

# 1 Бројевни системи

1. Нека је  $B$  природан број већи од 1.

а) Доказати да за сваки природан број  $n$  постоји  $c_0, c_1, \dots, c_k \in \{0, 1, 2, \dots, B-1\}$  такви да важи:

$$n = c_k \cdot B^k + c_{k-1} \cdot B^{k-1} + \dots + c_1 \cdot B + c_0.$$

Под условом:

-  $c_k \neq 0$

доказати да су број  $k$  и бројеви  $c_0, c_1, \dots, c_k$  јединствени.

б) Доказати да за сваки позитиван реалан број  $x$  постоји  $k \geq 0$  и низ  $c_k, c_{k-1}, \dots, c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, B-1\}$  тако да важи:

$$x = c_k \cdot B^k + \dots + c_1 \cdot B + c_0 + c_{-1} \cdot \frac{1}{B} + c_{-2} \cdot \frac{1}{B^2} + \dots = \sum_{i=k}^{-\infty} c_i \cdot B^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k-i} \cdot B^{k-i}.$$

Под следећим условима:

- ако је  $k > 0$  тада  $c_k \neq 0$ ;

- Не постоји индекс након ког је низ  $c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, \dots$  једнак константном низу  $B-1, B-1, B-1, \dots$ ;

доказати да су  $k$  као и цео низ  $(c_i)_{i \leq k}$  јединствени.

2. Записати број  $1010011_{(2)}$  у бази 10, као и број  $1211_{(10)}$  у бази 3.

3. Из сегмента  $[0, 1]$  избачени су сви бројеви који имају цифру 1 у свом тернарном запису. Нацртати скуп који чине преостали бројеви.

4. Природан број  $n$  се у бази са основом 10 записује као  $\overline{abcd}$ , а у бази са основом 7 као  $\overline{dcba}$ . Који је то број?

5. Да ли је могуће одабрати 2016 ненегативних целих бројева мањих од 100.000 таквих да никоја три одабрана броја не чине аритметичку прогресију?

6. Нека је  $n \in \mathbb{N}$ . Колико полинома  $P(x)$  са коефицијентима из скупа  $\{0, 1, 2, 3\}$  има особину:  $P(2) = n$ ?

## Задаци за домаћи:

7. Бројеви  $1, 2, \dots, 2016$  записани су у систему са основом 3. Колико је палиндрома добијено?

8. Алиса је замислила полином  $P(x)$  са коефицијентима из скупа  $\mathbb{N}_0$ . Боб зна да су коефицијенти из  $\mathbb{N}_0$ , али му није познат ни степен полинома ни било који његов коефицијент. Боб може поставити Алиси питање: колико је  $P(a)$  за било који комплексан број  $a$ , на шта му Алиса одговара истинито. Да ли је увек могуће да Боб на овај начин одгонетне који је полином Алиса замислила, и колико најмање питања Боб мора да постави да би открио о ком полиному је реч, онда када је могуће?