

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

JUN-2 ~ 02.07.2024.

I DEO ISPITA

1. **[6 poena]** Neka su $x_0, x_i, i = 1, 2, \dots, n$ rešenja kvadratne jednačine $x^2 + a_i x + b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Naći rešenja jednačine

$$x^2 + A_n x + B_n = 0, \quad A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i.$$

2. **[9 poena]** Date su nejednačine

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq a, \quad \sqrt{x^2 + a + 1} - \sqrt{x^2 - a + 1} \leq 1.$$

Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ date nejednačine nemaju zajedničkih rešenja?

3. **[9 poena]** Neka za date brojeve $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ važi $\log_a 2024 + \log_c 2024 = 2 \log_b 2024$. Dokazati

$$\frac{a^2}{b} = a^{\log_c b}.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

JUN-2 ~ 02.07.2024.

I DEO ISPITA

1. **[6 poena]** Neka su $x_0, x_i, i = 1, 2, \dots, n$ rešenja kvadratne jednačine $x^2 + a_i x + b_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Naći rešenja jednačine

$$x^2 + A_n x + B_n = 0, \quad A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i.$$

2. **[9 poena]** Date su nejednačine

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq a, \quad \sqrt{x^2 + a + 1} - \sqrt{x^2 - a + 1} \leq 1.$$

Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ date nejednačine nemaju zajedničkih rešenja?

3. **[9 poena]** Neka za date brojeve $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ važi $\log_a 2024 + \log_c 2024 = 2 \log_b 2024$. Dokazati

$$\frac{a^2}{b} = a^{\log_c b}.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

JUN-2 ~ 02.07.2024.

II DEO ISPITA

1. **[9 poena]** Neka su a, b, c dati realni brojevi za koje važi $a^2 + b^2 \neq 0$ i $c^2 \leq a^2 + b^2$. Ako su α, β rešenja jednačine

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

odrediti skup svih vrednosti izraza $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

2. **[10 poena]** Odrediti oblast vrednosti funkcije

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} + \arcsin(x - 1).$$

3. **[9 poena]** U skupu pozitivnih realnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3^2 \\ x_2 + x_3 &= x_4^2 \\ &\vdots \\ x_{2023} + x_{2024} &= x_1^2 \\ x_{2024} + x_1 &= x_2^2. \end{aligned}$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

JUN-2 ~ 02.07.2024.

1. [11 poena] Date su nejednačine

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq a, \quad \sqrt{x^2 + a + 1} - \sqrt{x^2 - a + 1} \leq 1.$$

Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ date nejednačine nemaju zajedničkih rešenja?

2. [11 poena] Neka za date brojeve $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ važi $\log_a 2024 + \log_c 2024 = 2 \log_b 2024$.
Dokazati

$$\frac{a^2}{b} = a^{\log_c b}.$$

3. [10 poena] Neka su a, b, c dati realni brojevi za koje važi $a^2 + b^2 \neq 0$ i $c^2 \leq a^2 + b^2$. Ako su α, β rešenja jednačine

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

odrediti skup svih vrednosti izraza $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

4. [10 poena] Odrediti oblast vrednosti funkcije

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} + \arcsin(x - 1).$$

5. [10 poena] U skupu pozitivnih realnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3^2 \\ x_2 + x_3 &= x_4^2 \\ &\vdots \\ x_{2023} + x_{2024} &= x_1^2 \\ x_{2024} + x_1 &= x_2^2. \end{aligned}$$