

Комбинаторика - први део

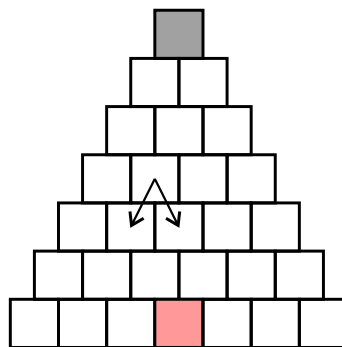
1. На колико начина елементе скупа $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ можемо поређати у низ дужине k ако:
 - а) елементи низа не морају бити различити?
 - б) елементи низа морају бити међусобно различити?
2. Колико k -елементних подскупа има скуп $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$?
3. Колико се петоцифрених бројева, са различитим цифрама, може саставити од цифара 0, 1, 2, 3, 4?
4. Колико има петоцифрених бројева којима је производ цифара паран?
5. а) На колико начина се могу распоредити у низ n нула и k јединица?
б) На колико начина се могу распоредити у низ n нула и k јединица тако да никоје две јединице нису суседне?
в) Решити задатак под а) и б) под претпоставком да се јединице и нуле међусобно разликују: рецимо нека је дато n црних куглица на којима пишу бројеви од 1 до n (или рецимо n дечака), и k белих куглица на којима пишу бројеви од 1 до k (или рецимо k девојчица), и нека су захтеви исти за црне и беле куглице као што су за јединице и нуле.
6. У равни је дато n тачака. Колико је правих одређено тим тачкама ако:
 - а) никоје три нису колинеарне?
 - б) m тачака припадају једној правој, а међу осталим $n - m$ тачака никоје три нису колинеарне и никоје две нису колинеарне са неком од првих m тачака?
7. Колико делилаца има природан број n чија је канонска факторизација $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$?
8. Колико подскупа има скуп од n елемената? Доказати да важи:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Задаци за домаћи

9. На колико начина можемо да поставимо 8 жетона на таблу 8×8 уколико:
 - 1) Сви жетони су међусобно различити и на сваком пољу може бити највише један жетон;
 - 2) Сви жетони су исти и на сваком пољу може бити највише један жетон;
 - 3) Сви жетони су исти и у свакој врсти и свакој колони мора бити тачно један жетон;
 - 4) Сви жетони су међусобно различити и у свакој врсти и свакој колони мора бити тачно један жетон.
10. Нека је $n \geq 3$ природан број. Колико има n -тоцифрених бројева:
 - 1) У којима су сваке две суседне цифре различите?
 - 2) Који садрже тачно једну цифру 5 и тачно једну цифру 7?
 - 3) Чија је водећа цифра непарна а збир последње две цифре је 13?
11. На колико начина се могу распоредити у низ n дечака и k девојчица тако да се између сваке две девојчице налазе барем двојица дечака? (Дечаци се међусобно разликују и девојчице се међусобно разликују.)

12. На сивом квадратићу на фигури десно налази се жетон. У сваком потезу жетон можемо преместити на ред за један ниже, лево или десно (као што показују стрелице). На колико различитих начина можемо довести жетон на најнижи ред? На колико различитих начина можемо довести жетон на розе квадратић у најнижем реду? Решити проблем и када фигура има произвољан (непаран) број редова.



13. На страницама троугла ABC уочено је неколико тачака различитих од темена троугла и то: на страници AB – n тачака, на страници BC – m тачака и на страници AC – p тачака. Нека је P укупан број правих одређен уоченим тачкама (рачунајући и праве одређене страницама троугла) а T укупан број троуглова. Ако је $T = P$, колико је $m + n + p$?

14. Колико има уређених тројки (A, B, C) подскупова скупа $X = \{1, 2, \dots, n\}$ за које важи:

- 1) $A \cup B \cup C = X$; 2) $A \cap B \cap C = \emptyset$; 3) $A \cup B \cup C = X$ и $A \cap B \cap C = \emptyset$;
- 4) $A \subseteq B \subseteq C$; 5) $\emptyset \neq A \subsetneq B \subsetneq C \subsetneq X$.