ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА 1

Први колоквијум - 12.12.2017.

1. [10] Колико има 20-тоцифрених бројева у којима се не појављује цифра 0, а свака од цифара $1, 2, ..., 9$ се појављује барем једном?

2. [11] Одредити који комплексни бројеви одговарају теменима правилног шестоугла конструисаног у комплексној равни, ако се два његова дијаметрално супротна темена налазе у тачкама $2 + 4i$ и $-4 + 2i$.

3. [11] На сваком пољу табле 10×10 налази се по једна куглице. Куглице у првој врсти су жуте, куглице у другој врсти су зелене, итд. куглице у десетој врсти су плаве (у свакој врсти је другачија боја). На свим куглицама у првој колони урезан је број 1, на свим куглицама у другој колони урезан је број 2, итд. на куглицама у десетој колони урезан је број 10.

а) На колико начина можемо одабрати 5 различитих куглица са табле?

б) На колико начина можемо одабрати 5 куглица тако да никоје две куглице не буду исте боје и немају на себи исте бројеве?

в) Киша је пала и спрала је боју са свих куглица на табли. Према томе, куглице у истој колони се сада не разликују међусобно. На колико начина можемо одабрати 10, не обавезно различитих, куглица са табле?

4. [13] Скуп $A \subseteq \mathbb{N}$ називамо *задовољавајући* ако има особину да се сваки број $1, 2, ..., 2017$ може приказати у облику:

$$\pm b_1 \pm b_2 \pm ... \pm b_k,$$

при чему су $b_1, b_2, ..., b_k$ различити елементи скупа A, и $k \geq 1$. Колико најмање елемената може садржати један задовољавајући скуп?

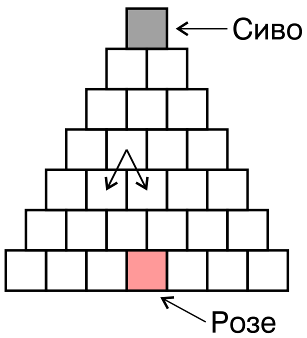
Домаћи:

5. [8] На сивом квадратићу на фигури доле налази се жетон. У сваком потезу жетон можемо преместити на ред за један ниже, лево или десно (као што показују стрелице).

а) На колико различитих начина можемо довести жетон на најнижи ред?

б) На колико различитих начина можемо довести жетон на розе квадратић у најнижем реду?

в) Решити проблем под б) и када фигура има 2017 редова.



Време за рад: четири часа.

Сваки задатак **детаљно образложити!**

Скице решења

1. Нека је A_i скуп 20-тоцифрених бројева који у себи немају цифру i, ни цифру 0. Број 20-тоцифрених бројева без нуле је 9^{20}, а решење задатка је: $9^{20} - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_9|$. Да би нашли $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_9|$ користимо принцип укључења-искључења, при чему су кардиналности пресека: $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (9-k)^{20}$. Итд.

Честа грешка: Не можемо прво да сместимо по једну цифру $1, 2, ..., 9$, а да осталих 11 цифара бирамо произвољно, јер тада има превише понављања. Рецимо, на тај начин би број: 11111111111123456789 рачунали 11 пута, јер смо на 11 начина могли да га добијемо тако што прво фиксирамо цифре $1, 2, 3, ..., 9$, а онда попунимо остатак.

2. Центар шестоугла се налази у комплексном броју $o = \frac{1}{2}((2+4i)+(-4+2i)) = -1+3i$. Нека је шестоугао $ABCDEF$, са центром у O и нека су дате $a = 2+4i$ и $d = -4+2i$. Вектор $\vec{OB}$ добија се од вектора $\vec{OA}$ ротацијом за $60°$, значи: $b - o = (a - o) \cdot cis\ \frac{\pi}{3}$. Дакле, тачка B се налази у: $-1 + 3i + ((2+4i) - (-1+3i)) \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$, итд.

Напомена: Сва тачна предата решења нису била оваква, већ су користила чињеницу да се тачке налазе на једнаком растојању једна од друге (наравно, не свих шест, већ три по три), па се на тај начин срачунају бројеви.

3. а) Решење је само $\binom{100}{5}$, јер имамо 100 куглица и треба да одаберемо 5.

б) Решење је $\binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot 5!$, што је исто као и $\binom{10}{5} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, односно исто као и $10^2 \cdot 9^2 \cdot 8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{5!}$. Образложење: најпре одаберемо боје на куглицама, то можемо урадити на $\binom{10}{5}$ начина. Када фиксирамо жељену колекцију боја: b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, од куглица боје b_1 можемо изабрати било коју, дакле 10 могућности, затим од куглица боје b_2 сада остаје 9 могућности, итд. Другачије: За прву куглицу можемо да узмемо било коју куглицу са табле, па имамо 10^2 могућности. За другу куглицу преостаје 9^2 куглица (не долазе у обзир куглице изабране боје, са изабраним бројем, од осталих 9 боја и 9 бројева долази у обзир било која комбинација), итд. Добијамо $10^2 \cdot 9^2 \cdot 8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2$, али овако смо сваки избор куглица рачунали 5! пута уместо само једном, јер смо избор истих куглица у другачијем редоследу рачунали као различите изборе. Зато овај производ треба поделити са 5!. Другачије: можемо се определити најпре за боје, затим за бројеве, а затим за начин да укрстимо изабране боје и бројеве. У том случају долазимо до $\binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot 5!$.

в) Пошто се куглице по колонама не разликују, ако са x_i обележимо колико смо куглица узели из колоне i, број начина за одабир 10 куглица једнак је заправо броју уређених 10-торки $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ ненегативних целих бројева за које важи: $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 10$. Њих има $\binom{19}{10}$ па је то и решење.

4. Задовољавајући скуп може имати најмање 8 елемената. Један задовољавајући скуп је $A = \{1, 3, 3^2, ..., 3^7\}$. Како то видимо: сваки број $1, 2, ..., 2017$ се може записати као збир $c_0 + c_1 \cdot 3^2 + ... + c_6 \cdot 3^6$, где су $c_i \in \{0, 1, 2\}$ (то је заправо његов запис у бази 3). Ако ниједан c_i није једнак 2, онда то управо даје и његово представљање преко елемената скупа A на дозвољен начин. Ако су неки c_i једнаки 2, онда то представљање можемо кориговати тиме што је дозвољено и одузимати елементе из скупа A. Рецимо, $n = 2122101_{(3)} = 1 + 3^2 - 3^3 - 3^5 + 3^7$. (Ово наравно треба појаснити шта се тачно ради у општем случају).

Докажимо да не постоји задовољавајући скуп са мање од 8 елемената. Нека је $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ задовољавајући скуп. Сваки број који можемо на описан начин представити преко елемената скупа A изгледа овако: $e_1 \cdot a_1 + e_2 \cdot a_2 + ... + e_k \cdot a_k$, где су $e_i \in \{-1, 0, 1\}$. Пошто за сваки e_i имамо 3 могућности, оваквих бројева има, највише, 3^k (неки могу и да се понављају). Од тога, најмање један од њих једнак је нули (онај када су сви e_i једнаки 0), према томе највише $3^k - 1$ је ненула. Како за сваки број који овако може да се представи, важи да се и његов супротан број може овако представити, највише њих $\frac{3^k-1}{2}$ су позитивни. Закључак: ако A има k елемената, на описан начин од тих k елемената можемо добити највише $\frac{3^k-1}{2}$ позитивних бројева. Ако је $k < 8$, онда је $\frac{3^k-1}{2} < 2017$, па задовољавајући скуп не може имати мање од 8 елемената.

5. Свако кретање жетона од врха до последњег реда може да се представи низом слова: $LDDLLL$. То значи да се жетон најпре померио Лево, затим Десно, затим Десно, и онда Лево, Лево, Лево, Лево.
а) Број начина да жетон са врха доведемо на последњи ред је број низова дужине 6 од слова L и D. Њих има 2^6.
б) Број начина да жетон доведемо у розе квадратић је број низова дужине 6 од слова L и D у којима имамо три слова L и три слова D. То је $\binom{6}{3} = 20$.
в) Исто као под б), само што сада имамо низ дужине 2016 у коме треба да буде 1008 слова L и 1008 слова D. Таквих низова има $\binom{2016}{1008}$.

Напомена: Није тешко уочити да, када би за свако поље израчунали број начина да жетон доведемо баш у то поље, добили би Паскалов троугао, односно, шему биномних коефицијената. То се дешава због тога што је број начина да жетон доведемо у извесно поље једнак збиру броја начина за два поља непосредно изнад посматраног поља.