Osnovne jednačine plazme i ravnoteža

Jednačine polja, struje i napon

- Naelektrisane čestice u plazmi su izložene dejstvu spoljašnjeg električnog i magnetnog polja, ali i same generišu ta polja. Uvodi se pojam samo-usaglašenog sistema čestice + polje, koji je dosta složen za opisivanje!

1. Sudari medju česticama ne zavise od makroskopskih polja. Omogućava da se odredi funkcije raspodela po brzinama naelektrisanih čestica.
2. Funkcije raspodele se usrednjuju preko brzina da bi se dobile jednačine makroskopskog kretanje.
3. Kretanje se odvija u spoljašnjim primenjenim poljima i makroskopskim poljima generisanim usrednjenim kretanjem čestica.
4. Efekat prostorne promene funkcije raspodele dovodi do **sile pritiska** u makroskopskim jednačinama.
5. **Sudari** se manifestuju u procesima nastajanja i gubljenja čestica, kao usrednjena sila trenja između čestica različitih vrsta, i u izmeni energije između njih.

Maksvelove jednačine:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad (2.2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \qquad (2.2.2)$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad (2.2.3)$$

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad (2.2.4)$$

- **E**(**r**, t) i **H**(**r**, t) vektori električnog imagnetnog polja, $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m i $\varepsilon_0 = 8.854\ 10^{-12}$

- Izvori polja, gustina naelektrisanja ρ(r, t) i gustina struje **J**(r, t), su povezani jednačinom kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (2.2.5)$$

Ukupna gustina struje:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{cond}} + \mathbf{J}_{\mathbf{pol}} + \mathbf{J}_{\mathbf{mag}}$$

- $\mathbf{J}_{\mathbf{cond}}$ gustina provodne struje usled kretanja slobodnih naelektrisanja,

- $\mathbf{J}_{\mathbf{pol}}$ gustina polarizacione struje usled kretanja vezanih naelektrisanja u dielektričnom materijalu,
- $\mathbf{J}_{\mathbf{mag}}$ gustina magnetizacione struje usled magnetnih momenata u magnetnim materijalima.

U plazmi u vakuumu $\mathbf{J}_{\mathbf{pol}}$ i $\mathbf{J}_{\mathbf{mag}}$ su jednake nuli $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{cond}}$.

Integracijom jednačine (2.2.5), dobijamo:

$$\frac{dq}{dt} + \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

>> brzina porasta količine naelektrisanja unutar zapremine V određena je ukupnom strujom koja protiče kroz površinu S u V, naelektrisanje je održano.

Uvedimo ukupnu struju u Maksvelovu jednačinu za rotor **H:**

$$\mathbf{J}_T = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \qquad (2.2.7)$$

gde je prvi član gustina struje pomeranja a drugi gustina provodne struje, i nalaženjem divergencije leve i desne strane, dobijamo:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0 \qquad (2.2.8)$$

Ova jednačina se u jednoj dimenziji redukuje na : $\quad dJ_{Tx}/dx = 0,$

Struja je konstantna duž neke konture, odakle sledi prvo Kirhofovo pravilo: $I_{rf} = I_T + I_1$

Ako je vremenska promena magnetnog polja zanemarljiva, kao što je često u slučaju plazme, iz Maksvelovih jednačina sledi

$$\nabla \times \mathbf{E} \approx 0$$

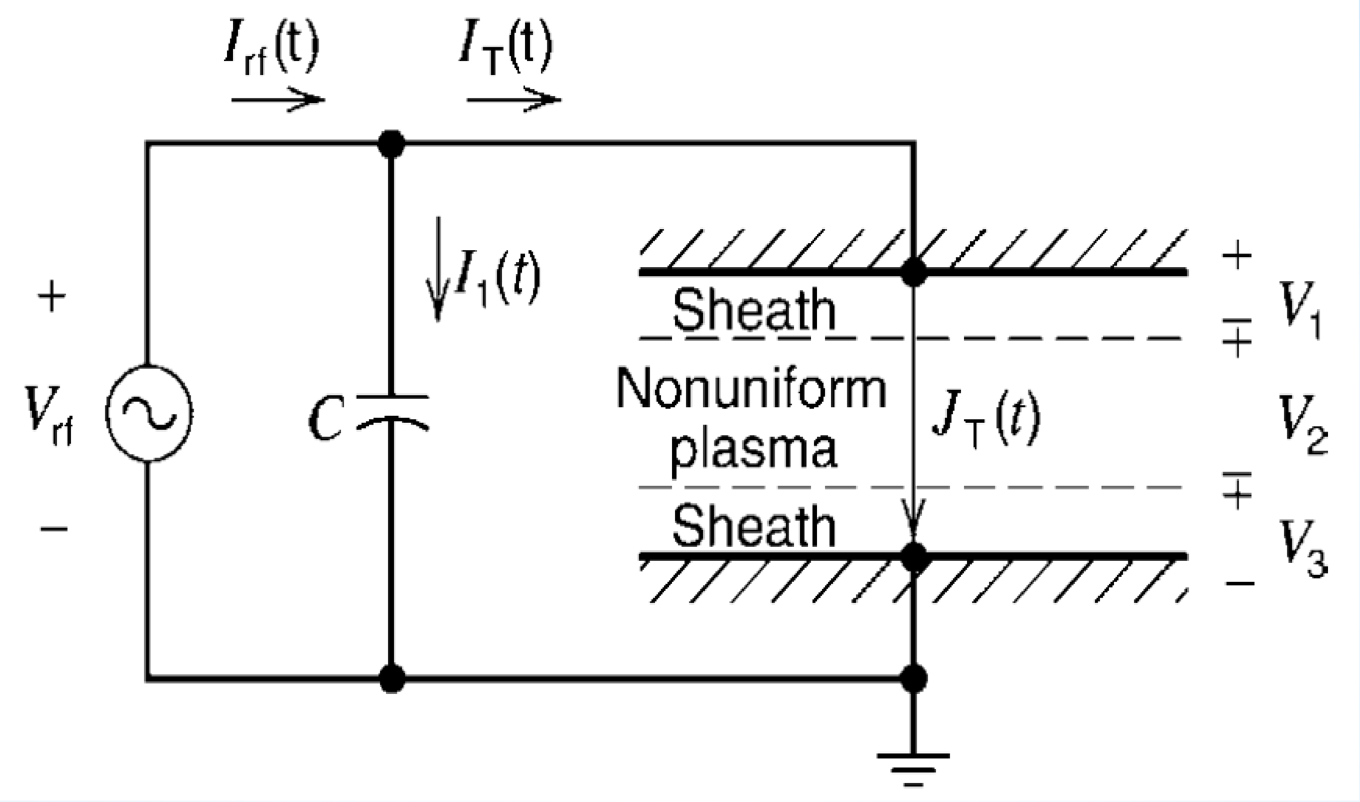
Pošto je rotor gradijenta jednak nuli, sledi da električno polje može biti izvedeno iz gradijenta skalarnog potencijala:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \qquad (2.2.9)$$

Integracijom ove jednačine po proizvoljnoj konturi C dobijamo:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\oint_C \nabla\Phi \cdot d\ell = -\oint_C d\Phi = 0 \qquad (2.2.10)$$

Dobili smo drugo Kirhofovo pravilo: $V_{rf} = V_1 + V_2 + V_3$



Kirchhoff's pravila: Ukupna struja J_T koja protiče kroz neuniformno 1-D pražnjenje je nezavisna od *x*; zbir struja koje ulaze u čvor je jednak nuli ($I_{rf} = I_T + I_1$); zbir padova napona duž konture je jednak nuli ($V_{rf} = V_1 + V_2 + V_3$).

Ako (2.2.9) zamenimo u (2.2.3), dobijamo Poasonovu jednačinu:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (2.2.11)$$

Razmotrimo potencijal u centru (x = 0) između dve uzemljene (Φ = 0) ploče, na međusobnom rastojanju od *l*=10cm, sa uniformnom koncentracijom jona ni=10^{10}cm^{-3}, bez prisustva elektrona koji bi ih neutralizovali. Integracijom Poasonove jednačine, uz granične uslove da je Φ=0 za x=± *l/2* i da je dΦ/dx = 0 za x=0 (zbog simetrije), dobijamo:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{en_i}{\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \Phi = \frac{1}{2}\frac{en_i}{\epsilon_0}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2\right]$$

Maksimalni potencijal u centru bi bio 2.3×10^5V, što je nezamislivo za realna pražnjenja. Dakle, joni moraju biti neutralizovani elektronima, što vodi ka kvazi-elektroneutralnosti u plazmi.

-Sila kojom električno i magnetno polje deluju na naelektrisane čestice je data Lorencovim izrazom:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (2.2.12)$$

gde je **v** brzina čestice, a **B** $=\mu_0$**H** vektor magnetne indukcije.

- Naelektrisane čestice se kreću pod dejstvom Lorenzove sile, a sa druge strane one doprinose gustini naelektrisanja ρ i gustini struje **J** u plazmi, koje generišu **E** i **H** (*B*)**.**

- Ako su ρ i **J** linearne funkcije **E** i **B**, onda su i jednačine polja linearne, što u plazmi, generalno, nije slučaj. Bez obzira na to, linearizacija je moguća u pojedinim slučajevima kada se plazma može posmatrati kao da ima efektivnu dielektričnu konstantu. To jest, da “slobodna naelektrisanja” imaju istu ulogu kao “vezana naelektrisanja” u dielektriku.

Opisivanje dinamike plazme.

- Jedan od načina da se modeluje dinamika plazme u reaktoru je da se strogo računaju trajektorije svake pojedinačne čestice. To nije izvodljivo zbog:

1. Velikig broj čestica 10^{16}-10^{18} m^{-3}
2. Samousaglašenosti polja i čestica!!
3. Čestice učestvuju u sudarima koji menjaju njihove brzine i energije u vrlo kratkim vremenskim periodima!

- Prvi nivo uprošćavanja je uvođenje PIC (particle-in-cell) simulacije. Prate se trajektorije „super-čestica“ kojih ima nekoliko hiljada, vreme i prostor su diskretizovani, polja i trajektorije čestica se računaju iterativno, do dostizanja stacionarnog stanja.

- Analitički pristup, dva pristupa, jedan preko KINETIČKE TEORIJE a drugi preko TEORIJE FLUIDA.

- Kinetički pristup je zasnovan na statističkoj fizici, uvodi se funkcija raspodele čestica po brzinama (energijama) $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$. Njeno poznavanje je neophodno za računanje brzina sudarnih i transportnih procesa.
- Dosta je komplikovana primena ovog pristupa za opisivanje makroskopskih osobina plazme!!!

- Mnoge fundamentalne osobine plazme i pražnjenja se mogu opisati primenom makroskopske teorije fluida (hidrodinamike). Veličine kao što su koncentracija čestica u fluidu, njihova brzina, srednja energija... se dobijaju integracijom f-je raspodele $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ u brzinskom prostoru (po brzinama).

Funkcija raspodele, Bolcmanova jednačina.

- Za date čestice, uvodimo funkciju raspodele $f\,(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ u šestodimenzionom faznom prostoru $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ koji definišu položaji i brzine čestica, sa osobinom:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 v = \text{number of particles inside a six-dimensional phase space volume } \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{d}^3 v \text{ at } (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \text{ at time } t$$

- Šest koordinata $(\mathbf{r},\mathbf{v})$ se posmatraju kao međusobno nezavisne promenljive.

- Ako posmatramo 1D slučaj, kad se čestice pomeraju u faznom prostoru ili se kreću pod dejstvom makroskopskih sila, one ulaze ili izlaze iz fiksirane zapremine $dxdv_x$. Iz tog razloga funkcija raspodele f treba da zadovoljava jednačinu kontinuiteta koja se može izvesti na sledeći način.

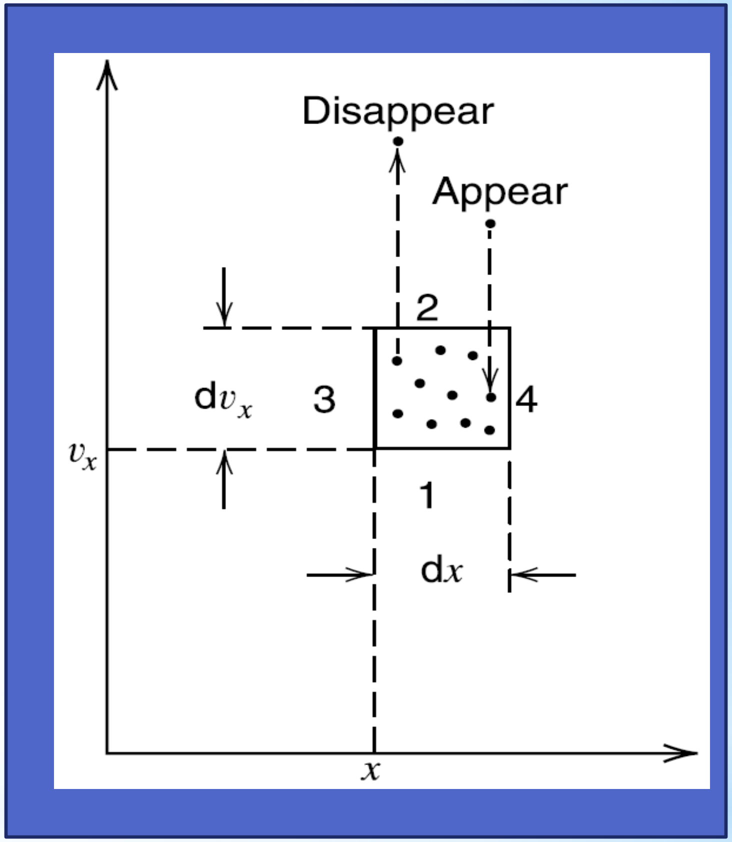
Dakle posmatramo promenu broja čestica unutar fazne zapremine $dxdv_x$ za vreme dt:

$f(x,v_x,t)dx\, a_x(x,v_x,t)dt$ čestica ulaze u $dxdv_x$ kroz stranicu 1

$f(x, v_x+dv_x, t)dx\, a_x(x, v_x+dv_x, t)dt$ čestica izlaze iz $dxdv_x$ kroz stranicu 2

$f(x, v_x, t)\, dv_x v_x\, dt$ čestica ulaze u $dxdv_x$ kroz stranicu 3

$f(x+dx,v_x,t)\, dv_x v_x dt$ čestica izlaze iz $dxdv_x$ kroz stranicu 4



Jednodimenzioni v_x–x fazni prostor, izvođenja Bolcmanove jednačine i promene f-je raspodele f pod uticajem sudara.

Dakle, promena f-je raspodele za vreme dt = (1- 2) + (3 – 4).

$$f(x,v_x,t+dt)dxdv_x - f(x, v_x,t)dxdv_x =$$

$$[f(x,v_x,t)a_x(x,v_x,t) - f(x,v_x+dv_x,t)a_x(x,v_x+dv_x, t)]\, dxdt$$

$$+ [f(x,v_x,t)v_x - f(x+dx, v_x,t)v_x]\, dv_x\, dt$$

Deljenjem sa $dxdv_xdt$ dobijamo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(f v_x) - \frac{\partial}{\partial v_x}(f a_x) \qquad (2.3.1)$$

v_x nezavisno od x i ubrzanje $a_x = F_x/m$ e zavisi od v_x , sledi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_x \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0$$

Generalizacija na 3D:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \vec{a} \cdot \nabla_v f = 0 \qquad (2.3.2)$$

gde su:

$\nabla_r = (\hat{x}\,\partial/\partial x + \hat{y}\,\partial/\partial y + \hat{z}\,\partial/\partial z)$ i $\nabla_v = \left(\hat{x}\partial/\partial v_x + \hat{y}\,\partial/\partial v_y + \hat{z}\,\partial/\partial v_z\right)$

Jednačina (2.3.2) je poznata kao *bezkoliziona Bolcmanova* ili *Vlasova jednačina*.

- Dodatak protoku u ili van fazne zapremine kroz stranice 1- 4, su čestice koje se “trenutno” pojave u ili nestanu iz zapremine usled međučestičnih sudara.

- Te efekte promene *f* uračunavamo na taj način što dodajemo “*kolizioni član*” desnoj strani jednačine (2.3.2), i tako dobijamo *Bolcmanovu jednačinu*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_c \qquad (2.3.3)$$

- Usrednjene veličine, koncentracija čestica, srednja brzina, i gustina energije se zovu makroskopske veličine čestica, a jednačine koje ih opisuju makroskopski zakoni održanja.

- Da bi ih dobili, nalazimo momente funkcije raspodele po brzinam, a zakoni se dobijaju iz momenata Boltzmanove jednačine.

- koncentracija:

$$n\,(\mathbf{r},\mathrm{t}) = \int f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\; d^3v \qquad (2.3.4)$$

- fluks čestica:

$$\boldsymbol{\Gamma}\,(\vec{r},t) = n\vec{u} = \int \vec{v} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) d^3v \qquad (2.3.5)$$

gde je $\vec{u}\ (\vec{r},t)$ je srednja brzina. Kinetička energija čestica po jedinici zapremine:

$$\mathrm{w} = \frac{3}{2}\mathrm{p} + \frac{1}{2}\mathrm{mu}^2\mathrm{n} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\int v^2 f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) d^3v \qquad (2.3.6)$$

gde je $p\ (\vec{r},t)$ izotropni pritisak, koji ćemo definisati kasnije. U ovom obliku *w* je zbir untrašnje energije $\frac{3}{2}\mathrm{p}$ i protoka gustine energije $\frac{1}{2}\mathrm{mu}^2\mathrm{n}$.

Jednačine održanja – fluidne jednačine:

- Set fluidnih jednačina za konstituente plazme se dobija računanjem momenata Bolcmanove jednačine po brzinama.
- Najniži moment Bolzmanove jednačine se dobija njenom integracijom po prostoru brzina. Integracija daje makroskopsku jednačinu kontinuiteta čestica:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = G - L \qquad (2.3.7)$$

- Kolizioni član u (2.3.3) je jednak nuli kada se integrali po brzinama, osim za sudare koji kreiraju ili gube čestice, označenih sa G i L, (e.g., ionization, recombination).
- Član sa silom u Bolcmanovoj jednačini ne doprinosi prvom momentu jer uzima vrednost f-je raspodele za $v = \pm\infty$, gde je vrednost jednaka nuli!

Održanje momenta količine kretanja:

- Da bi se dobila jednačina po **u**, prvi moment se formira množenjem Bolcmanove jednačine sa **v i** integracijom po brzinama. Rezultat je:

$$mn\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right] = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) - \nabla\cdot\mathbf{\Pi} + \mathbf{f}\Big|_c \qquad (2.3.9)$$

Sa leve strane je gustina (*mn*) čestica pomnožena sa konvektivnim izvodom srednje brzine, predstavljajući proizvod gustine i ubrzanja.

-Konvektivni izvod ima dva člana: - prvi član $\partial\mathbf{u}/\partial t$ predstavlja ubrzanje usled vremenske promene **u**;

- drugi član, "inercijalni" $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ predstavlja ubrzanje čak i za slučaj $(\partial/\partial t \equiv 0)$ kada je srednja brzina **u** prostorno promenljiva. Na primer, ako **u**= $x\hat{}u_x(x)$ raste duž x-ose, onda se fluid ubrzava duž x-ose.
- Ekvivalentna je Navier-Stokes-ovoj jednačini u neutralnom fluidu

- Proizvod mase i ubrzanja je određen, sa desne strane, silom koja deluje na čestice.
- Prvi član predstavlja gustinu sile električnog i magnetnog polja.
- Drugi član je gustina sile usled divergencije tenzora pritiska, koji nastaje usled integracije po brzinama:

$$\Pi_{ij} = mn\langle (v_i - u)(v_j - u)\rangle_{\mathrm{v}} \qquad (2.3.10)$$

gde indeksi i, j daju pravac delovanja komponente a $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{v}}$ označava usrednjavanje veličine u zagradama po f.

- Za slabo jonizovanu plazmu se primenjuje izotropna verzija:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \qquad (2.3.11)$$

tako da je:

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \nabla \cdot \mathrm{p} \qquad (2.3.12)$$

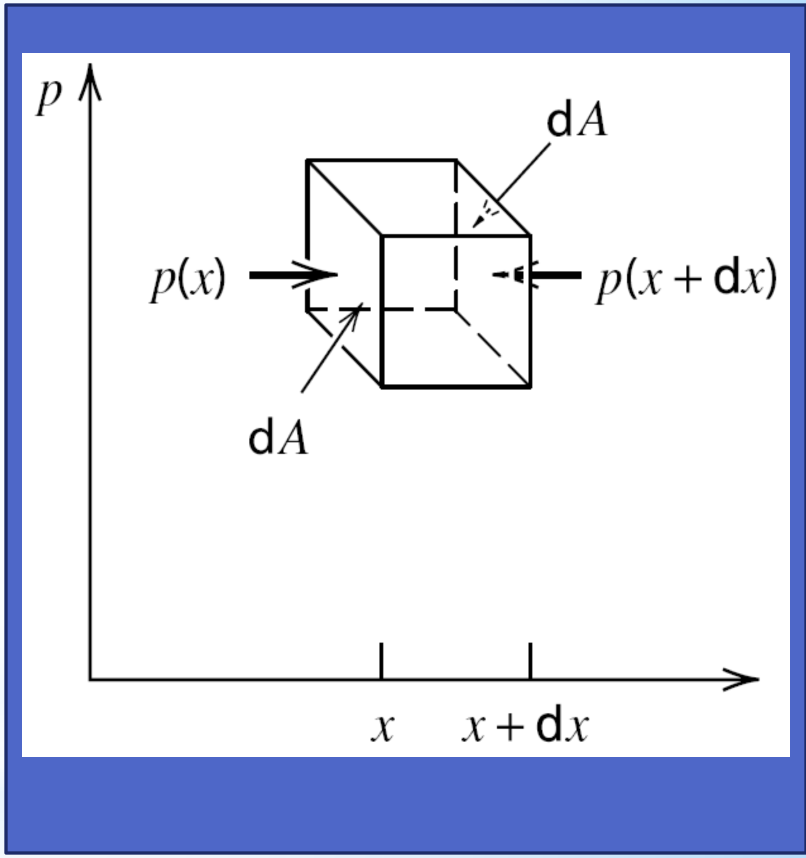
gradijent pritiska, u kome je skalarni pritisak dat sa:

$$\mathrm{p} = \frac{1}{3}\mathrm{mn}\langle (v-u)^2\rangle_{v} \qquad (2.3.13)$$

Fizički, gustina sile usled gradijenta pritiska je ilustrovanana slici.

Mala zapremin fluida je izložena dejstvu pritiska, koji je rastuća funkcija od *x*. Ukupna sila na tu zapreminu (*dAdx*) je *p(x)dA* - *p(x+dx)dA*.

Dakle, sila po jedinici zapremine je -∂p/∂x!!!



Gustina sile uzrokovana gradijentom pritiska.

Treći član sa desne starne u (2.3.9) predstavlja vremensku promenu prenosa impulse po jedinici zapremine usled sudara sa ostalim česticama.

Za elektrone i pozitivne jone najvažniji je prenos impulsa u sudarima sa neutralima. Taj prenos se uobičajno aproksimira Krook-ovim kolizionim operatorom:

$$\mathbf{f}|_{\mathrm{c}} = -\sum_{\beta} mn\nu_{\mathrm{m}\beta}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\beta}). - m(\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\mathrm{G}})G + m(\mathbf{u}-\mathbf{u}_{\mathrm{L}})L \qquad (2.3.14)$$

- $\mathbf{u}_{\beta}$ je srednja brzina čestice vrste β, $\nu_{m\beta}$ je frekvencija za prenos impulse za sudare sa česticama vrste β,
- $\mathbf{u}_G$ i $\mathbf{u}_L$ su srednje brzine novo-kreiranih i izgubljenih čestica.

- $|\mathbf{u}_G| \ll |\mathbf{u}|$ za par kreiran jonizacijom, a $\mathbf{u}_L \approx \mathbf{u}$ za procese gubitka rekombinacijom ili transferom naelektrisanja.

Uopšteni oblik jednačine održanja momenta impulsa se dobija kada se u (2.3.9) zanemari magnetna sila i uzimajući da $\mathbf{u}_\beta=0$ u Krook-ovom kolizionom članu za sudare sa jednom neutralnom vrstom. Rezultat je sada:

$$mn\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right]=qn\mathbf{E}-\nabla p-mn\nu_{\mathrm{m}}\mathbf{u} \qquad (2.3.15)$$

- gde figurišu članovi sa ubrzanjem ($\partial\mathbf{u}/\partial t$), inercijom ($(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$), električnim poljem, gradijentom pritiska i kolizioni član.

- Jednačine (2.3.7) i (2.3.15) zajedno još uvek ne formiraju zatvoren set, pošto je tenzor pritiska $\mathbf{\Pi}$ (ili skalarni pritisak *p*) nije određen. Uobičajna procedura za zatvaranje tog seta jednačina je da se iskoristi termodinamička jednačina stanja da se *p* poveže sa *n*.
- Iz*otermna* relacija za ravnotežnu Maksvelovu raspodelu je:

$$p=nkT \qquad (2.3.16)$$

Tako da je sada:

$$\nabla p = kT\nabla n \qquad (2.3.17)$$

gde je T u (K), a k je Bolcmanov konstanta (k= 1.381×10^{-23} J/K). Važi za spore vremenske promene. U tom slučaju, fluid može da razmeni energiju sa sa svojim okruženjem, i potrebna nam je jednačina za energiju za određivanje p i T.

- Alternativno, adijabatska jednačina stanja je:

$$p = Cn^{\gamma} \qquad (2.3.19)$$

tako da je:

$$\frac{\nabla p}{p} = \gamma \frac{\nabla n}{n} \qquad (2.3.20)$$

- gde je γ odnos specifičnih toplota pri konstantnom pritisku i pri konstantnoj zapremini. $\gamma = 5/3$ za idealan gas; za jedno-dimenziono adijabatsko kretanje je $\gamma = 3$. Adijabatska relacija važi za brze vremenske promene, kao u talasima, kada fluid ne menja energiju sa okruženjem; ovde nije potrebna jednačina održanja energije.

Jednačina održanja energije

Jednačina održanja energije se dobija množenjem Bolcmanove jednačine sa $\frac{1}{2}mv^2$ i integracijom po brzinama. Posle sređivanja dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}p\right) + \nabla \cdot \frac{3}{2}(p\mathbf{u}) + p\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}p\right)\Bigg|_c \qquad (2.3.21)$$

Ovde je: - *3/2p* gustina termalne energije (J/m^3),

- $\nabla \cdot \frac{3}{2}(p\vec{u})$ je makroskopski fluks termalne energije (W/m^2), koji predstavlja protok gustine termalne energije za brzinu fluida ***u***,

- $p\nabla \cdot \vec{u}$ (W/m^3) opisuje grejanje ili hlađenje fluida usled kompresije ili ekspanzije njegove zapremine

- ***q*** je vektor protoka toplote (W/m^2), koji daje makroskopski fluks toplotne energije, i
- sudarni član koji uključuje sve sudarne procese koji menjaju gustinu termalne energije. (Jonizacija, ekscitacija, elastično rasejanje i zagrevanje usled trenja (omskog)).

Jednačine se uobičajno zatvara stavljanjem da je $\boldsymbol{q}$=0 ili uzimanjem da je $q = -\kappa_T \nabla T$, gde je k_T termalna provodnost.

Za mnoga stacionarna pražnjenja makroskopski termalni fluks energije je uravnotežen sa sudarnim procesima, dajući jednostavniju jednačinu:

$$\nabla \cdot \left(\frac{3}{2} p \mathbf{u}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} p\right)\Big|_{\mathrm{c}} \qquad (2.3.22)$$

Ravnotežne raspodele:

Za pojedinačnu vrstu čestica, koje su u termalnoj ravnoteži sa svojom vrstom (npr. elektroni u pražnjenju sa Te), u odsustvu vremenske promene, prostornih gradijenta i ubrzanja, Bolcmanova jednačina se redukuju na oblik:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\mathrm{c}} = 0 \qquad (2.4.1)$$

gde C u indeksu označava sudare čestica sa svojom vrstom.

- Kao rešenje ove jednačine se dobija Maksvelova f-ja raspodele:

$$f(v) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \qquad (2.4.7)$$

Možemo da primenimo sada izraze koje smo dobili za nalaženje srednje brzine:

$$\bar{v} = (m/2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty v \left[\exp\left(-\frac{v^2}{2v_{\text{th}}^2} \right) \right] 4\pi v^2 \, \mathrm{d}v \qquad (2.4.8)$$

odakle dobijamo:

$$\bar{v} = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \qquad (2.4.9)$$

Usmereni fluks u pravcu +z ose, *Γz* se dobija usrednjavanjem komponente

$$\Gamma_z = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^\infty v \cos\theta \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{\text{th}}^2} \right) v^2 \, \mathrm{d}v$$

što daje:

$$\Gamma_z = \frac{1}{4} n \bar{v} \qquad (2.4.10)$$