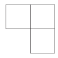
5 Различити типови математичке индукције

1. Нека је n природан број. Доказати да је $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n} < 2$.

2. Из табле формата $2^n \times 2^n$ избачено је једно јединично поље. Доказати да се остатак табле може поплочати користећи фигурицу са слике  (дозвољено је ротирати фигурицу).

3. Доказати да за сваки природан број n важи $2^n > n$. Доказати да за сваки природан број $n \geq 4$ важи $2^n > n^2$.

4. Доказати да је сваки природан број збир различитих степена двојке.

5. Доказати да за сваки природан број m постоји природан број k тако да важи $m = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm k^2$ за погодан избор знакова $+$ и $-$.

6. Перица има неколико бокала са водом, тако да је у свим бокалима укупно 2^{2018} литара воде, а запремина сваког бокала већа је од 2^{2018} литара. Уколико бокал A садржи барем онолико литара воде колико и бокал B, Перица може у једном потезу да пребаци из бокала A у бокал B онолико воде колико је већ у бокалу B. Доказати да без обзира на почетни распоред воде по бокалима, Перица може са неколико потеза да сву воду пресипе у један бокал.

7. Нека су $a_1, a_2, ..., a_n$ ненегативни реални бројеви. Доказати да важи неједнакост:

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}.$$

8. Извршена је произвољна тријангулација правилног 2018-тоугла. Доказати да се добијени троуглови могу обојити црном и белом бојом, тако да троуглови са заједничком ивицом увек буду обојени различитим бојама.

9. На колико начина можемо распоредити бројеве $1, 2, 3$ у низ дужине 2018 али тако да искористимо паран број јединица?

10. Ако су m и n природни бројеви, при чему је m непаран, доказати да $2^{n+2} | m^{2^n} - 1$.

Задаци за домаћи:

11. Доказати да за сваки природан број n важи:

- $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$;
- $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$;
- $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} < 1$; за $n > 1$;
- $\sin\alpha + \sin(2\alpha) + ... + \sin(n\alpha) = \frac{\sin[(n+1)\frac{\alpha}{2}]\sin(n\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

12. Доказати да је сваки природан број већи од 1 или прост или производ простих бројева.

13. а) Нека је P правилан многоугао са $3n$ темена. Доказати да је могуће извршити тријангулацију[1] многоугла P тако да је свако теме многоугла уједно и теме непарног броја троуглова те тријангулације.
б) Нека је P правилан многоугао са бројем темена који није дељив са 3. Доказати да је могуће извршити тријангулацију многоугла P тако да су тачно два темена многоугла уједно и темена парног броја троуглова те тријангулације.

14. Нека је f конвексна функција на интервалу (a, b) (тј. за свако $x, y \in (a, b)$ и $\lambda \in [0, 1]$ важи: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$). Доказати *Јенсенову неједнакост*: ако су $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ненегативни реални бројеви такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ и $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$, тада је:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

15. На столу се налази гомила од $n > 1$ каменчића. У једном потезу, та гомила се раздвоји на две гомиле, величина a и b и запише се производ $a \cdot b$. Затим се исти поступак понавља са свим гомилама које се налазе на столу: у сваком потезу, нека гомила која има више од једног каменчића подели се на две гомиле и запише се производ количина каменчића на тим гомилама. Након последњег потеза, добијамо n гомила са по једним каменчићем на свакој.
а) Показати да, без обзира на начин дељења гомила, увек запишемо исти број производа.
б) Показати да, без обзира на начин дељења гомила, збир записаних производа је увек исти.

16. Низ бројева $a_0, a_1, a_2, ...$ дефинисан је на следећи начин: $a_0 = 9$, $a_{n+1} = 4a_n^3 + 3a_n^4$, $n \in \mathbb{N}$. Доказати да број a_{10} у свом декадном запису садржи више од 1000 цифара 9.

[1] Тријангулација многоугла је подела многоугла дијагоналама на троуглове, такве да свака два троугла имају дисјунктну унутрашњост и да су темена троуглова уједно и темена многоугла.