

### Matematika 3 - Prvi domaći zadatak

1. Dokazati da funkcija

$$f = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nema graničnu vrednost u tački  $(0, 0)$ .

2. Izračunati graničnu vrednost:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^4}}}{x^2 + y^4}$ .

3. Izračunati graničnu vrednost:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)x^2y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$ .

4. Dodefinisati funkciju  $f = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$  do neprekidnosti u tački  $(0, 0)$ .

5. Dokazati da je funkcija  $f(x, y) = \sin \frac{1}{x^2+y^2}$  neprekidna na skupu  $E = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq r^2\}$ , ali da nije ravnomerno neprekidna.

6. Dokazati ravnomernu neprekidnost funkcije  $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ .

7. Dokazati da funkcija  $z(x, y) = x^y y^x$  zadovoljava jednačinu

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (x + y + \ln z)z.$$

8. Dokazati da je izvod funkcije  $z(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$  po ma kom pravcu u tački  $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$  jednak nuli.

9. Dokazati da je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

diferencijabilna, ali nije neprekidno diferencijabilna na  $\mathbb{R}^2$ .

10. Dokazati da je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

neprekidna na  $\mathbb{R}^2$ , da u svakoj tački iz  $\mathbb{R}^2$  ima izvod po ma kom pravcu, ali da nije diferencijabilna na  $\mathbb{R}^2$ .

11. Dokazati da funkcija  $z = \arctan \frac{u}{v}$ , gde je  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$$

12. Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije  $z = x^3 + y^3 - 3axy$ .
13. Naći lokalne ekstremne vrednosti funkcije  $z = xy \ln(x^2 + y^2)$ .
14. Naći uslovne ekstremne vrednosti funkcije  $z = e^{xy}$ , pri uslovu  $x + y = a$ .