Комплексни бројеви

1. Одредити $Re(z), Im(z), \overline{z}$ и $|z|$, ако је $z = \dfrac{7-4i}{3+2i}$.

2. Израчунати $(1+i)^{2014}$.

3. Одредити реалне бројеве x и y ако је $\dfrac{x-3}{3+i} + \dfrac{y-3}{3-i} = i$.

4. Одредити све комплексне бројеве z такве да је $z^3 = 1$.

5. Нека су z_1 и z_2 комплексни бројеви, такви да је $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ и $|z_1| = |z_2| = 1$. Одредити $|z_1 - z_2|$.

6. Да ли постоји комплексан број $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, такав да су скупови

$$\{(z+i)^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \text{ и } \{(z-i)^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

коначни?

7. Шта у комплексној равни представљају тачке које одговарају комплексним бројевима из скупа $\{z \ : \ |z+1| = 5\}$?

8. Одредити $\min\{|z| \ : \ |z+4-3i| = 1\}$.

9. За произвољне реалне бројеве α и β, доказати да је $(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)(\cos\beta + i \cdot \sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i \cdot \sin(\alpha+\beta)$. За произвољан реалан број ϕ и природан број n, доказати да је $(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)^n = \cos n\phi + i \cdot \sin n\phi$.

10. Нека је $z \neq 0$ произвољан комплексан број. Доказати да постоји јединствени реалан број $\varphi \in [0, 2\pi)$ такав да је $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Доказати да је $z = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, за неко $r > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, ако и само ако је $|z| = r$ и $\varphi - \alpha = 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$.

11. Представити у тригонометријском облику бројеве: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 5i,\ \frac{1}{r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)},\ r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ 1 + \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha,\ \alpha \in (-\pi, \pi)$.

12. Уколико тачка A у комплексној равни одговара комплексном броју z, како добијамо тачку B која одговара комплексном броју αz, уколико је:
а) $\alpha \in \mathbb{R}$;
б) $\alpha = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$;
в) α је произвољан комплексан број?

13. Уколико је $a = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),\ \rho > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi)$ и $n \in \mathbb{N},\ n > 1$, одредити сва решења једначине $z^n = a$. Доказати да тачке које одговарају решењима ове једначине чине темена правилног многоугла уписаног у центрирану кружницу полупречника $\sqrt[n]{\rho}$.

14. Одредити све шесте корене броја $1 + i$.

Задаци за домаћи

15. Нека је $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$. Доказати да за свако $|z| = 1$ важи $\left|\dfrac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| = 1$.

16. Нека су z_1, z_2 и z_3 комплексни бројеви за које важи: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

а) Доказати да тачке које одговарају бројевима z_1, z_2 и z_3 у комплексној равни чине темена једнакостраничног троугла ако и само ако важи $z_1 + z_2 + z_3 = 0$;

б) Доказати да ако је $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, да је онда и $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

17. Квадрат $ABCD$ са центром у тачки O конструисан је у комплексној равни. Ако тачки A одговара број $z_A = -1 + 4i$, а тачки O одговара број $z_O = 1 + 3i$, који комплексни бројеви одговарају преосталим теменима?

18. Нека је $a = 2 + i$ и $b = 4 + 3i$. Одредити комплексне бројеве c такве да тачке које одговарају бројевима a, b, c у комплексној равни чине једнакостраничан троугао.

19. Ако је $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| = |z-i|\}$ и $B = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-4i| = 1\}$, одредити минимум израза $|z_1 - z_2|$, $z_1 \in A$, $z_2 \in B$.

---

20. Колико има уређених парова реалних бројева (a, b) таквих да је $(a+ib)^{2017} = a-ib$?

21. Нека су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сва решења једначине $z^n = 1$, у комплексним бројевима. Доказати да је:

$$\alpha_1^k + \alpha_2^k + ... + \alpha_n^k = \begin{cases} n, & \text{ако} \quad n|k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

22. Обележимо са U_n скуп n-тих корена броја 1.
а) Доказати да је $(U_n, \cdot)$ циклична група и описати све генераторе ове групе;
б) Доказати да је $U_n \cap U_m = U_{(n,m)}$.

23. Одредити аргумент броја $(-3 + 4i)^{10}$.