Принцип укључења–искључења

1. У једном граду живи 47 преводилаца са енглеског, 20 са француског и 35 са немачког језика. Њих 12 преводе и са енглеског и са француског, њих 23 преводе и са енглеског и са немачког, а њих 11 преводе и са француског и са немачког језика. Колико укупно преводилаца живи у том граду, ако њих 5 преводе са сва три језика? Колико преводилаца преводи са барем два језика?

2. Колико природних бројева мањих или једнаких 1000 су дељиви барем једним од бројева: $10, 15, 25$?

3. (**Број пермутација без фиксних тачака**) Нека p_n представља број начина да распоредимо бројеве $1, 2, ..., n$ у низ $(a_1, a_2, ..., a_n)$, али тако да за свако $i = \overline{1, n}$ важи $i \neq a_i$. Одредити p_n и, ако постоји, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p_n}{n!}$.

4. (**Број сурјективних пресликавања**) Колико функција $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., m\}$ су сурјекције?

5. Колико речи можемо саставити од слова К,О,М,Б,И,Н,А,Т,О,Р,И,К,А ако никоја два иста слова не смеју да стоје једно поред другог (морамо употребити сва слова; реч не мора имати смисла)?

Задаци за домаћи

6. Колико има природних бројева не већих од 10^6 који нису дељиви ниједним од бројева $2, 3$ и 5? А који нису дељиви ниједним од бројева $2, 3, 5, 7$?

7. На колико начина се у низ могу поређати 3 Американца, 3 Енглеза и 3 Руса, тако да никоја три земљака не стоје заједно?

8. На колико начина можемо обојити 10 столица које стоје у једном реду, помоћу црвене, жуте, зелене и беле боје, уколико је потребно да сваку боју искористимо барем једном?

9. Колико има 2017-цифрених бројева у чијем декадном запису учествују тачно четири ненула цифре?

10. Ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја n, доказати да је број природних бројева мањих или једнаких n који су узајамно прости са n једнак $\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)...(1 - 1/p_k)$.