ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА 1

Први колоквијум - 29.12.2015.

1. Имамо 10 различитих књига и 5 кутија. У сваку кутију треба да ставимо по две књиге. На колико начина то можемо урадити ако:

а)[5] Кутије су међусобно различите?

б)[5] Кутије се не разликују међусобно?

2. [11] Аца и Бранко заједно полазе у школу са истог места. Сваки Ацин корак је за 10% дужи него Бранков, али број корака који Аца направи у току једног минута је за 10% мањи него број корака који направи Бранко у току једног минута. Ко од њих двојице први стигне у школу?

3. [11] На последња три поља табле димензије $1 \times n$ налази се по један жетон, при чему је $n \geq 4$. Аца и Бранко играју следећу игру: они наизменично повлаче по један потез, а у сваком потезу дозвољено је премештање једног произвољног жетона на произвољно слободно поље лево од тренутног положаја жетона. Игру губи играч који не може да одигра потез. Доказати да Аца може да победи без обзира на Бранкову игру.

4. [13] Доказати да постоји природан број N са наредном особином: за сваки број $n > N$ могуће је произвољну коцку разрезати на n коцкица, које не морају бити међусобно подударне. Пронаћи барем један такав број N.

5. [25] У једном селу има неколико слободних девојака и неколико слободних момака. Свака од девојака има листу момака за које би желела да се уда. Испоставило се да, ма како изабрали k девојака, за било које k, на њиховим листама постоји барем k различитих момака. Доказати да је могуће направити такав распоред, да се свака девојка уда за неког момка са своје листе (моногамија се подразумева!).

Резултат се рачуна на основу четири задатка на којима је студент освојио највећи број поена. Максималан број поена који је могуће освојити је 45.

Домаћи:

6. [5] Нека је f конвексна функција на интервалу (a, b) (тј. за свако $x, y \in (a, b)$ и $\lambda \in [0, 1]$ важи: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$). Доказати *Јенсенову неједнакост*: ако су $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ненегативни реални бројеви такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ и $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$, тада је:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

Време за рад 240 минута.

Сваки задатак **детаљно образложити!**