ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА 1

Други колоквијум

1. [10] Нека су $a_1, a_2, ..., a_{2018}$ реални бројеви, такви да је $-1 < a_i \leq 0$, $i = 1, 2, ..., 2018$. Доказати да је:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_{2018}) \geq 1 + a_1 + a_2 + ... + a_{2018}.$$

2. [11] Нека су $a_1, a_2, ..., a_n$ реални бројеви такви да су $a_2, a_3, ..., a_{n+1}$ и $a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}$ различити од нуле. Уколико је $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, доказати да је:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}}\right)^n = \frac{a_1}{a_{n+1}}.$$

3. [11] Нека су (a, b) и (x, y) две целобројне тачке. Доказати:

$$|ay - bx| = 1 \quad \text{ако и само ако} \quad \{\lambda_1(a, b) + \lambda_2(x, y) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2.$$

4. [13] Доказати да се свака мрежа од $n \geq 5$ градова може повезати једносмерним авионским линијама тако да се из сваког града може стићи у сваки други град са највише једним преседањем.

Домаћи:

5. [8] Да ли постоји правилан осмоугао чија су темена тачке целобројне решетке?

Време за рад: четири часа.

Сваки задатак **детаљно образложити!**