

# ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА 1

Други колоквијум - 30.01.2017.

1. [10] На шаховску таблу је стављено 17 краљева. Доказати да се барем два постављена краља нападају.

(Легенда: шаховска табла је димензије  $8 \times 8$ ; ако таблу замислимо као матрицу, краљеви који стоје на пољу  $(i, j)$  и  $(x, y)$  се нападају ако  $|i - x| \leq 1$  и  $|j - y| \leq 1$ .)

2. [11] Фибоначијев низ  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  дефинисан је са:  $f_1 = f_2 = 1$  и  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ .

а) Доказати да за сваки природан број  $n$  важи:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$ .

б) Доказати да за свака два природна броја  $n$  и  $m$  важи:  $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$ .

3. [11] Нека је  $B$  природан број већи од 2 и нека је  $n = \overline{12\dots(B-3)(B-2)}_{(B)}$ . Одредити збир цифара броја  $n \cdot (B-1)$  у бази  $B$ .

4. [13] Два играча, Аца и Бранко, наизменично бирају по један број из скупа  $\{1, 2, 3, \dots, 2017\}$  док не изабере и последњи број, с тим што Аца игра први. Уколико је на крају игре збир одабраних бројева неког играча дељив са 3, онда је он изгубио. Да ли неко од играча има победничку стратегију?

5. [Домаћи] [5] Бројеви  $1, 2, \dots, 2016$  записани су у систему са основом 3. Колико је палиндрома добијено?

Време за рад 240 минута.

Сваки задатак **детаљно образложити!**

# ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА 1

Други колоквијум - 30.01.2017.

1. [10] На шаховску таблу је стављено 17 краљева. Доказати да се барем два постављена краља нападају.

(Легенда: шаховска табла је димензије  $8 \times 8$ ; ако таблу замислимо као матрицу, краљеви који стоје на пољу  $(i, j)$  и  $(x, y)$  се нападају ако  $|i - x| \leq 1$  и  $|j - y| \leq 1$ .)

2. [11] Фибоначијев низ  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  дефинисан је са:  $f_1 = f_2 = 1$  и  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ .

а) Доказати да за сваки природан број  $n$  важи:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}$ .

б) Доказати да за свака два природна броја  $n$  и  $m$  важи:  $f_{n+m+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$ .

3. [11] Нека је  $B$  природан број већи од 2 и нека је  $n = \overline{12\dots(B-3)(B-2)}_{(B)}$ . Одредити збир цифара броја  $n \cdot (B-1)$  у бази  $B$ .

4. [13] Два играча, Аца и Бранко, наизменично бирају по један број из скупа  $\{1, 2, 3, \dots, 2017\}$  док не изабере и последњи број, с тим што Аца игра први. Уколико је на крају игре збир одабраних бројева неког играча дељив са 3, онда је он изгубио. Да ли неко од играча има победничку стратегију?

5. [Домаћи] [5] Бројеви  $1, 2, \dots, 2016$  записани су у систему са основом 3. Колико је палиндрома добијено?

Време за рад 240 минута.

Сваки задатак **детаљно образложити!**