo sa  $P = P(t)$  broj jedinki populacije u vremenskom trenutku  $t$ . Ako se sa  $\beta$  označi *stopa nataliteta* i sa  $\delta$  *stopa smrtnosti* te populacije. Osnovna pretpostavka Malthusovog modela glasi: u vremenskom intervalu dužine  $\Delta t$  broj rođenih jedinki u populaciji iznosi  $\beta\Delta tP(t)$ , a broj umrlih članova  $\delta\Delta tP(t)$ . Tada veličinu populacije u trenutku  $t + \Delta t$  nalazimo tako da veličini populacije u trenutku  $t$  dodamo broj rođenih jedinki populacije u vremenskom intervalu dužine  $\Delta t$  i od toga oduzmemo broj umrlih jedinki populacije za vreme  $\Delta t$ . Prema tome, važi

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \beta\Delta tP(t) - \delta\Delta tP(t) \Rightarrow \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (\beta - \delta)P(t)$$

i prelaskom na graničnu vrednost kada  $\Delta t \rightarrow 0$  dobija se DJ  $P'(t) = kP(t)$ , gde je  $k = \beta - \delta$  stopa rasta (koeficijent proporcionalnosti). Ako je u početnom

---

<sup>1</sup>Thomas Malthus (1766-1834), engleski demograf

trenutku  $t = 0$  veličina populacije  $P(0) = p_0 > 0$ , tada se veličina populacije u momentu  $t > 0$  opisuje rešenjem Košijevog problema

$$P'(t) = kP(t), \quad P(0) = p_0.$$

Rešenje DJ sa razdvojenim promenljivim je

$$\frac{dP}{P} = k dt \Rightarrow \ln P(t) = kt + c \Leftrightarrow P(t) = c \cdot e^{kt}$$

a iz početnog uslova  $p_0 = P(0) = c$  se dobija

$$P(t) = p_0 \cdot e^{kt} \rightarrow \text{EKSPONENCIJALNI RAST POPULACIJE}$$

Ukoliko umesto veličine populacije u početnom trenutku  $t_0 = 0$  znamo veličinu populacije u nekom vremenskom trenutku  $t_0 > 0$ , tj. ako je početni uslov  $P(t_0) = P_0$ , tada je  $c = P_0 e^{-kt_0}$ , pa je rast populacije opisan funkcijom

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}.$$

**Primer 4** U sledećoj tabeli dati su podaci o broju stanovnika SAD (u milionima) u periodu od 1800. do 1990.:

Godina	Broj stanovnika	Godina	Broj stanovnika
1800	5.30	1900	76.21
1810	7.24	1910	92.23
1820	9.64	1920	106.02
1830	12.68	1930	123.20
1840	17.06	1940	132.16
1850	23.19	1950	151.33
1860	31.44	1960	179.32
1870	38.56	1970	203.30
1880	50.19	1980	226.54
1890	62.98	1990	248.71

Tabela 1: Broj stanovnika SAD (u milionima) u periodu od 1800. do 1990.

*Na osnovu podataka za 1800. i 1820. godinu predvideti broj stanovnika za 1900. godinu?*

REŠENJE. Rešavamo KP

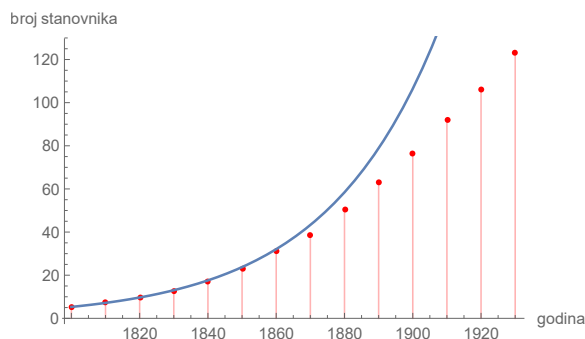
$$(4) \quad P'(t) = kP(t), \quad P(1800) = 5.3 = P_0$$

čije je rešenje  $P(t) = P_0 e^{k(t-1800)}$ . Koristeći podatak iz 1820. oćenićemo stopu rasta  $k$

$$P(1820) = P(1800)e^{20k} \Rightarrow k = \frac{1}{20} \ln \frac{P(1820)}{P(1800)} \approx 0.03$$

Koristeći ovu vrednost  $k$  rešenje populacione DJ daje dobro predviđanje broja stanovnika za 1850. godinu:

$$P(1850) = P(1800)e^{50k} \approx 23.75.$$



Slika 2: Eksponeñijalni rast broja stanovnika SAD u Primeru 4

Međutim, prema ovom modelu procena broja stanovnika za 1900. godinu bila bi

$$P(1900) = P(1800)e^{100k} = 106.45.$$

što je daleko više od broj stanovnika od 76.21 miliona. Procena broja stanovnika za 1950. godinu bila bi  $P(1950) = 477.09$ .

Dakle, možemo da zaključimo da eksponencijalni model rasta daje dobru procenu ali samo u kratkom vremenskom periodu. Videti Sliku 2 na kojoj je predstavljeno rešenje KP (4)  $P(t) = 5.3e^{0.03(t-1800)}$  i tačan broj stanovnika SAD prema Tabeli 1.  $\square$

**ŠIRENJE VIRUSA SARS-CoV-2:** U gradu od 100.000 stanovnika 10. marta su registrovana prva 5 slučajeva zaraženih virusom SARS-CoV-2, dok je 30. marta 2020. godine registrovano 785 stanovnika zaraženih virusom SARS-CoV-2. Nakon 10 dana (9. aprila 2020.) registrovano je 2867 obolelih od Covid-19. Kada će 5000 stanovnika tog grada biti zaražena virusom SARS-CoV-2? Kada će 10000 stanovnika tog grada biti zaražena virusom SARS-CoV-2? Koliko stanovnika će biti zaraženo nakon 70 dana?

REŠENJE. Koristeći početnu vredost  $P(20) = 785$ , rast broja zaraženih opisan je funkcijom  $P(t) = 785e^{k(t-20)}$ . Kako je  $P(30) = 2867$ , dobija se

$$2867 = P(30) = 785e^{10k} \Rightarrow k = \frac{1}{10} \ln \frac{2867}{785} \approx 0.13.$$

Zato, ako je  $T_1$  vreme kada će oboleti 5000 stanovnika, a  $T_2$  vreme kada će oboleti 10000 stanovnika, biće

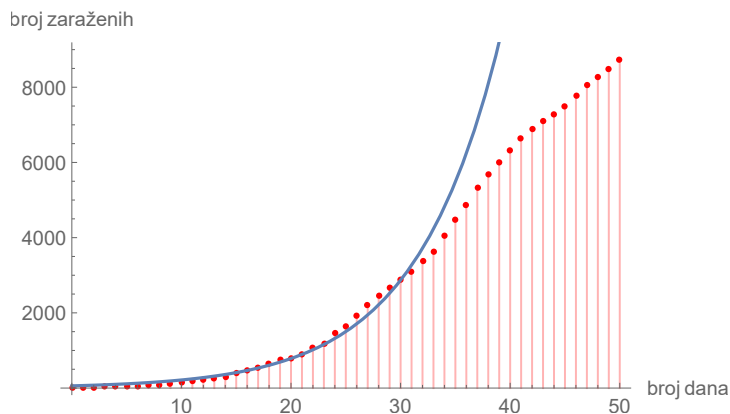
$$5000 = P(T_1) = 785e^{0.13(T_1-20)} \Rightarrow T_1 \approx 34.29.$$

$$10000 = P(T_2) = 785e^{0.13(T_2-20)} \Rightarrow T_2 \approx 39.64.$$

Dakle, 5000 stanovnika biće zaraženo virusom SARS-CoV-2 otprilike nakon 34 dana, odnosno 13. aprila 2020, što ne predstavlja dobru procenu s obzirom da je tog dana bilo 4054 zaraženih (videti Tabelu 2). Takodje, blizu 10000 zaraženih je bilo 9. maja 2020. dok je procena na osnovu modela da će taj broj biti postignut znatno ranije 19. aprila 2020. S druge strane, ako bismo na osnovu datih podatka hteli da predvidimo broj zaraženih nakon 50 ili 90 dana, imali bi

$$P(50) = 785e^{0.13 \cdot 30} \approx 38242, \quad P(90) = 785e^{0.13 \cdot 70} \approx 6.80418 \times 10^6,$$

što je daleko više od stvarnog broja zaraženih koji je iznosio 8724 nakon 50 dana, odnosno 11896 nakon 90 dana (videti Tabelu 2). Primetimo i da predviđen broj zaraženih nakon 100 dana (iznosi  $2.495 \times 10^7$ ) daleko prevazilazi ukupan broj stanovnika u Srbiji.



Slika 3: Eksponencijalni rast broja zaraženih izražen funkcijom  $P(t) = 785e^{k(t-20)}$  za  $k = 0.13$  i realni rast broja zaraženih u periodu od 10.3.2020. do 29.4.2020.

Ako procenu koeficijenta proporcionalnosti izvršimo na osnovu podatka počev od 30-tog dana od pojave prvog slučaja tj. koristeći za početnu vrednost



datum	30.3.	1.4.	3.4.	5.4.	7.4.	9.4.	11.4.	13.4.	15.4.	17.4.
broj dana	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
broj zaraženih	785	1060	1476	1908	2447	2867	3380	4054	4873	5690
datum	19.4.	21.4.	23.4.	25.4.	27.4.	29.4.	1.5.	3.5.	5.5.	7.5.
broj dana	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58
broj zaraženih	6318	6890	7276	7779	8275	8724	9205	9464	9677	9848
datum	9.5.	11.5.	13.5.	15.5.	17.5.	19.5.	21.5.	23.5.	25.5.	27.5.
broj dana	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78
broj zaraženih	10032	10176	10295	10438	10610	10733	10919	11092	11193	11275
datum	29.5.	31.5.	2.6.	4.6.	6.6.	8.6.	10.6.	12.6.	14.6.	16.6.
broj dana	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98
broj zaraženih	11354	11412	11454	11571	11741	11896	12031	12175	12310	12426
datum	18.6.	20.6.	22.6.	24.6.	26.6.	28.6.	30.6.	2.7.	4.7.	6.7.
broj dana	100	102	104	106	108	110	112	114	116	118
broj zaraženih	12616	12803	12990	13235	13565	14046	14564	15195	15829	16420

Tabela 2: Ukupan broj zaraženih u Srbiji virusom COVID-19 u periodu od 30.3.2020. do 6.7.2020. (preuzeto sa Statistika COVID-19 u Srbiji)

$P(30) = 2867$  i vrednost broja zaraženih nakon 50 dana, tj.  $P(50) = 8724$ , biće

$$P(t) = 2867 e^{k(t-30)} \Rightarrow 8724 = P(50) = 2867 e^{20k} \Rightarrow k = 0.2 \cdot \ln \frac{8724}{2867} \approx 0.056$$

tako da u tom slučaju procena broja stanovnika koji će biti zaražen virusom SARS-CoV-2 nakon 90 dana biće:

$$P(90) = 2867 e^{0.056(90-30)} \approx 80778,$$

Procena za broj zaraženih nakon 90 dana je kao što vidimo daleko manja nego u prethodnom slučaju, ali još uvek daleko veća od stvarnog broja zaraženih (Slika 4). Takođe, vreme  $T_3$  kada će oboleti 50000 stanovnika, biće

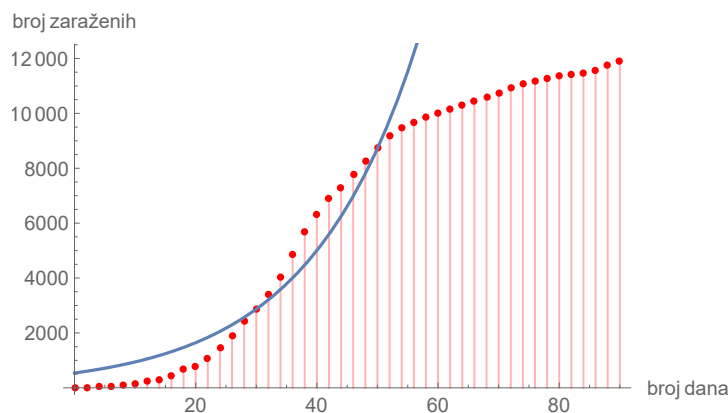
$$50000 = P(T_3) = 2867 e^{0.056(T_3-30)} \Rightarrow T_3 \approx 81.05.$$

Dakle, 50000 stanovnika biće zaraženo virusom SARS-CoV-2 otprilike nakon 81. dana.  $\square$

**Primer 5** *Bakterija Escherichia Coli razmnožava se tako da se svakih 20min bakterija deli na dve bakterije? Ako je u početnom trenutku  $t = 0$  bila samo jedna bakterija, koliko će ih biti za 24h?*

REŠENJE. Iz uslova  $P(0) = 1$  i  $P(20) = 2$  odredjujemo stopu rasta

$$P(20) = P(0)e^{20k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20},$$



Slika 4: Eksponencijalni rast broja zaraženih dat funkcijom  $P(t) = 2867 e^{k(t-30)}$  za  $k = 0.056$  i realni rast broja zaraženih u periodu od 10.3.2020. do 8.6.2020.

pa je funkcija dinamike razmnožavanja bakterije E.Coli

$$P(t) = e^{\frac{\ln 2}{20} t} = 2^{t/20}.$$

Posle 24h, odnosno 1440min, broj bakterija bi bio  $P(1440) = 2^{1440/20} = 2^{72}$  što predstavlja biomasu koja prevazilazi veličinu Zemlje !!!  $\square$

Jasno, neograničeni rast veličine populacije iz prethodnih primera, koju predviđa eksponencijalni model, ne događa se u prirodi. Fundamentalno pitanje ekologije je odrediti uzroke i posledice odstupanja u broju jedinki populacija od eksponencijalnog rasta, odnosno odgovoriti na pitanje koji faktori regulišu rast populacije u prirodi. Veliki broj bakterija izumire lučenjem toksičkih materija koji sprečavaju razmnožavanje bakterija ili usled drugih nepovoljnih uticaja iz spoljne sredine. Bakterijama, virusima, svim živim organizmima potrebni su specifični resursi, kao što su hrana i odgovarajuća sredina, kako bi se reprodukovali i preživeli. Za biljke su voda, sunčeva svetlost, hranljive materije i prostor za rast neki od ključnih resursa. Za životinje, važni resursi uključuju hranu, vodu, sklonište i prostor za razmnožavanje. Ovi resursi nisu neograničeni, a populacija može dostići samo veličinu koja odgovara dostupnosti odgovarajućih resursa u svom lokalnom okruženju. *Nosivi kapacitet populacije u datom okruženju* definisan je kao maksimalni broj jedinki populacije koji se u životnoj sredini može zadržati na neodređeno vreme.

Prirodni ekosistemi najčešće zbog svojih ograničenja ne mogu prihvatiti neograničeni rast populacije. Stoga se pojavila potreba za boljim modelom rasta populacije, tako da je 1845. belgijski naučnik Verhulst<sup>2</sup> predložio model rasta populacije, danas poznat kao *logistički* ili *Verhulstov model*.

<sup>2</sup>Pierre Francois Verhulst (1804–1849), belgijski matematičar

**LOGISTIČKI MODEL RASTA POPULACIJE - REGULISANI PRIRAŠTAJ POPULACIJE:** Veličina populacije  $P$  u početku raste eksponencijalno sa stopom rasta  $k$ , ali se taj rast smanjuje kako se veličina populacija približava maksimalnom kapacitetu  $K$  ( $K$  je nosivi kapacitet populacije u datom okruženju). Kada populacija postane dovoljno velika dolazi do kompeticije za resurse zbog čega stopa radjanja s vremenom počinje opadati, a stopa smrtnosti raste. Zato je Verhulst predložio zavisnost stope nataliteta od same veličine populacije (ali ne i od vremena  $t$ ), odnosno da je  $\beta = \beta(P)$ , pri čemu je fukcija  $\beta(P)$  opadajuća po  $P$ . Ovo je pretpostavka koju nameću sami prirodni sistemi, jer kako veličina populacije raste, manje je poželjna dalja reprodukcija jedinki te populacije jer se prirodni resursi smanjuju, što ukazuje na smanjenja stope nataliteta sa porastom veličine same populacije.

Najjednostavnija opadajuća funkcija koju možemo koristiti za ovaj model je linearna funkcija oblika  $\beta(P) = \beta_0 - \beta_1 P$ , gde su  $\beta_0, \beta_1$  pozitivne konstante.

$$\text{STOPA SMRTNOSTI KONSTANTNA:} \quad \delta = \delta_0,$$

**STOPA NATALITETA LINEARNO OPADA SA VELIČINOM POPULACIJOM  $P$  :**

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 P.$$

Tako dolazimo do DJ:

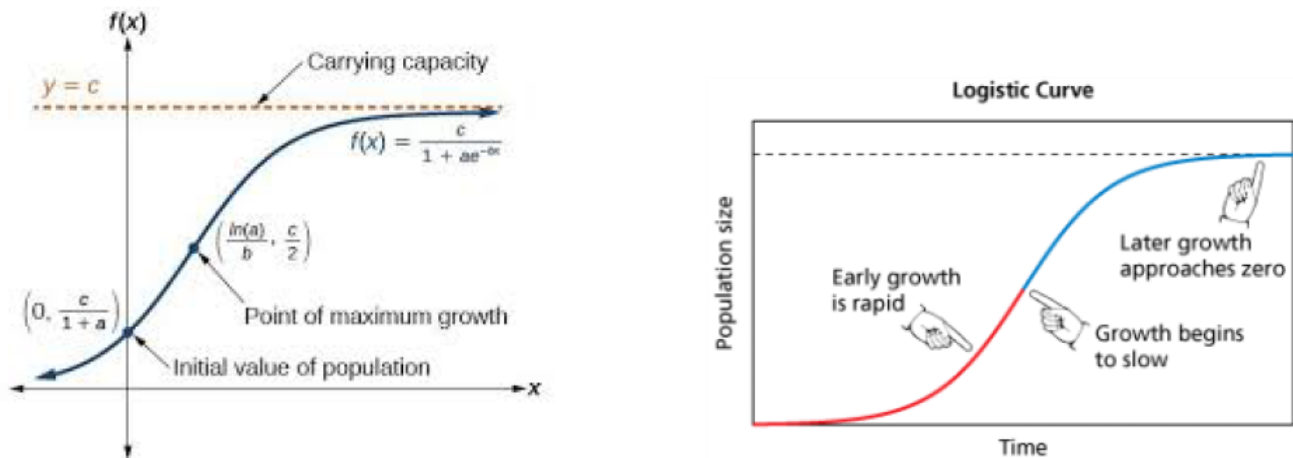
$$P' = (\beta_0 - \beta_1 P - \delta)P = (\beta_0 - \delta) P \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0 - \delta} P \right)$$

↓

$$(L) \quad P'(t) = kP(t) \left( 1 - \frac{P(t)}{K} \right) = \frac{k}{K} P(t) (K - P(t)) \rightarrow \text{LOGISTIČKA DJ}$$

Ako je početni broj jedinki populacije mali,  $P(t)/K$  je u početku malo, tako da je vrednost  $1 - P(t)/K$  na desnoj strani DJ (L) bliska 1 i desna strana DJ se ponaša kao  $kP(t)$  - ako je  $k > 0$ , rast veličine populacije je prema tome na početku eksponencijalni. Međutim, kako se veličina populacija povećava, količnik  $P(t)/K$  se povećava. Sve dok je broj jedinki populacije manji od  $K$ , količnik  $P(t)/K$  je manji od 1, tj.  $1 - P(t)/K > 0$ . Prema tome, desna strana DJ je pozitivna, ali se vrednost u zagradi smanjuje, tako da brzina rasta veličine populacije opada. Veličina populacije sve vreme raste prema svom maksimalnom kapacitet u datom okruženju  $K$ , ali nikad ne dostiže tu vrednost, već  $P(t) \rightarrow K$  kada  $t \rightarrow \infty$ . Ako je  $P(t) = K$ , desna strana DJ je jednaka nuli, pa se broj jedinki populacije ne menja.

Ako je početni broj jedinki populacije veći od  $K$ , onda je  $1 - P(t)/K < 0$ , tako da broj jedinki populacije opada ka  $K$ . Naravno, što je veličina populacija bliže maksimalnom kapacitetu  $K$ , to je opadanje u broju jedinki populacije sve sporije.



Slika 5: Logistička kriva (levo)  $f(x) = \frac{c}{1 + ae^{-bx}}$

Logistička DJ (L) je DJ sa razdvojenim promenljivim. Za  $P \neq 0$  i  $P \neq K$  dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{K dP}{kP(K - P)} = dt &\Rightarrow \frac{1}{k} \int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = t + c_1 \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{P(t)}{K - P(t)} \right| = kt + c_2, \quad K = kM \\ &\Rightarrow \left| \frac{K - P(t)}{P(t)} \right| = e^{-kt - c_2} = e^{-c_2} \cdot e^{-kt} \\ &\Rightarrow \frac{K}{P(t)} - 1 = C \cdot e^{-kt} \end{aligned}$$

odnosno opšte rešenje je

$$P(t) = \frac{K}{1 + C e^{-kt}}.$$

Konstantu  $C$  određujemo iz početnog uslova  $P(t_0) = P_0$

$$C = e^{kt_0} \frac{K - P_0}{P_0}.$$

Dakle, rešenje logističke DJ sa nosivim kapacitetom populacije u datom okruženju  $K$  i stopom rasta  $k$ , koje zadovoljava početni uslov  $P(t_0) = P_0$  je:

$$P(t) = \frac{K P_0}{(K - P_0)e^{-k(t-t_0)} + P_0} \rightarrow \text{LOGISTIČKI RAST POPULACIJE}$$

Primetimo, da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$ .

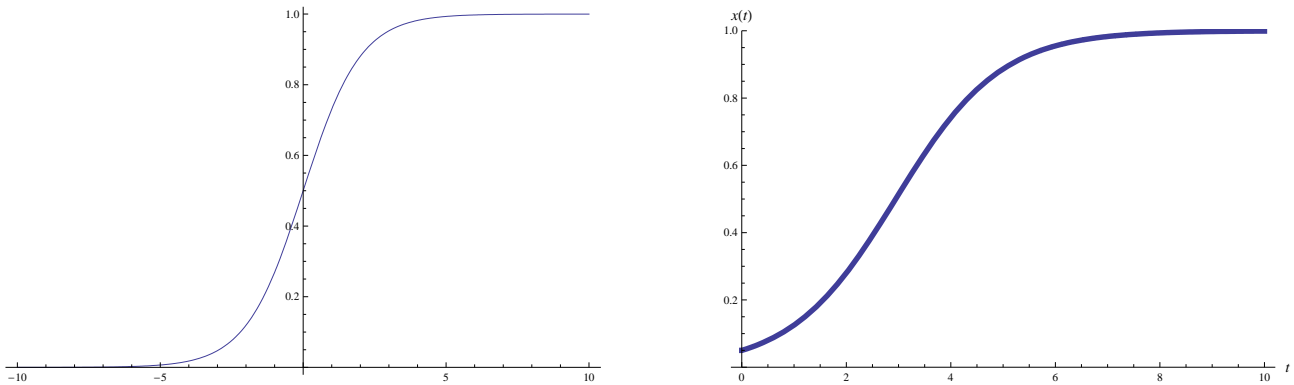
Za logističku funkciju

$$f(x) = \frac{c}{1 + ae^{-bx}}$$

na Slici 5-(levo), tačka maksimalnog rasta (tj. maksimuma nakon kojeg infekcija postaje manje agresivna i brzina rasta broja zaraženih počinje da opada) je tačka u kojoj prvi izvod funkcije počinje da opada. Kako je

$$f''(x) = ab^2c \frac{e^{-bx}(1 - ae^{-bx})}{(ae^{-bx} + 1)^3},$$

zaključujemo da je  $f''(x) = 0$  za  $ae^{-bx} = 1$ , tj. za  $x_{max} = \frac{\ln a}{b} \rightarrow f(x_{max}) = \frac{c}{2}$ .



Slika 6: (a) elementarna logistička funkcija ; (b) rešenje KP  $x'(t) = x(1 - x)$ ,  $x(0) = 0.05$

Elementarna logistička funkcija je

$$X(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

čiji grafik ima karakterističan "S"-oblik (Slika 6-(levo)). Na Slici 6-(desno) je prikazano rešenje KP

$$x'(t) = rx(1 - x), \quad x(0) = 0.05 \quad \text{za } r = 1$$

**Primer 4 ~ logistički rast veličine populacije:** U Primeru 4 broja stanovnika u SAD, početna vrednost je  $P_0 = 5.3$ . Uzevši za nosivi kapacitet populacije  $K = 300$  i stopu rasta  $k = 0.03$ , logistički rast populacije dat je funkcijom

$$(5) \quad P(t) = \frac{1.59}{5.3 + 294.7e^{-0.03(t-1800)}}.$$

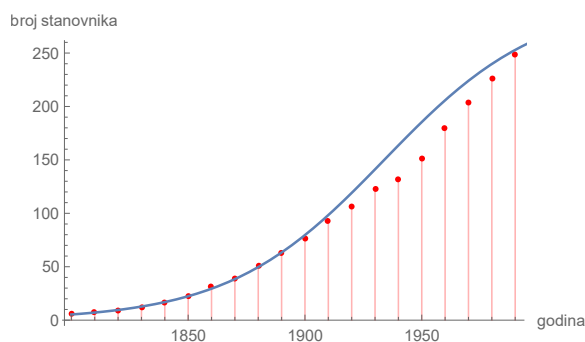
Prema ovom modelu procena broja stanovnika za 1900. godinu bila bi

$$P(1900) = P(1800)e^{100k} = 79.61.$$

što je približno realnom broju stanovnika od 76.21. Procena broja stanovnika za 1990. godinu bila bi

$$P(1990) = P(1800)e^{190k} = 252.94.$$

Videti Sliku 7 na kojoj je predstavljena funkcija logističkog rasta populacije data sa (5) i tačan broj stanovnika SAD prema Tabeli 1 u Primeru 4.  $\square$



Slika 7: Logistički rast broja stanovnika SAD u Primeru 4.

**Primer širenja virusa SARS-CoV-2 ~ logistički model:** U datom primeru širenja virusa SARS-CoV-2 u gradu od 100000 stanovnika imamo  $K = 10^5$ . Uzevši početne vrednosti  $P(30) = 2867$  logistički rast populacije dat je funkcijom

$$P(t) = \frac{2867 \cdot 10^5}{2867 + 97133 e^{-k(t-30)}}$$

Koristeći podatak  $P(50) = 8724$ , procenjujemo stopu rasta  $k$ :

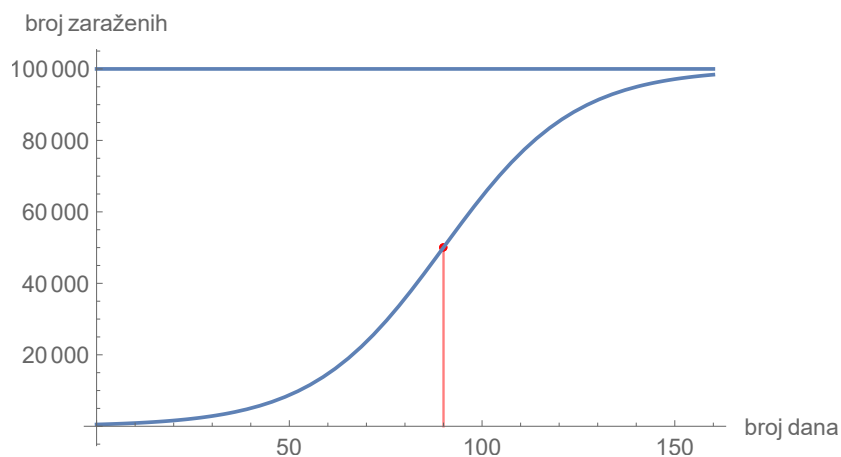
$$8724 = P(50) = \frac{2867 \cdot 10^5}{2867 + 97133 e^{-20k}} \Rightarrow k \approx 0.0587.$$

Onda je broj zaražnih virusom SARS-CoV-2 u trenutku  $t$  određen logističkom funkcijom

$$(6) \quad P(t) = \frac{2867 \cdot 10^5}{2867 + 97133 e^{-0.0587(t-30)}}$$

Vreme  $T_3$  kada će oboleti 50000 stanovnika, biće

$$50000 = \frac{2867 \cdot 10^5}{2867 + 97133 e^{-0.0587(T_2-30)}} \Rightarrow T_2 \approx 89.96$$



Slika 8: Primer širenja virusa SARS-CoV-2  $\sim$  logistička funkcija (6) kao rešenje početnog problema  $P(30)=2867 \sim$  vreme  $T_3 = 90$  kada je broj zaraženih  $50000 = K/2$

Dakle, 50000 stanovništa grada biće zaraženo virusom SARS-CoV-2 za 90 dana, odnosno 8. juna 2020. (označeno na Slici 8 crvenom tačkom), što je nešto bolja procena od one dobijene na osnovu eksponencijalnog modela, na osnovu koga je vreme kada će polovina od maksimalnog broja biti zaražena virusom bilo  $\hat{T}_3 \approx 81$ . Primetimo da i u kratkom vremenskom periodu razlika u proceni između eksponencijalnog i logističkog rasta je čak 9 dana. Takodje, procena broja zaraženih nakon 90 dana je

$$P(90) = \frac{2867 \cdot 10^5}{2867 + 97133 e^{-0.0587 \cdot (90-30)}} = 50055,$$

što je daleko manje od broja zaraženih koji predvidja eksponencijalni model. Medjutim, možemo primetiti da i broj zaraženih koji predvidja logistički model je daleko veći od broja zaraženih nakon 90 dana koji iznosi 11896.

U prethodnim izračunavanjima pretpostavili smo da je maksimalni kapacitet populacije koji može biti zaražen zapravo ukupan broj stanovnika grada tj.  $K = 10^5$ , što nije realna procena širenja virusa. Zato na osnovu još nekog od podataka npr. broja zaraženih nakon 50 i 70 dana, možemo da procenimo ne samo koeficijent proporcionalnosti  $k$ , već i maksimalni kapacitet širenja virusa  $K$ . Naime, dobijamo sistem jednačina

$$p_1 = P(50) = \frac{P_0 K}{(K - P_0)e^{-20k} + P_0}$$

i

$$p_2 = P(70) = \frac{P_0 K}{(K - P_0)e^{-40k} + P_0}$$

Ako označimo sa  $\alpha = e^{-20k}$ , dobija se sistem jednačina po  $K$  i  $\alpha$ :

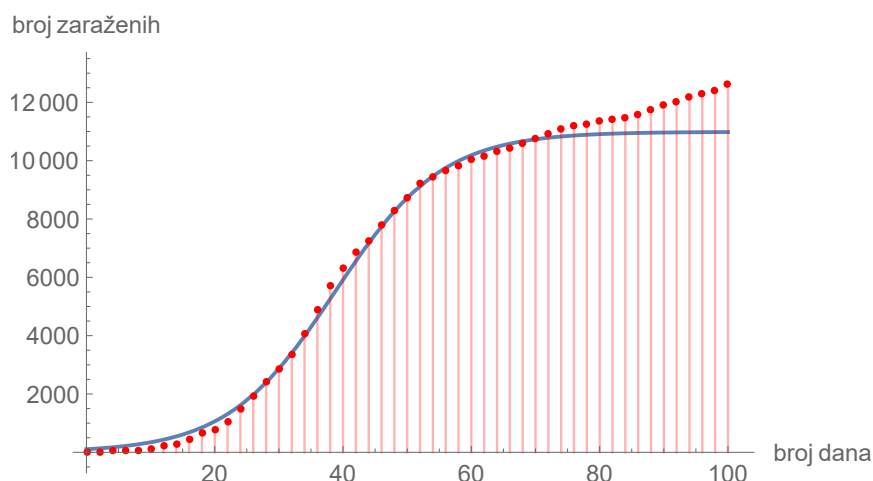
$$p_1 = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\alpha}, \quad p_2 = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)\alpha^2}$$

čije je rešenje

$$\alpha = \frac{P_0(p_2 - p_1)}{p_2(p_1 - P_0)}, \quad K = \frac{p_1(2p_2P_0 - p_1p_2 - p_1P_0)}{P_0p_2 - p_1^2}$$

Zamenjujući vrednosti za  $P_0, p_1, p_2$  dobija se

$$K \approx 10988, \quad \alpha \approx 0.0916 \Rightarrow k \approx 0.12.$$



Slika 9: Primer širenja virusa SARS-CoV-2  $\sim$  logistička funkcija (7) i realni rast broja zaraženih u periodu od 10.3.2020. do 18.6.2020.

Prema tome, broj zaražnih virusom SARS-CoV-2 u trenutku  $t$  određen je logističkom funkcijom

$$(7) \quad P(t) = \frac{2867 \cdot 10988}{2867 + 8121 e^{-0.12(t-30)}}$$

Primetimo da je koristeći (7), dobijamo sledeću procenu broja stanovnika koji će biti zaražen virusom SARS-CoV-2 nakon 90 dana:

$$P(90) = \frac{2867 \cdot 10988}{2867 + 8121 e^{-0.12 \cdot 60}} \approx 10964,$$

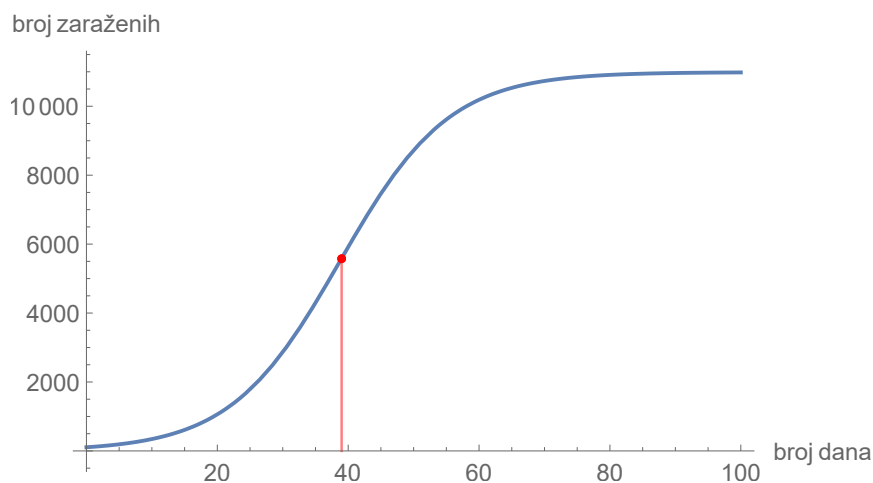
što predstavlja daleko bolju procenu od prethodnih.

Možemo odrediti i vreme

$$t_{max} = \frac{\ln a}{b} \approx 39, \quad a = \frac{8121}{2867} e^{30 \cdot 0.12}, \quad b = k \approx 0.12$$

nakon koga brzina rasta broja zaraženih počinje da opada (Slika 10).

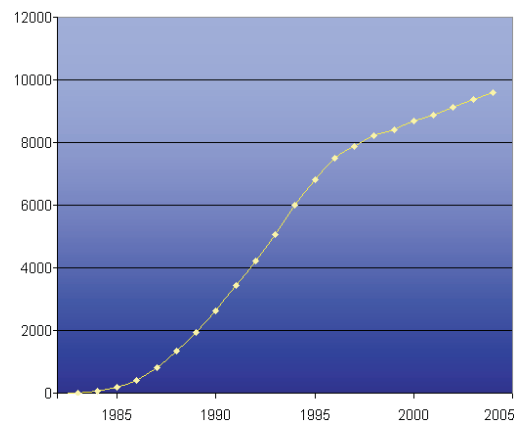
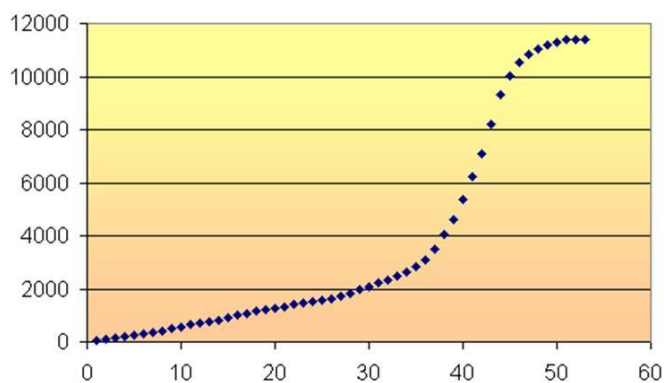




Slika 10: Primer širenja virusa SARS-CoV-2  $\sim$  logistička funkcija (7) i tačka maksimalnog rasta - vreme  $t_{max} = 39$  nakon koga brzina rasta broja zaraženih počinje da opada

Veliki broj primera u praksi pokazuje povećanje broja jedinki populacije prema logističkom modelu rasta:

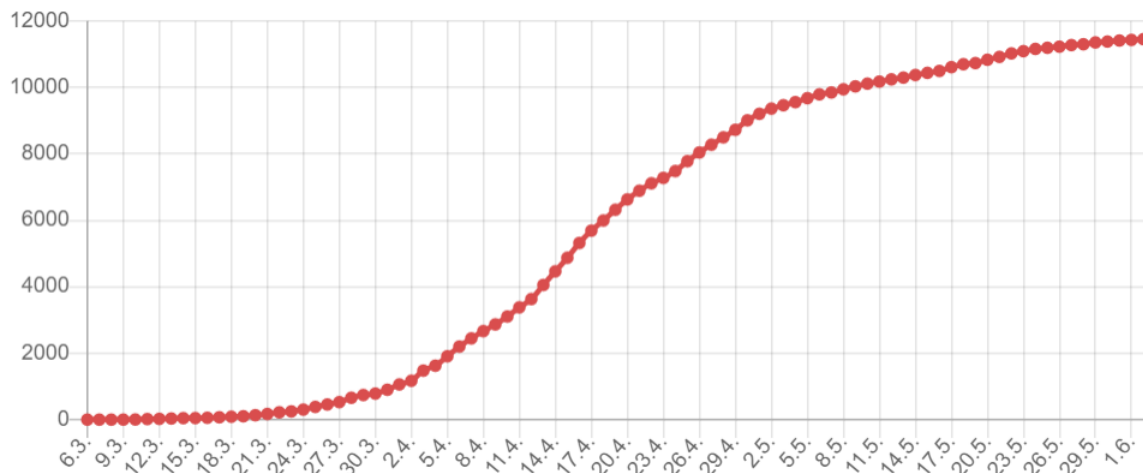
★ Širenje virusa svinjskog gripa je počelo u Meksiku 2009. godine i na grafikonu na Slici 11 prikazani su zvanični podaci Meksičke zdravstvene organizacije o širenju virusa H1N1 u Meksiku od marta 2009. do maja 2009. Vidimo da rast broja zaraženih ima upravo oblik logističke "S"-krive.



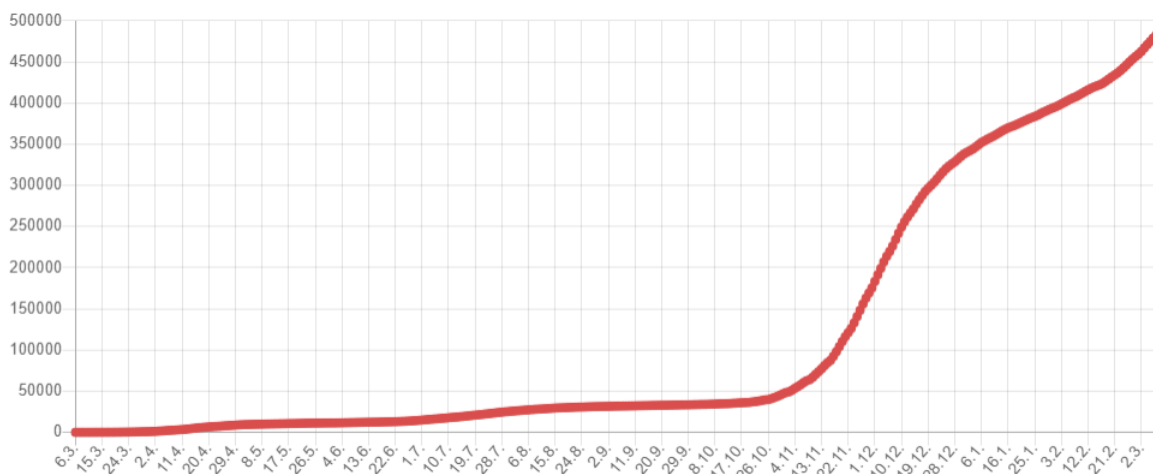
Slika 11: Širenje virusa H1N1 u Meksiku od marta 2009. do maja 2009. (levo); Širenje HIV virusa u Australiji od 1981. do 2005. (desno)

★ Na grafikonu na Slici 11 prikazani su podaci o širenju HIV virusa u Australiji od 1981. do 2005. Primećujemo da do 1996. broj zaraženih ima eksponencijalni rast, ali da globalno ima očekivani logistički "S"-oblik i da se opadanje u brzini rasta broja zaraženih od 1996. godine obrazlaže boljom edukacijom i korišćenjem odgovarajućih lekova.

★ Na grafikonima na Slikama 12 i 13 prikazani su podaci o ukupnom broju zaraženih u Srbiji virusom COVID-19 u periodu od 6.marta 2020. do 01.juna 2020. i od 6.marta 2020. do 02.marta 2021. Kriva na Slici 12 ima očekivani logistički "S"-oblik.



Slika 12: Širenje virusa SARS-CoV-2 u Srbiji od 6.marta 2020. do 01.juna 2020.



Slika 13: Širenje virusa SARS-CoV-2 u Srbiji od 6.marta 2020. do 6.marta 2021. (broj zaraženih 478878)

U opštem slučaju bolest se ne može sve vreme eksponencijalno širiti. Ljudi koji su oboleli, nakon što se oporave postaju imuni, pa se ne mogu ponovo zaraziti. Ako previše ljudi umire kao posledica neke bolesti, brzina rasta broja zaraženih će vremenom opasti, jer se smanjuje broj ljudi koji mogu biti zaraženi. Takođe, dejstvom odgovarajućih mera zaštite (izolacija zaraženih tj. uvođenje karantina, vakcinacija, ograničenje kontakta) smanjiće se brzina širenja bolesti.

## ZAKON RADIOAKTIVNOG RASPADA

Da li ste se zapitali kako se procenjuje starost jedne stene, fosila ili predmeta? Da li vas je iznenadilo neverovatno precizno navođenje starosti nečega što potiče iz davnih perioda mladosti naše planete? Koliko su zaista pouzdane cifre za koje se tako sigurno tvrdi da predstavljaju činjenicu, i da li su greške ovih merenja zaista tako male? Svakodnevno smo okruženi brojnim stvarima čiju starost veoma lako možemo da odredimo ili procenimo. Knjige, igračke, alat i mnogi drugi predmeti uglavnom imaju na sebi odštampan i datum i mesto proizvodnje. Kada vidimo neku zgradu, automobil ili most, na osnovu izgleda i materijala od koga su napravljeni možemo veoma dobro da procenimo vreme iz koga potiču. Starost arheoloških pronalazaka određuje se poznavanjem istorije, stila i umeća ljudi koji su živeli u nekom određenom dobu. Ali šta onda da radimo sa stenama i fosilima na kojima nije utisnut nikakav datum i koje nisu deo istorije o kome imamo zabeležene zapise očevidaca?

Jedan od najvažnijih problema u arheologiji i geologiji je određivanje starosti materijalnih ostataka koji svedoče o istoriji zemlje i čovecanstva. *Određivanje starosti materijala metodom radioaktivnog izotopa ugljenika  $^{14}\text{C}$*  - autora Amerikanca Libija<sup>3</sup> je vrlo pogodna metoda za apsolutno datiranje materijala organskog porekla starosti do oko 60000 godina. Libi je izotop  $^{14}\text{C}$  otkrio 1947. u Chicagu i za ovaj postupak određivanje starosti materijala je 1960. godine dobio Nobelovu nagradu za hemiju.

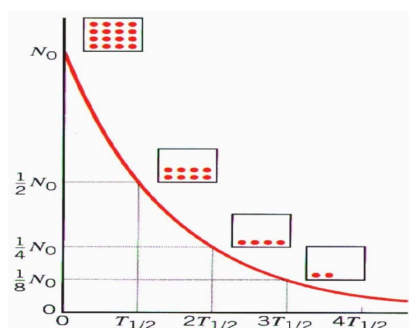
Osnovna ideja metode određivanja starosti radioaktivnim ugljenikom  $^{14}\text{C}$  zasniva se na činjenici da je koncentracija  $^{14}\text{C}$  u živom organizmu stalna, jer je stalnom izmenom supstanci uspostavljena ravnoteža između gubitka usled radioaktivnog raspada i unosa novih  $^{14}\text{C}$  atoma iz atmosfere. Biljke asimiliraju  $^{14}\text{C}$  putem fotosinteze (putem ugljen dioksida), a životinje se hrane biljkama - na taj način sva živa bića zadržavaju istu koncentraciju aktivnosti  $^{14}\text{C}$  tokom svog života.  $^{14}\text{CO}_2$  se poput običnog  $\text{CO}_2$  raspada u okeanima, te se nalazi i u morskim organizmima. Na taj način sva živa bića nadoknađuju  $^{14}\text{C}$  tokom svog života. Nakon smrti organizma prestaje nadoknađivanje  $^{14}\text{C}$ , te se njegova koncentracija smanjuje prema zakonu radioaktivnog raspada i merenjem preostale koncentracije  $^{14}\text{C}$  u nekom materijalu organskog porekla može se, prema tome, odrediti koliko je vremena proteklo od trenutka kad je nastupila smrt, tj. kad je prestala izmena supstanci.

Zakon radioaktivnog raspada određuje broj neraspadnutih jezgara date radioaktivne supstance nakon proteklog vremena. Radioaktivni raspad je slučajan

<sup>3</sup>Willard Frank Libby (1908–1980), amerikanac koji se bavio fizičkom hemijom

proces - ne može se tačno predvideti koje jezgro će se u kom trenutku raspasti, ali se može odrediti broj jezgara koji će se raspasti posle izvesnog intervala vremena. Verovatnoća da će se jedno jezgro raspasti ne zavisi ni od vremena  $t$  niti od toga koliko se jezgara već raspalo. Brzina raspada posmatranog broja jezgara zavisi samo od broja prisutnih radioaktivnih jezgara, a ne i od njihove prošlosti ili trenutnog stanja. Ako je  $N(t)$  broj neraspadnutih jezgara date radioaktivne supstance u vremenskom trenutku  $t$ , brzina raspada izražava se promenom broja jezgara  $dN$  u jedinici vremena  $dt$  i opisan je diferencijalnom jednačinom

$$(8) \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$



Slika 14: Zakon radioaktivnog raspada

U DJ (8) konstantna  $\lambda$  naziva se *konstanta radioaktivnog raspada*, a minus na desnoj strani DJ označava da se broj neraspadnutih jezgara tokom vremena smanjuje. Ako je početni uslov  $N(0) = N_0$ , rešenje početnog problema DJ (8) je

$$(9) \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

*Vreme poluraspada*  $T_{1/2}$  je vremenski interval za koji se raspadne polovina od ukupnog broja atomskih jezgara radioaktivnog elementa (videti sliku 14)

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}.$$

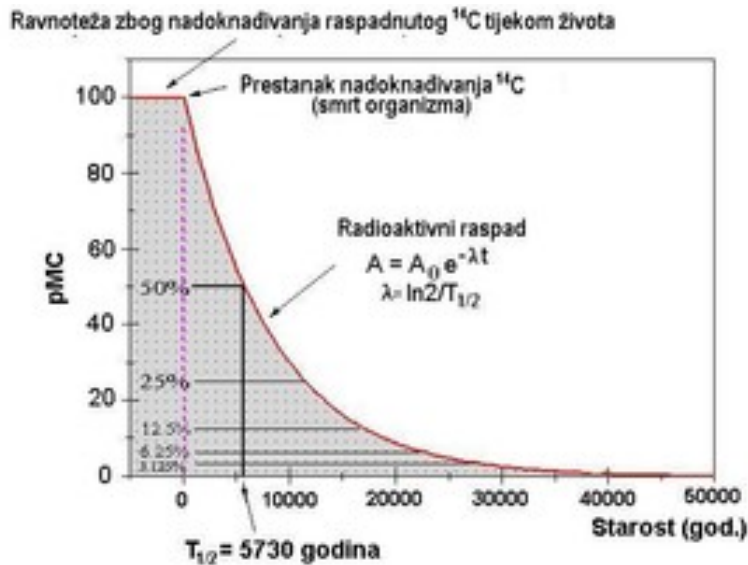
Zamenom u (9) dobijamo  $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$ , odakle je

$$(10) \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Dakle, iz (9) i (10) rešenje početnog problema DJ (8) je

$$(11) \quad N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Recimo starost planete zemlje se procenjuje na 4,5 milijardi godina, na osnovu vremena poluraspada  $^{238}\text{U}$  (prirodnog radioaktivnog izotopa uranijuma) koje iznosi  $4,47 \times 10^9$  godina.



Slika 15: Radioaktivni raspad izotopa  $^{14}\text{C}$  kao osnova izračunavanja starosti.

Treba naglasiti da se metodom  $^{14}\text{C}$  određuje starost materijala, a ne predmeta koji je od tog materijala izrađen, odnosno ako se određuje starost drvenog sarkofaga (videti Primer 6)  $^{14}\text{C}$  metodom odredićemo vreme kad je drvo prestalo da raste, a ne kad je neki sarkofak izrađen.

Osnovne pretpostavke za uspešnost metode  $^{14}\text{C}$  su:

- stalna i ravnomerna produkcija  $^{14}\text{C}$  u atmosferi,
- ravnomerna raspodela izotopa  $^{14}\text{C}$  u biosferi,
- poznato vreme poluraspada izotopa  $^{14}\text{C}$  - prema međunarodno usvojenoj konvenciji iz 1985. godine vremena poluraspada izotopa  $^{14}\text{C}$  je  $5730 \pm 40$  godina
- smanjenje koncentracije  $^{14}\text{C}$  zavisi samo od vremena proteklog od smrti organizma - nakon smrti organizma u uzorku nije došlo do naknadne izmene (hemijske ili izotopne) s ugljenikom iz okoline

**Primer 6** U arheološkom lokalitetu u Egiptu, utvrđeno je da drvo od koga je napravljen sarkofag sadrži 63% izotopa  $^{14}\text{C}$ . Kolika je starost drveta kojim je napravljen sarkofaga?

REŠENJE. Neka je  $N(t)$  procenat  $^{14}\text{C}$  u uzorku drveta nakon  $t$  godina. Tada je početni uslov  $N(0) = 1 = N_0$ . Kako je za  $^{14}\text{C}$  vreme poluraspada  $T_{1/2} = 5730$ , iz (11) dobijamo

$$N(t) = 2^{-\frac{t}{5730}}.$$

U datom problemu, treba odrediti  $t_S$  za koje je  $N(t_S) = 0.63$  tj.

$$2^{-\frac{t_S}{5730}} = N(t_S) = 0.63.$$

Dakle, starost drveta kojim je napravljen sarkofag je

$$t_S = -5730 \log_2 0.63 = -5730 \frac{\ln 0.63}{\ln 2} \approx -3819.48 \text{ godina.} \quad \square$$