GLAVA II - Diferencijalne jednačine višeg reda

1. Uvodni pojmovi

Obična diferencijalna jednačina prvog reda u normalnom obliku:

(1) $$y^{(n)} = f\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big) \qquad f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Definicija 1 *Funkcija $y = \varphi(x)$, definisana na intervalu (a, b), je rešenje* DJ (1) *ako za svako $x \in (a, b)$:*

1. $\exists\, \varphi^{(n)}(x)$;
2. $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathbb{D}$;
3. $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$.

Košijev problem za DJ (1): *Za datu tačku $\Big(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\Big) \in \mathbb{D}$ odrediti rešenje $y = \varphi(x)$, definisano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava uslove*

(2) $$\varphi(x_0) = y_0,\ \ \varphi'(x_0) = y_0',\ \ \ldots,\ \ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Brojevi $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ su početne vrednosti, a uslovi (2) početni uslovi.

Oblast $\mathbb{G} \subset \mathbb{D}$ je *oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja* DJ (1) ako kroz svaku tačku te oblasti prolazi samo jedna integralna kriva. Drugim rečima, za proizvoljnu tačku $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{G}$ Košijev problem (1)–(2) ima jedinstveno rešenje.

Definicija 2 *Neka je $\mathbb{G}$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja* DJ (1). *Funkcija $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $x \in (a, b)$, gde su $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in H \subset \mathbb{R}^n$ parametri, naziva se* **opšte rešenje** *ove* DJ, *ako:*

1. *Sistem jednačina*

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y' &= \varphi'(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ &\ \ \vdots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{aligned}$$

je jedinstveno rešiv po $c_1, c_2, \ldots, c_n$ u oblasti $\mathbb{G}$:

$$c_i = \psi_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

za svako $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in \mathbb{G}$;

2. *Funkcija $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ je rešenje* DJ (1) *za bilo koje vrednosti $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in H$.*

✓ može se dokazati da opšte rešenje sadrži sva Košijeva rešenja

✓ Ako je izrazom

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \tag{3}$$

implicitno određeno opšte rešenje DJ (1), funkcija $\phi = \phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ je **integral** DJ (1), a izraz (3) naziva se **opšti integral** DJ (1).

✓ rešenje DJ (1) je **partikularno** ako u opštem rešenju najmanje jedan parametar c_i uzima konkretnu vrednost.

✓ **Singularno rešenje i singularna integralna kriva** se definišu analogno jednodimenzionalnom slučaju. Diferencijalna jednačina (1) može imati familiju singularnih rešenja koja zavisi od najviše $n - 1$ parametara.

Sistem diferencijalnih jednačina reda n u normalnom obliku:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad f_i : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{4}$$

transformacija DJ (1) na sistem DJ u normalnom obliku (4)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \overset{(y = y_1)}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} y_1' &= y' = y_2 \\ y_2' &= y'' = y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y^{(n-1)} = y_n \\ y_n' &= y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \\ &\qquad = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = y_3 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n = f_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Peanova teorema egzistencije rešenja sistema DJ (4) i Pikarova teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema DJ (4) biće pokazane u kursu Diferencijalne jednačine i dinamički sistemi. S obzirom da se DJ (1) reda n može svesti na sistem DJ (4) reda n u normalnom obliku, Peanova teorema i Pikarova teorema za DJ (2) slede iz odgovarajućih teorema za sistem DJ (4) i ovde ih zato navodimo bez dokaza.

Teorema 1 (Peanova teorema) *Dovoljan uslov egzistencije rešenja* DJ (1) *u oblasti* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ *je* $f \in C(\mathbb{Q})$.

Teorema 2 (Pikarova teorema) *Neka je funkcija* $f \in C(\mathbb{G})$ *i neka zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivama* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *na svakom kompaktu sadržanom u* $\mathbb{G}$. *Tada za bilo koju tačku* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{G}$ *postoji jedinstveno rešenje* $y = \varphi(x)$ DJ (1), *definisano u nekoj okolini tačke* x_0, *koje zadovoljava početne uslove* (2).

Zbog jednostavne provere dovoljnih uslova, u primenama se često koristi sledeća teorema, koja je suštinski posledica Teoreme 2.

Teorema 3 *Neka su funkcije* $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \in C(\mathbb{G})$. *Tada za svaku tačku* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$ *postoji jedinstveno rešenje* $y = \varphi(x)$ DJ (1), *definisano u nekoj okolini tačke* x_0, *koje zadovoljava početne uslove* (2).

Primer 1.1. Po Peanovoj teoremi oblast egzistencije rešenja DJ

$$y'' = 2\sqrt{y'}$$

je $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$, a po Teoremi 3 oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja je $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.

Smenom $u = y'$ DJ se svodi na DJ prvog reda

$$u' = 2\sqrt{u}, \quad u \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{u} = x + c_1,\ x \geq -c_1\,.$$

Onda je $y' = (x + c_1)^2$, pa je opšte rešenje DJ

$$y = \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2,\ x \geq -c_1.$$

Treba ispitati jedinstvenost onih rešenja za koja je $y' = 0$, tj. jedinstvenost familije rešenja $y = c$. Kroz proizvoljnu tačku (x_0, y_0), pored rešenja $y = y_0$ prolazi i integralna kriva partikularnog rešenja $y = \frac{1}{3}(x - x_0)^3 + y_0, x \geq x_0$, sa koeficijentom pravca tangente jednakim nuli u toj tački. Dakle, $y = y_0$ je singularno rešenje.

Obična diferencijalna jednačina reda n u implicitnom obliku:

$$(5) \qquad F\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\Big) = 0, \qquad F : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}.$$

Definicija 3 *Funkcija $y = \varphi(x)$, definisana na intervalu (a, b), je rešenje DJ (5) ako za svako $x \in (a, b)$:*

1. $\exists\, \varphi^{(n)}(x)$;
2. $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$;
3. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$.

Košijev problem DJ (5), pored početnih uslova (2), potpuno je određen još jednim uslovom $\varphi^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$, gde je $z = y_0^{(n)}$ neko od rešenja jednačine $F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, z) = 0$.

Teorema 4 *Neka je funkcija F definisana i neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda po promenljivama $y, y', \ldots, y^n$ u nekoj okolini tačke $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) \in \Omega$, pri čemu je*

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) \neq 0\,.$$

Tada DJ (5) *ima jedinstveno rešenje $y = \varphi(x)$, definisano i n puta neprekidno diferencijabilno u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava početne uslove* (2) *i uslov $\varphi^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$.*

✓ za DJ (5) jedinstvenost rešenja Košijevog problema nije narušena ako iste početne uslove zadovoljavaju dva rešenja $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$, tako da je $\varphi_1^{(n)}(x_0) \neq \varphi_2^{(n)}(x_0)$.

✓ Ako su uslovi Teoreme 4 ispunjeni za svaku tačku oblasti $\Omega_1 \subset \Omega$, tada je Ω_1 *oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja* DJ (5).