GREŠKE MERENJA FIZIČKIH VELIČINA

U osnovi prirodnih nauka, pa i fizike, leže merenja. Rezultat merenja se izražava
- brojnom vrednošću, koja pokazuje koliko je puta merena veličina veća ili manja od izbrane jedinice mere i
- izabranom jedinicom mere date fizičke veličine.

Merenje brojnih vrednosti fizičkih veličina je neizbežno vezano za mnogobroje grešake. U nastavku ćemo razmotriti te greške, kao i metode obrade rezultata merenja. Njihovo poznavanje je neophodno da bi iz sveukupnosti merenja mogli odrediti rezultat najbliži stvarnoj vrednosti, kao i primetiti propuste i greške. U skladu sa tim se mogu organizovati merenja, odnosno korigovati metode i postupci merenja da bi greška bila što manja i pravilno procenjena.

Merenja i greške merenja

Svaki rezultat merenja fizičkih veličina može biti poznat samo sa određenom sigurnošću. Neizvesnost vrednosti fizičke veličine izražava se pomoću grešaka. Greške merenja nije moguće egzaktno odrediti, one se uvek procenjuju. Metode procene grešaka se razlikuju kod direktnih i indirektnih merenja.

Direktna merenja su merenja koja se vrše pomoću mernih instrumenata koji mere upravo traženu veličinu. Kod njih se rezultat dobija jednim očitavanjem na skali mernog instrumenta. Na primer, direktno se masa meri terazijama, vreme štopericom, dužina metrom, zapremina menzurom i sl.

Indirektna merenja su merenja kod kojih se rezultat dobija iz više direktnih merenja. Pri tome se rezultat dobija izračunavanjima pomoću formula koje povezuju traženu veličinu sa direktno merenim veličinama. Na primer, indirektno se meri srednja brzina tela tako što se izmere pređeni put i vreme za koje ga telo pređe, pa se iskoristi odgovarajuća formula. Indirektno se meri zapremina kocke tako što se direktnim merenjima izmere njene strane, pa se zapremina izračuna po odgovarajućoj formuli.

Potpun zapis rezultata merenja, odnosno, brojne vrednosti fizičke veličine, pored izmerene brojne vrednosti sadrži i procenjenu apsolutnu grešku merenja.

Apsolutna greška Δx je procenjena neizvesnost u vrednosti fizičke veličine x, data u apsolutnom iznosu. Ona se izražava istim jedinicama kao merena veličina.

Relativna greška je:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x}, \qquad (1)$$

i često se izražava u procentima. Vrednost x je najbolja procena tačne vrednosti fizičke veličine, ili prosto - vrednost fizičke veličine. Rezultat merenja obavezno sadrži i apsolutnu grešku i piše se najčešće u obliku:

$$x \pm \Delta x. \qquad (2)$$

Kod direktnih merenja za najbolju procenu tačne vrednosti najčešće se uzima srednja vrednost rezultata više ponovljenih merenja iste veličine. Ako je izvršeno n merenja, pri čemu su izmerene vrednosti $x_1, x_2, ..., x_n$, tada je:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} . \qquad (3)$$

Procena je bolja ako se merenje ponovi više puta. Merenje treba ponavljati samo ako to ima smisla. Merenja se ponavljaju tako da obuhvate što više različitih rezultata, prema očekivanju eksperimentatora. Kod jednostavnijih merenja se najčešće vrši 3 do 5 merenja.

Primer: Dužinu tanke žice metarskom trakom ima smisla meriti samo jednom, ali prečnik valjka treba meriti više puta i to na različitim mestima po visini, pri cemu valjak treba zarotirati svaki put oko ose.

Kod indirektnih merenja za najbolju procenu tačne vrednosti uzima se vrednost dobijena tako što se u formulu po kojoj se računa tražena veličina uvrste najbolje procenjene vrednosti veličina iz formule.

Napomena: Rezultati merenja se najčešće izražavaju u obliku kao u formuli (2), ali ponekada izražavaju i u obliku:

$$x(\Delta x) . \qquad (4)$$

Ovaj način prikazivanja rezultata, koristi se samo u nekim oblastima fizike, za prikazivanje rezultata merenja. Pogodan je za prikaz rezultata sa velikim brojem sigurnih cifara.

Primer

$$x = (1.4562 \pm 0.0004)\, nm \qquad \text{ili} \qquad x = 1.4562(4)\, nm$$

Ako uz brojnu vrednost fizičke veličine nije navedena greška, podrazumeva se da ona ima isti red veličine kao poslednja cifra navedena u brojnoj vrednosti.

Primer:

Ako je rezultat merenja napisan u obliku $l = 934 mm$ znači da je apsolutna greška merenja nekoliko milimetara (reda veličine milimetra).

Ako je rezultat merenja napisan u obliku $m = 2.32\, kg$ ili $m = 1.20\, kg$ znači da je apsolutna greška merenja nekoliko stotih delova (reda veličine stotih delova) kilograma.

Kod nekih fizičkih veličina (gravitaciona konstanta, ubrzanje Zemljine teže i dr.), kao i kod nekih matematičkih veličina (π, $\sqrt{2}$ i dr.) pouzdano je poznato više cifara nego što se koristi pri uobičajenim izračunavanjima. U ovom slučaju greška korišćene brojne vrednosti je jednaka polovini reda veličine poslednje cifre, kao najveća greška koja može nastati pri zaokruživanju.

Primer: Ubrzanje Zemljine teže na površini mora i na geografskoj širini 45° iznosi $g = 9.80665\, m/s^2$. U zadacima se ono obično daje zaokruženo na dve decimale, kao $g = 9.81\, m/s^2$, tj. sa poslednjom cifrom reda veličine stotih delova. Najveća greška koju možemo učiniti korišćenjem ove vrednosti, nastala zbog zaokruživanja tačnije vrednosti, iznosi $\Delta g = 0.005\ m/s^2$.

Grube greške - previdi

U navedene greške merenja ne smeju biti uključene tako zvane gube greške ili previdi, koji nastaju usled nesmotrenosti eksperimentatora ili neuspravnosti mernih uređaja. Ove greške se moraju eliminisati, odnosno, ako se ustanovi njihovo postojanje merenje ili račun se moraju ponoviti.

U grube greške spadaju, na primer, neispravno određena vrednost podeoka na skali instrumenta, pogrešno zapisane jedinice izmerene veličine, korišćenje neodgovarajućih formula, računske greške i sl.

Slučajne greške

Slučajne greške su greške koje menjaju znak i veličinu od jednog do drugog merenja. Ove greške se određuju ponavljanjem eksperimenta više puta pod istim uslovima. Praktično je neophodno uvek izvršiti najmanje tri merenja svih direktno merenih veličina.

Ako se rezultati tih merenja poklapaju, merenje treba prekinuti. Ako se rezultati tih merenja razlikuju, neophodno je potražiti uzrok. Često merni uređaj nije ispravan; loše učvršćen, električni kontakti loši i sl. U tom slučaju se uređaj mora popraviti i merenje ponoviti.

Ako nije moguće odrediti uzroke razlike među pojedinim rezultatima merenja, merenja treba ponoviti više puta i zapisati sve dobijene rezultate. Merenja treba ponoviti utiliko više puta ukoliko je razlika među ovim rezultatima veća, a ako ona nije velika (najčešći slučaj), dovoljna su tri merenja. O načinu procene greške ovakvih merenja biće reči kasnije.

Do slučajnih grešaka mogu dovesti nepredvidive varijacije u erksperimentalnim uslovima, kao što su temperatura, atmosferski pritisak, vlažnost, potresi, varijacije napona u mreži i sl.

Uzrok različitih rezultata merenja može biti i u prirodi merene veličine. Na primer, predmeti nisu savršeno izrađeni, pa se njihove dimenzije mogu razlikovati ako se merenje vrši na više mesta. U prirodi nekih slučajnih fizičkih veličina je da se njihova brojna vrednost razlikuje od merenja do merenja. Zato se broj kosmičkih čestica koje padaju na merni uređaj (npr. Gajger-Milerov brojač) u jednoj minuti znatno razlikuje od merenja do merenja (čak i za nekoliko desetina ili stotina).

Sistematske greške

Sistematske greške imaju isti znak pri ponovljenim merenjima, tj. daju uvek veću, ili manju vrednost merene veličine od stvarne. One su najčešće posledica nesavršenosti mernih uređaja.

Sistematske greške je često moguće otkriti ili čak predvideti, pa je moguće izvršiti odgovarajuću korekciju rezultata merenja.

Primeri:

Zbog nejednakosti kraka terazija merena masa će biti veća ili manja od stvarne. Zato masu treba meriti dva puta terazijama, tako da tegovi i mereno telo zamene položaje, a za izmerenu masu uzeti srednju vrednost dobijenih rezultata.

Zbog neodgovarajuće veličine podeoka na skalama mernih uređaja, izmerena brojna vrednost će biti veća ili manja od stvarne. Na primer, dužina merne trake zavisi od temperature, pa ako se meri dužina na temperaturi različitoj od temperature na kojoj su određeni podeoci, izmerena dužina će se razlikovati od stvarne. Međutim, ako se poznaje koeficijent linearnog širenja materijala od koga je traka napravljena i izmeri temperatura na kojoj je dužina merena, može se odrediti stvarna vrednost njenih podeoka.

Veoma čest uzrok sistematske greške je u neslaganju stavarne nule mernog instrumenta sa instrumentalnom nulom (označenom na instrumentu). Zbog toga je potrebno pre merenja odrediti položaj stvarne nule instrumenta.

Procena grešaka direktnih merenja

Apsolutna greška direktnog merenja fizičke veličine ne može biti manja od najmanje vrednosti koja se pouzdano može izmeriti datim instrumentom ($\Delta x_{\min}$) u konkretnim uslovima merenja. Nazvaćemo je **apsolutna greška instrumenta**.

Apsolutna greška mernog instrumenta, ili način njenog određivanja, su najčešće označeni na njemu ili u tehničkoj specifikaciji. Navešćemo nekoliko takvih primera, zbog lakšeg snalaženja u razumevanju ovih oznaka.

Primer 1

Apsolutna greška mernog instrumenta označena kao vrednost najmanjeg podeoka na skali. Napomena: često se vrednost najmanjeg podeoka naziva tačnost instrumenta, što nije u skladu sa jezičkim smilom ove reči. Po tome metarska traka, koja ima tačnost 1 mm, u odnosu na nonijus tačnosti 0.01 mm ima veću tačnost, iako je jasno da meri sa većom greškom, tj. manje tačno!

Primer 2 (Uobičajen kod digitalnih mernih instrumenata)

Apsolutna greška mernog instrumenta se računa po formuli

$$\Delta x = kx + nx_{min},$$

gde je k data klasa tačnosti mernog instrumenta x izmerena vrednost i x_{min} vrednost poslednje cifre. n je najčešće jedan, i ako nije naglašeno drugačije , tako ga treba i uzeti.
Veoma često je klasa tačnosti instrumenta različita za različite opsege merenja iste fizičke veličine, kao i za merenje različitih fizičkih veličina multimetra.

Displeji veoma osetljivih digitalnih mernih instrumenata mogu pokazivati više redova cifara koje se menjaju. Recimo da se ne menjaju cifre jedinica, desetih i stotih delova, cifra hiljaditih delova se menja između dve vrednosti, ili se ne menja, dok se cifra desetohiljaditih delova menja veoma brzo, a stohiljaditih delova menja tako brzo da vidimo samo da to mesto treperi, i ne prepoznajemo cifre. U tom slučaju treba uzeti $x_{\min} = 0.001$ jedinica merne veličine.

Na primer, neka je meren napon digitalnim univerzalnim mernim instrumentom klase tačnosti $k = 0.01$ (1%). Ništa drugo nije naglašeno u upustvu. Izmeren je napon 1.345 V. Očigledno je vrednost poslednje cifre 0.001 V, pa greška merenja napona iznosi:

$$\Delta U = 0.01 \cdot 1.345\,V + 0.001 = 0.01445\,,$$

a rezultat se može napisati u obliku:

$$U = (1.34 \pm 0.02)\,\mathrm{V}\,.$$

Primer 4 (Uobičajen kod analognih mernih instrumenata, kao što su multimetri starije generacije)

Apsolutna greška mernog instrumenta se računa po formuli

$$\Delta x = kx_0 + \frac{x_{min}}{10},$$

gde je k data klasa tačnosti mernog instrumenta, x_0 maksimalna vrednost koja se može izmeriti korišćenim instrumentom (ako instrument ima više opsega, maksimalna vrednost koja se može izmeriti korišćenim opsegom), x_{min} vrednost najmanjeg podeoka skale instrumenta.

Na primer, neka je merena struja univerzalnim mernim instrumentom klase tačnosti $k = 0.02$ (2%). Izmerena je struja 9.35 mA, pri čemu je korišćen opseg kojim se može meriti struja do 20 mA čija odgovarajuća skala instrumenta ima 50 podeoka.

Očigledno je vrednost najmanjeg podeoka $10\,mA : 100 = 0.1\,mA$, pa greška merenja struje iznosi:

$$\Delta I = 0.02 \cdot 10\,mA + 0.1\,mA : 10 = 0.21\,mA,$$

a rezultat se može napisati u obliku:

$$I = (9.4 \pm 0.3)\,mA.$$

Ako apsolutna greška mernog instrumenta, ili način njenog određivanja, nisu označeni na njemu ili u tehničkoj specifikaciji, kod instrumenata sa skalom se u najvećem broju slučajeva može uzeti da je ona jednaka vrednosti najmanjeg podeoka na skali instrumenta. Ako je veličina najmanjeg podeoka na skali velika (naprimer podeok širok 2 - 3 mm) i položaj na njoj dobro definisan (kazaljka tanka, sa ogledalom ispod, i sl.) za najmanju grešku direktnog merenja se može uzeti deo tog podeoka koji se može pouzdano odrediti (prema proceni ekperimentatora). Najčešće se uzima da je jednaka polovini vrednosti tog podeoka. Ako je položaj na skali teško odrediti (na primer, sitni podeoci na manometru sa živom koja ima zakrivljen meniskus) za minimalnu apsolutnu grešku direktnog merenja može se uzeti i više od vrednosti jednog podeoka, prema proceni eksperimentatora.

Apsolutna greška direktnih merenja je najčešće veća od pomenute apsolutne greške mernog instrumenta i može da se proceni na više načina. Ako je izvršen relativno veliki broj merenja, za procenu se koriste statističke metode. Ako je broj merenja mali, kao kod jednostavnijih merenja, apsolutna greška je jednaka najvećem odstupanju, po apsolutnoj vrednosti, pojedinačnih rezultata x_i od srednje vrednosti x_s, odnosno, $|x_i - x_s|_{\max}$, ali ne može biti manja od apsolutne greške mernog instrumenta.

Pretpostavimo, u naredna tri primera, da smo merili dužinu mernim instrumentom čija je vrednost najmanjeg podeoka 0.01 mm, što smo procenili i apsolutnu grešku mernog instrumenta $\Delta x_{\min}$. Izrazimo pra-vilno rezultate merenja.

Primer 1:

$$x_1 = 5.26\text{ mm} \qquad x_2 = 5.28\text{ mm} \qquad x_3 = 5.31\text{ mm}$$

$$x_s \approx 5.283\,mm, \quad |x_i - x_s|_{\max} \approx 0.027\,mm, \quad \Delta x = |x_i - x_s|_{\max} = 0.03\,mm,$$

pa je rezultat merenja:

$$x = (5.28 \pm 0.03)\,mm.$$

Primer 2:

$x_1 = 5.26$ mm $\quad x_2 = 5.27$ mm $\quad x_3 = 5.26$ mm

$x_s \approx 5.263\ mm \quad |x_i - x_s|_{\max} = 0.003\ mm \quad \Delta x = \Delta x_{\min} = 0.01\ mm$,

pa je rezultat merenja:

$$x = (5.26 \pm 0.01)\ mm\ .$$

Primer 3:

$x_1 = 5.26$ mm $\quad x_2 = 5.26$ mm $\quad x_3 = 5.26$ mm

$x_s = 5.26$ mm $\quad |x_i - x_s|_{\max} = 0 \quad \Delta x = \Delta x_{\min} = 0.01\ mm$,

pa je rezultat merenja:

$$x = (5.28 \pm 0.01)\ mm\ .$$

<u>Procena grešaka indirektnih merenja</u>

Za najbolju procenu tačne vrednosti indirektno merene fizičke veličine uzima se vrednost koja se dobija uvrštavanjem u odgovarajuću formulu vrednosti direktno merenih veličina.

Greške indirektno merenih fizičkih veličina procenjuju se različitim metodama. Najčešće se koristi metod diferencijalnog računa. Za razumevanje ovog principa, potrebno je znanje matematike koje prevazilazi znanja učenika osnovnih i srednjih škola. U tabeli su prikazana najvažnija pravila za procenu grešaka indirektno merenih veličina ovom metodom.

Tabela 1. Pregled pravila za procenu grešaka indirektnih merenja metodom diferencijalnog računa

Broj	Formula	Apsolutna greška	Relativna greška
1	$y = const \cdot x_1$	$\Delta y = const \cdot \Delta x_1$	$\delta_y = \delta_{x1}$
2	$y = x_1 + x_2 + ... + x_n$ $y = x_1 - x_2 - ... - x_n$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + .. +$	$\delta_y = \frac{\Delta y}{y}$
3	$y = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ $y = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k}{x_{k+1} \cdot ... \cdot x_n}$	$\Delta y = y\delta_y$	$\delta_y = \delta_{x1} + \delta_{x2} + ... +$
4	$y = x_1^p$	$\Delta y = y\delta_y$	$\delta_y = p\delta_{x1}$
5	$y = \sqrt[p]{x_1}$	$\Delta y = y\delta_y$	$\delta_y = \frac{1}{p}\delta_{x1}$

Pretpostavimo da su, direktno ili indirektno, izmerene fizičke veličine $x_1, x_2, ..., x_n$, da su njihove apsolutne greške $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, a relativne greške $\delta_{x1}, \delta_{x2}, ..., \delta_{x_n}$. U tabeli 1 su date apsolutne i relativne greške indirektno merene fizičke veličine *y*, koja je nekom formulom, datom u prvoj koloni, povezana sa ovim fizičkim veličinama.

Pretpostavimo u svim narednim primerima da su merene fizičke vrličine (direktno ili indirektno) *x,* y i *z*, i određene njihove brojne vrednosti sa odgovarajućim greškama Δx, Δy i Δz. na primer, neka je:

$$x = (7.5 \pm 0.1)\, s\,, \quad y = (0.045 \pm 0.002)\, m\,, \quad z = (54{,}0 \pm 0.5)\,\frac{s}{m}\,.$$

Odredimo izraze za greške indirektno merene veličine *f*, ako se ona iz ovih veličina može odrediti korišćenjem određene formule.

Primer 1

Neka je indirektno merena veličina data formulom:

$$f = \frac{2x}{y}\,.$$

Pošto je indirektno merena veličina data u obliku količnika, primenićemo pravilo za količnik grešaka (kolona 2 u tabeli 1):

$$\delta_f = \delta_{2x} + \delta_y\,.$$

Prvi sabirak predstavlja grešku konstantom pomnožene veličine, pa je prema koloni 1 u tabeli 1:

$$\delta_{2x} = \delta_x\,,$$

pa je:

$$\delta_f = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\,,$$

odnosno:

$$\Delta f = f\delta_f = \frac{2x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{2 \cdot 7.5\ s}{0.045\ m}\left(\frac{0.1}{7.5} + \frac{0.002}{0.045}\right) \approx 19.3\,\frac{s}{m}\,.$$

Pošto je:

$$f = \frac{2x}{y} = \frac{2 \cdot 7.5\ s}{0.045\ m} \approx 333.3\,\frac{s}{m}\,,$$

pa rezultat treba napisati u obliku:

$$f = (330 \pm 20)\,\frac{s}{m}\,.$$

Primer 2

Neka je indirektno merena veličina data formulom:

$$f = 3x + \pi yz\,,$$

gde je p Ludolfov broj.

Pošto se formula sastoji od dva sabirka primenićemo pravilo za zbir grešaka (kolona 2 u tabeli 1):

$$\Delta f = \Delta(3x) + \Delta(\pi yz)\,.$$

Prvi sabirak je greška proizvoda konstante i merene velićine, pa je prema koloni 1 u tabeli 1:

$$\Delta(3x) = 3\Delta x\,,$$

dok je drugi sabirak proizvod tri veličine, pa je prema koloni 3 u tabeli 1:

$$\delta_{\pi yz} = \delta_\pi + \delta_y + \delta_z = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\,,$$

odnosno:

$$\Delta(\pi yz) = \pi yz\,\delta_{\pi yz} = \pi yz\left(\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\right).$$

Pošto je očigledno greška veličine y skoro 4%, greška Ludolfovog broja je zanemariva. Naime, ako ga znamo do druge decimale kao $\pi = 3.14$, tada je $\Delta\pi = 0.005$, manje od 0.2%. Konačno, greška indirektno merene veličine f iznosi:

$$\Delta f = 3\Delta x + \pi yz\left(\frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\right) = 3 \cdot 0.1\ s + 3.14 \cdot 0.045\ m \cdot 54\ \frac{s}{m}\left(\frac{0.002}{0.045} + \frac{0.5}{54}\right) \approx 0.71\ s\,,$$

a pošto je:

$$f = 3 \cdot 7.5\ s + 3.14 \cdot 0.045\ m \cdot 54\ \frac{s}{m} \approx 30.13\ s\,,$$

to se rezultat može napisati u obliku:

$$f = (30.1 \pm 0.7)\ s \qquad \text{ili} \qquad f = (30.1 \pm 0.8)\ s$$

Primer 3

Neka je indirektno merena veličina data formulom:

$$f = \sqrt{\frac{z}{x^3 y}}\,.$$

Pošto je tražena veličina data korenim izrazom, primenićemo pravilo u koloni 5 tabele 1, pa je

$$\delta_f = \frac{1}{2}\delta_{\frac{z}{x^3 y}}\,.$$

Relativnu grešku potkorenog izraza, tražimo kao gršku proizvoda i količnika. Prema koloni 3 tabele 1, ona iznosi

$$\delta_{\frac{z}{x^3 y}} = \delta_z + \delta_{x^3} + \delta_y\,,$$

gde je drugi sabirak, kao relativna greška trećeg stepena, prema koloni 4 tabele 1

$$\delta_{x^3} = 3\delta_x$$

pa je:

$$\delta_f = \frac{1}{2}\left(\delta_z + 3\delta_x + \delta_y\right).$$

Apsolutna greška tražene veličine iznosi:

$$\Delta f = f\delta_f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x^3 y}}\left(\delta_z + 3\delta_x + \delta_y\right)$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x^3 y}}\left(\frac{\Delta z}{z} + 3\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{54\ \frac{s}{m}}{(7.5\ s)^3\, 0.045\ m}}\left(\frac{0.5}{54} + 3\frac{0.1}{7.5} + \frac{0.002}{0.045}\right) \approx 0.079\ \frac{1}{s}$$

Pošto je

$$f = \sqrt{\frac{z}{x^3 y}} = \sqrt{\frac{54\ \frac{s}{m}}{(7.5\ s)^3\, 0.045\ m}} \approx 1.687\ \frac{1}{s}$$

to se rezultat može napisati u obliku:

$$f = (1.69 \pm 0.08)\frac{1}{s}\,.$$

Grafička obrada rezultata merenja

Rezultate složenijih i više puta ponovljenih merenja treba prikazati u tabelama. Iz tabela ponekad nije lako utvrditi odnose između prikazanih fizičkih veličina, pa se često koristi grafički prikaz rezultata merenja. Njime se prvenstveno:
- utvrđuju nepoznate relacije između merenih veličina,
- proveravaju teorije i
- određuju brojne vrednosti nekih fizičkih veličina.

Ako je poznata zavisnost između veličina prikazanih na grafiku, sa grafika se može videti uspešnost merenja. Lako se mogu uočiti eksperimentalne tačke koje odstupaju od grafika, pa je moguće ponoviti merenja koja njima odgovaraju. Na grafiku se mogu uočiti minimumi, maksimumi, prevojne tačke, i sl., iz kojih se nekada mogu odrediti tražene fizičke veličine.

Grafik se često koristi za indirektno određivanje neke fizičke veličine, ako je određena zavisnost između drugih merenih veličina. U ove svrhe se grafik najčešće koristi u obradi rezultata školskih eksperimenata.

Pravila za crtanje grafika

Za crtanje grafika koriste se različiti papiri. Govorićemo samo o milimetarskim papirima formata A_4, koji se koriste u obradi rezultata merenja u osnovnim i srednjim školama. Dimenzije ovakvih grafika mogu biti maskimalno $250\,mm \times 170\,mm$.

Koordinatne ose treba crtati po ivicama milimetarskog papira. Po pravilu, na apscisu se nanosi nezavisno promenljiva, a na ordinatu zavisno promenljiva veličina. Razmera se bira tako da je ispunjen što veći prostor raspoloživog papira. Pri tome je često bolje da preseci koordinatnih osa ne budu u koordinatnom početku. Međutim, treba biti veoma pažljiv, jer to nekada može dovesti do grube greške. Na primer, ako je sa grafika linearne zavisnosti potrebno odrediti presek sa ordinatom, apscisa mora da počinje od nule. Papir treba okrenuti tako da grafik što više ispunjava raspoloživi papir, odnosno, potrebno je pravilno odabrati koju veličinu treba naneti na dužu, a koju na kraću osu.

Da bi nanošenje i očitavanje vrednosti sa grafika bilo lako, 1 mm na milimetar-skom papiru može da odgovara

... 0.05 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.4; 0.5 ; 1 ; 2 ; 4; 5; 10 itd.

jedinica veličine koja se prikazuje. Drugim rečima, jedinica veličine koja se prikazuje (ili njen umnožak sa $10^{\pm n}$, gde je n ceo broj) može da bude prikazana sa 1, 2, 2.5, 5, 10, 20, 25, 50, 100 itd. milimetara na milimetarskom papiru. Razmeru 1:4 treba izbegavati. Sve ostale razmere nisu dopuštene. Na primer, jedinica fizičke veličine ne sme biti prikazana na milimetarskom papiru sa 3 mm ili 3 cm (najčešća greška), 6 mm, 7 cm, 12 mm 15 cm i sl.

Na ose se nanose samo ekvidistantne oznake brojnih vrednosti fizičkih veličina. Na ose ne treba pisati brojne vrednosti koje odgovaraju eksperimentalnim tačkama, kao što ne treba povlačiti bilo kakve linije od osa do nanetih tačaka.

Eksperimentalne tačke se označavaju kružićima, krstićima, kvadratićima i sl. Ako je na isti papir naneto više nizova podataka, svaki niz se označava posebnim oznakama. Ove tačke na graficima, u opštem slučaju, moraju biti unete sa odgovarajućim apsolutnim greškama prikazanih veličina. Ne unose se apsolutne greške samo ako su manje od vrednosti najmanjeg odgovarajućeg podeoka grafika.

Ako su fizička veličina i njena greška prikazane u istoj tabeli, moraju biti izražene sa istim eksponentom. Ako je brojna vrednost fizičke veličine koja se unosi u tabelu, ili nanosi na grafik, manja od 0.01, ili veća od 100, potrebno ju je izraziti u eksponencijalnom obliku. Pri tome se često čine greške u mestu pisanja eksponenta, što dovodi do velike greške u prikazu rezultata, veće od 10.000 puta. U tabelama 1b i 1c prikazana su dva ispravna zapisa rezultata merenja datih u tabeli 1a. Nepravilno je u zaglavlju tabele 1b napisati $t \cdot 10^{-2}[\mathrm{s}]$.

Tabela 1.

$t\,[\mathrm{s}]$
0.012
0.015
0.018
0.023

$t \cdot 10^{2}[\mathrm{s}]$
1.2
1.5
1.8
2.3

$t\,[10^{-2}\,\mathrm{s}]$
1.2
1.5
1.8
2.3

Linearizacija grafika

Najlakše je analizirati zavisnost između fizičkih veličina, ili njihovih algebarskih kombinacija, ako između njih postoji linearna veza.

Veliki broj školskih eksperimenata može biti obrađen analizom linearnih zavisnosti, pa će njima biti posvećena posebna pažnja.

Linearna funkcija ima oblik:

$$y = ax + b\,,$$

gde su a i b konstante, parametri funkcije. Grafik linearne funkcije je prava linija koja ima nagib a i odsečak na y-osi b. Odsečak grafika na x-osi (apsolutna vrednost koordinate presečne tačke sa x-osom) iznosi $-b/a$.

Grafik se kroz eksperimentalne tačke povlači tako da, po oceni eksperimentatora, tačke u celini minimalno odstupaju od njega. Merenja koja odgovaraju eksperimentalnim tačkama, koje u okviru svojih grešaka ne dodiruju grafik, treba ponoviti. Ovakva odstupanja su često posledica grubih grešaka (previda) u merenju, ili loše procene greške navedene tačke.

Tražene fizičke veličine se najčešće određuju iz jednog od parametara posmatrane linearne zavisnosti: koeficijenta pravca, odsečka na x ili y-osi.

Koeficijent pravca linerane zavisnosti a određuje se sa grafika iz koordinata dveju njegovih tačaka. Prva tačka $A(x_A, y_A)$ uzima se između prve i druge eksperimentalne tačke, a druga $B(x_B, y_B)$ između pretposlednje i poslednje eksperimentalne tačke. Ovaj koeficijent iznosi:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,,$$

a njegova relativna greška:

$$\delta_y = \frac{\Delta y_\mathrm{B} + \Delta y_\mathrm{A}}{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}} + \frac{\Delta x_\mathrm{B} + \Delta x_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}\,,$$

gde su $\Delta x_\mathrm{A}, \Delta x_\mathrm{B}, \Delta y_\mathrm{A}$ i Δy_B apsolutne greške određivanja koordinata x_A, x_B, y_A i y_B sa grafika. Svaka od ovih grešaka je jednaka većoj od odgovarajućih apsolutnih grešaka susednih tačaka. Ni jedna od ovih grešaka ne može biti manja od tačnosti očitavanja koordinata sa grafika, odnosno od vrednosti najmanjeg podeoka (milimetra) na milimetarskom papiru. Na primer, ako je apsolutna greška veličine nanete na apscisu, za obe susedne tačke mala (manja od vrednosti najmanjeg podeoka), pa nije naneta na grafik, tada je apsolutna greška očitavanja odgovarajuće koordinate jednaka vrednosti najmanjeg podeoka na apscisi.

Odsečak na *y*-osi b se lako očitava sa grafika. Za njegovu apsolutnu grešku se najčešće uzimaju najveća od apsolutnih grešaka veličina nanetih na ordinatu, ili apsolutna greška po ordinati, eksperimentalne tačke najbliže *y*-osi. Naravno, ova greška ne može biti manja od vrednosti najmanjeg podeoka na *y*-osi.

Odsečak na *x*-osi $(-b/a)$ lako se određuje iz presečne tačke grafika sa *x*-osom. Pogrešno ga je određivati indirektno, tako što se odrede prvo a i b, jer je greška njegovog određivanja tada mnogo veća, pošto u sebi sadrži greške određivanja pet koordinata. Za apsolutnu grešku određivanja ovog odsečka najčešće se uzimaju najveća od apsolutnih grešaka veličina nanetih na apscisu, ili apsolutna greška po apscisi, eksperimentalne tačke najbliže presečnoj tački grafika sa *x*-osom. Naravno, ova greška ne može biti manja od vrednosti najmanjeg podeoka na *x*- osi.

Ako, i pored teorijskog predviđanja, grafik ne prolazi kroz koordinatni početak, postoji neka, najčešće sistematska, greška u merenju. Nekada se ovakvi eksperimenti moraju ponoviti, a nekada je dovoljno izvršiti korekciju na otkrivenu sistematsku grešku. Ponekad se može ispostaviti da otkrivena sistematska greška ne utiče na traženu fizičku veličinu. U tom slučaju eksperiment ne treba ponavljati, nego samo objasniti uzrok postojanja sistematske greške.

4. Grafici nelinearnih funkcija

Mnoge fizičke veličine mogu biti određene analizom nelinearnih funkcija. Pot-reba za analizom ovakvih eksperimentalnih zavisnosti postoji i u nekim eksperimentima koji se mogu realizovati u školskim uslovima. Veoma različite funkcionalne zavisnosti mogu biti pri tome analizirane. U mnogim slučajevima nije potrebno ni poznavati oblik funkcije koja povezuje posmatrane fizičke veličine. Zbog toga neće biti vršena detaljnija analiza ovakvih grafika. Način određivanja fizičkih veličina sa njih i metode procene grešaka ovakvih merenja se razlikuju od eksperimenta do eksperimenta.

Poznavanje teorijske podloge eksperimenta upućuje na način određivanja tražene fizičke veličine iz nekih parametara grafika. Procena greške merenja mora da se zasniva na objektivnoj proceni eksperimentatora sa kojom je greškom odredio potrebne parametre grafika. Navešćemo dva primera.

1) Merenjem površine ograničene grafikom termodinamičkog ciklusa u *p-V* dijagramu, može se odrediti rad izvršen u toku ciklusa. Način procene greške ovakvog merenja može se videti u zadatku za drugi razred na republičkom takmičenju 1996. godine, odnosno u Zbirci [1].
2) Analizom volt-amper karakteristika triode mogu se odrediti neke fizičke veličine vezane za strujna kola u kojima se triode nalaze. Jedan od primera analize ovakvih grafika dat je u zadatku za drugi razred na saveznom takmičenju 1996. godine, odnosno u Zbirci [1].

5. Primer -– Obrada rezultata merenja modula elastičnosti čelične žice

Merenje je izvršeno uređajem koji proizvodi Laboratorija za razvoj i izradu prototipova učila Fizičkog fakulteta u Beogradu.

Lako je pokazati da, po Hukovom zakonu, važi:

$$l = \frac{4gL}{Ed^2\pi} m = am + b ,$$

odnosno, da je promena dužine zategnute žice *l* linearna funkcija mase tegova *m*, koji je istežu silom svoje težine. Grafik ove funkcije prolazi kroz koordinatni početak ($b = 0$). Moduo elastičnosti je određen merenjem dužine žice *L*, njenog prečnika *d* i koeficijenta pravca u navedenoj zavisnosti *a*.

Dužina žice je merena metarskom trakom, čija je minimalna apsolutna greška merenja (tačnost) 1mm. Procenjeno je da je greška merenja dužine 2 mm. Izmerena je dužina žice: $L = (951 \pm 2)mm = (9.51 \pm 0.02) \cdot 10^2 mm$.

Prečnik žice je meren na 5 ravnomerno raspoređenih mesta po dužini žice, mikrometarskim zavrtnjem tačnosti 0.01 mm. Rezultati merenja su prikazani u tabeli 2.

Tabela 2.

d_1[mm]	d_2[mm]	d_3[mm]	d_4[mm]	d_5[mm]	d[mm]	Δd[mm]
0.28	0.29	0.29	0.28	0.29	0.29	0.01

Zavisnost promene dužine žice od sile istezanja praćena je opterećivanjem žice tegovima različite mase. Pošto je zanemariva greška mase tegova, zanemariva je i greška njihove težine. Promena dužine žice je merena komparatorom tačnosti 0.001 mm. Komparator je podešen na nulu ($p_0 = 0$) kada žica nije dodatno opterećena (samo zategnuta određenom konstantnom silom). Da bi odredili položaj nule, žica je nekoliko puta opterećivana različitim tegovima i ponovo vraćana u početno stanje. Procenjeno je da je apsolutna greška određivanja ovog položaja $\Delta p_0 = 0.01 mm$. Promena dužine žice određivana je iz razlike pokazivanja komparatora pri zategnutoj žici (*p*) i nezategnutoj žici (p_0), odnosno:

$$l = p - p_0 ,$$

pa je njena apsolutna greška [1-4]:

$$\Delta l = \Delta p + \Delta p_0 .$$

Rezultati merenja su prikazani u tabeli 3. U tabeli 4 su dati primeri izračunavanja pojedinih veličina u tabeli 3, prema pravilima za izračunavanje indirektno merenih veličina, procene njihovih grešaka i načina izražavanja merenih veličina [1,2]. Treba primetiti, između ostalog:

- Da se apsolutne greške zaokružuju na jednu cifru različitu od nule, a brojne vrednosti fizičkih veličina na cifru koja ima isti red veličine kao apsolutna greška.
- Da se brojne vrednosti fizičkih veličina zaokružuju po matematičkim pravilima za zaokruživanje brojeva, a apsolutne greške uvek na više, osim, eventualno ako je sledeća cifra nula.
- Da se pravilno zaokružene brojne vrednosti i greške koriste kada se one eksplicitno izražavaju, samostalno, ili u tabeli. Međutim, ako se brojna vrednost ili greška jedne veličine koristi za izračunavanje neke druge veličine, ili greške (kao međuvrednost), tada se koristi nezaokružena vrednost, ali samo sa jednom cifrom više nego kod zaokružene vrednosti.

Tabela 3.

Br.	m[kg]	p_i[mm]	p[mm]	Δp[mm]	l[mm]	Δl[mm]
1	0.42	0.241 0.257 0.268	0.26	0.02	0.26	0.03
2	0.72	0.490 0.479 0.500	0.49	0.01	0.49	0.02
3	1.00	0.672 0.660 0.683	0.67	0.02	0.67	0.03
4	1.34	0.887 0.880 0.893	0.89	0.01	0.89	0.02
5	1.67	1.110 1.100 1.085	1.10	0.02	1.10	0.03
6	2.00	1.330 1.326 1.334	1.330	0.004	1.33	0.02

Tabela 4.

Br.	p[mm]	Δp[mm]	$\Delta l = \Delta p + \Delta p_0$[mm]
1	$\frac{0.241+0.257+0.268}{3} \approx$ $\approx 0.255 \approx 0.26$	$0.255 - 0.241 =$ $= 0.014 \approx 0.02$	$0.014 + 0.01 =$ $= 0.024 \approx 0.03$
2	$\frac{0.49+0.479+0.500}{3} \approx$ $\approx 0.490 \approx 0.49$	$0.49 - 0.479 =$ $= 0.011 \approx 0.01$	$0.011 + 0.01 =$ $= 0.021 \approx 0.02$
6	$\frac{1.330+1.326+1.334}{3} \approx$ $\approx 1.330 \approx 1.33$	$1.334 - 1.33 =$ $= 0.004 \approx 0.004$	$0.004 + 0.01 =$ $= 0.014 \approx 0.02$

Prema podacima iz tabele 3 nacrtan je grafik. Na grafik su nanete apsolutne greške merenja promene dužine, dok su, kako je ranije rečeno, greške sile koja zateže zicu zanemarive. Primećuje se da se u okviru granica eksperimentalnih grešaka može povući pravac koji prolazi kroz koordinatni početak, što je i očekivano, obzirom da se žica ne može istegnuti bez dodatnog opterećenja. Na grafiku su odabrane dve tačke za određivanje koeficijenta pravca:

tačka A	$m_A = (0.50 \pm 0.01)kg$	$l_A = (0.33 \pm 0.03)mm$
tačka B	$m_B = (1.95 \pm 0.01)kg$	$l_B = (1.29 \pm 0.03)mm$.

Koeficijent pravca posmatrane linearne zavisnosti iznosi:

$$a = \frac{l_B - l_A}{m_B - m_A} = \frac{(1.29 - 0.33)mm}{(1.95 - 0.5)kg} \approx 0.662 \frac{mm}{kg} \approx 0.66 \frac{mm}{kg}$$

$$\Delta a = a\left(\frac{\Delta l_B + \Delta l_A}{l_B - l_A} + \frac{\Delta m_B + \Delta m_A}{m_B - m_A} \right) = 0.662 \frac{mm}{kg} \left(\frac{0.024 + 0.023}{1.29 - 0.33} + \frac{0.01 + 0.01}{1.95 - 0.5} \right) \approx ,$$

$$\approx 042 \frac{mm}{kg} = 0.005 \frac{mm}{kg}$$

pa je moduo elastičnosti:

$$E = \frac{4gL}{d^2\pi} \frac{1}{a} = \frac{4 \cdot 9.81 m/s^2 \cdot 9.51 \cdot 10^2 mm}{(0.287\, mm)^2 \cdot 3.14} \frac{1}{0.662\, mm/kg} \approx 2.18 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2} = \approx 2.2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

$$\Delta E = E\left(\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta a}{a} \right) = 2.18 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \left(\frac{2}{951} + 2\frac{0.01}{0.287} + \frac{0.042}{0.662} \right) \approx 0.3 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

$$E = (2.2 \pm 0.3) \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

Napomena: U opisanom eksperimentu učenici ponekad nepažnjom pomere komparator tako da se pokreće tek ako na žicu deluje određena dodatna sila. U tom slučaju dobijeni grafik ne prolazi kroz koordinatni početak, nego preseca apscisu u pozitivnom delu. Pošto koeficijent pravca zavisi od promene dužine za datu promenu sile zatezanja, eksperiment nije potrebno ponavljati, nego samo objasniti uzrok ove sistematske greške.

Literatura:

1.Mićo M. Mitrović, Zbirka zadataka vezanih za takmičenja iz fizike (1990-1995) I Razred, Beograd, 1999.
Mićo M. Mitrović, Zbirka zadataka vezanih za takmičenja iz fizike (1990-1996) II Razred, Beograd, 1999.
2.S.E. Božin i dr., Praktikum iz fizike, Laboratorijske vežbe, Beograd, 1996.
3.L.L. Goldin i dr., Laboratornie zanjatija po fizike, Nauka, Moskva, 1983.