

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

1. OSNOVNI POJMOVI O FUNKCIJAMA

Jedan od najvažnijih pojmova u matematici predstavlja pojam funkcije.

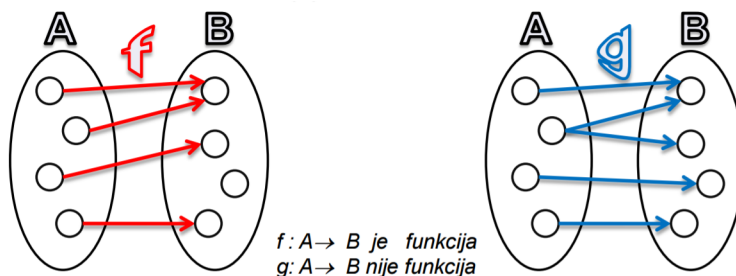
DEFINICIJA 1.1. Neka su X i Y dva neprazna skupa. Funkcija f iz skupa X u skup Y , u oznaci $f : X \rightarrow Y$ ili $X \xrightarrow{f} Y$, je relacija $f \subset X \times Y$, koja ima osobinu da je svaki element skupa X u relaciji sa tačno jednim elementom skupa Y . Dakle, podskup f Dekartovog proizvoda $X \times Y$ koji zadovoljava uslove:

$$(i) \quad (\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x, y) \in f,$$

$$(ii) \quad (\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

naziva se funkcija (preslikavanje) f iz skupa X u skup Y .

Kod funkcija uobičajeno je da umesto $(x, y) \in f$ pišemo $y = f(x)$.

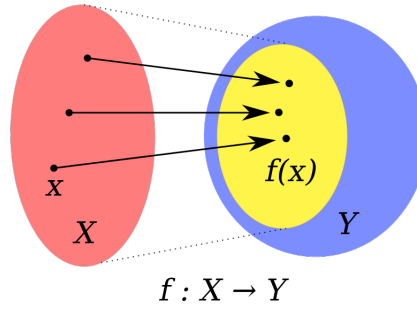


Slika 1:

- Skup X naziva se *domen* ili *oblast definisanosti* funkcije f , označava se sa $\mathcal{D}(f)$ ili $Dom(f)$.
- Skup Y naziva se *kodomen* funkcije f .
- Skup $\mathcal{R}(f) = \{f(x) \mid x \in X\} = f(X) \subseteq Y$ naziva se *oblast vrednosti funkcije* f ili *slika skupa* X funkcijom f .
- Element $x \in X$ naziva se *nezavisno promenljiva* ili *original* ili *argument funkcije*, a $y = f(x) \in Y$ se naziva *zavisno promenljiva* ili *slika elementa* $x \in X$ ili *vrednost funkcije* f u tački x .

Skup G tačaka u Dekartovom koordinatnom sistemu sa koordinatama $(x, f(x))$, $x \in D(f)$ naziva se *grafik funkcije* $y = f(x)$, $x \in D(f)$, tj.

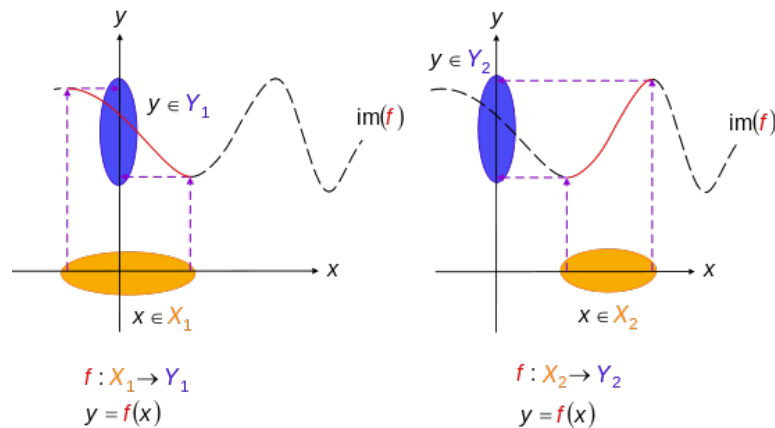
$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}.$$



Slika 2: "plavi skup" je kodomen Y funkcije $f : X \rightarrow Y$, "žuti skup" je oblast vrednosti funkcije f tj. $\mathcal{R}(f) = f(X) \subset Y$

- (i) Grafik funkcije $y = f(x) + a$ može se dobiti translacijom grafika funkcije $y = f(x)$ u pravcu y -ose za vrednost $a > 0$.
- (ii) Grafik funkcije $y = f(x - b)$ može se dobiti translacijom grafika funkcije $y = f(x)$ u pravcu x -ose za vrednost $b > 0$.
- (iii) Grafik funkcije $y = f(-x)$ je simetričan u odnosu na y -osu sa grafikom funkcije $y = f(x)$.
- (iv) Grafik funkcije $y = -f(x)$ je simetričan u odnosu na x -osu sa grafikom funkcije $y = f(x)$.

DEFINICIJA 1.2. Ako je $f : X \rightarrow Y$ i A neprazan podskup skupa X , za funkciju $f_1 : A \rightarrow Y$ definisanu sa $f_1(x) = f(x)$ za svako $x \in A$, kažemo da je **restrikcija** funkcije f na skup A i označavamo sa $f|_A = f_1$. Ako je $f : X \rightarrow Y$ i $X \subset A$, za funkciju $f_2 : A \rightarrow Y$ kažemo da je **proširenje** funkcije f na skup A , ako je $f_2(x) = f(x)$ za svako $x \in X$.



Slika 3: Restrikcija funkcije $f : X \rightarrow Y$ na skup $X_1 \subset X$, odnosno na skup $X_2 \subset X$, pri čemu je $f(X_1) = Y_1$ i $f(X_2) = Y_2$.

1.1. INJEKTIVNA FUNKCIJA, SURJEKTIVNA FUNKCIJA, BIJEKCIJA

DEFINICIJA 1.3. Funkcija $f : X \rightarrow Y$ naziva se:

(1) **injekcija** ("1-1" funkcija) ako za svako $x_1, x_2 \in X$ važi

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(2) **surjekcija** (funkcija "NA") iz skupa X NA skup Y ako i samo ako za svako $y \in Y$ postoji bar jedno $x \in X$ takvo da je $y = f(x)$, tj. ako i samo ako je $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = Y$;

(3) **bijekcija** ako je ona injekcija i surjekcija.

Prema tome, funkcija $f : X \rightarrow Y$ je surjekcija ako i samo ako je $Y \subseteq f(X)$. S obzirom da za funkciju $f : X \rightarrow Y$ važi da je $f(X) \subseteq Y$, zaključujemo da je funkcija f surjekcija ako i samo ako je $f(X) = Y$.

PRIMER 1.1. Ispitati da li su sledeće funkcije "1-1" i "NA":

(a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{3}{2+x^2}$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{x-3}{x+2}$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \frac{2}{3-|x|}$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f_4(x) = e^{2-x}$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_5(2x-1) = 4x^2 - 2x + 1$

REŠENJE. Funkcije f_1, f_3 i $f_5(x) = x^2 + x + 1$ nisu ni "1-1" ni "NA". Funkcija f_2 je "1-1" ali nije "NA". Funkcija f_4 je bijekcija.

Kako je $\mathcal{R}(f_1) = (0, 3/2]$ (videti Primer 1.1A. str.17), funkcija f_1 preslikava skup $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R}$ NA skup $(0, 3/2]$.

Kako je $\mathcal{R}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathbb{Y}$ (videti Primer 1.1A. str.17), funkcija f_2 preslikava skup $\mathbb{X} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ NA skup $\mathbb{Y}$.

Kako je $\mathcal{R}(f_3) = (-\infty, 0) \cup [2/3, +\infty) = \mathbb{Y}$ (videti Primer 1.1A. str.17), funkcija f_3 preslikava skup $\mathbb{X} = \mathcal{D}(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ NA skup $\mathbb{Y}$, tj. $f_3(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$.

Kako je $\mathcal{R}(f_5) = [3/4, +\infty) = \mathbb{Y}$ (videti Primer 1.1A. str.17), funkcija f_5 preslikava skup $\mathbb{X} = \mathcal{D}(f_5) = \mathbb{R}$ NA skup $\mathbb{Y}$, tj. $f_5(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$.

1.2. JEDNAKOST FUNKCIJA

DEFINICIJA 1.4. Funkcije f i g su jednake ako i samo ako:

(1) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = X$;

(2) $f(x) = g(x)$ za svako $x \in X$.

Iz uslova (2) Definicije 1.4. sledi da za jednake funkcije f i g imamo $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$, tj. $f(X) = g(X)$, odnosno njihove oblasti vrednosti su jednake.

PRIMER 1.2. Ispitati da li su sledeće funkcije jednake:

$$(a) f_1(x) = x \text{ i } f_2(x) = \frac{x^2}{x}$$

$$(b) f_1(x) = x \text{ i } f_3(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(c) f_1(x) = x \text{ i } f_4(x) = (\sqrt{x})^2$$

$$(d) f_5(x) = 3^{\log_3 x} \text{ i } f_4(x) = (\sqrt{x})^2$$

REŠENJA: (A) NE — jer je $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R} \neq \mathcal{D}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(B) NE — prvi uslov Definicije 1.4. je zadovoljen, jer je $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R} = \mathcal{D}(f_3)$, ali $f_1(x) = x \neq |x| = f_3(x)$ za svako $x < 0$

(C) NE — jer je $\mathcal{D}(f_1) = \mathbb{R} \neq \mathcal{D}(f_4) = [0, \infty)$.

(D) NE — jer je $\mathcal{D}(f_5) = (0, \infty) \neq \mathcal{D}(f_4) = [0, \infty)$.

1.3. KOMPOZICIJA FUNKCIJA

DEFINICIJA 1.5. Neka je $f : X \rightarrow Y$ i $g : W \rightarrow Z$, pri čemu je $f(X) \subset W$. Svaki element $f(x) \in f(X) \subset W$ funkcija g preslikava u element $g(f(x)) \in Z$. Tada se funkcija $h : X \rightarrow Z$ koja za svako $x \in X$ ima vrednost $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in Z$ naziva **kompozicija funkcija g i f** i označava se sa $g \circ f$.

Dakle, oblast definisanosti kompozicije funkcija $g \circ f$ je

$$\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in X = \mathcal{D}(f) \mid f(x) \in \mathcal{D}(g)\}$$

TEOREMA 1.1. Neka je $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$. Tada važi:

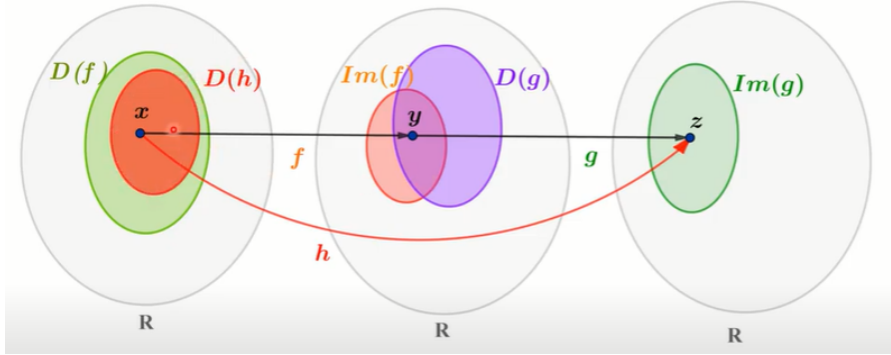
- (i) Ako su f, g injekcije, onda je $g \circ f$ injekcija.
- (ii) Ako su f, g surjekcije, onda je $g \circ f$ surjekcija.
- (iii) Ako je $g \circ f$ injekcija, onda je f injekcija.
- (iv) Ako je $g \circ f$ surjekcija, onda je g surjekcija.

DOKAZ: (i) Neka su f, g injekcije i $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ za $x_1, x_2 \in X$. Tada je $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Kako je g injekcija, važi $f(x_1) = f(x_2)$, a odavde kako je f injekcija važi $x_1 = x_2$. Dakle, $g \circ f$ je injekcija.

(ii) Neka su f, g surjekcije. Tada je $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$, odnosno $g \circ f$ je surjekcija.

(iii) Neka je $g \circ f$ injekcija i $f(x_1) = f(x_2)$ za $x_1, x_2 \in X$. Tada je $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, tj. $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Kako je $g \circ f$ injekcija, zaključujemo da je $x_1 = x_2$, odnosno da je f injekcija.

(iv) Neka je $g \circ f$ surjekcija, odnosno neka je $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = Z$. Kako je $f(X) \subseteq Y$, sledi da je $Z = g(f(X)) \subseteq g(Y)$, pa je dakle g surjekcija. ■



Slika 4: Kompozicije funkcija $h = g \circ f$

1.4. INVERZNA FUNKCIJA

Neka $A, B \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f : A \rightarrow B$ data funkcija. Ako postoji jedinstvena funkcija $g : B \rightarrow A$ takva da važi

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & g(f(x)) = x \text{ za svako } x \in A, \quad \text{tj. } g \circ f = i_A \\ \text{(ii)} \quad & f(g(y)) = y \text{ za svako } y \in B, \quad \text{tj. } f \circ g = i_B \end{aligned} \quad (1)$$

kažemo da je funkcija g inverzna funkcija funkcije f i označavamo je sa f^{-1} .

TEOREMA 1.2. Za svaku funkciju $f : A \rightarrow B$ postoji najviše jedna funkcija $g : B \rightarrow A$ za koju važi (1).

DOKAZ: Ako za funkciju $f : A \rightarrow B$ postoje funkcije $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ takve da je

$$(g_1 \circ f)(x) = x \text{ za svako } x \in A,$$

$$(f \circ g_2)(y) = y \text{ za svako } y \in B,$$

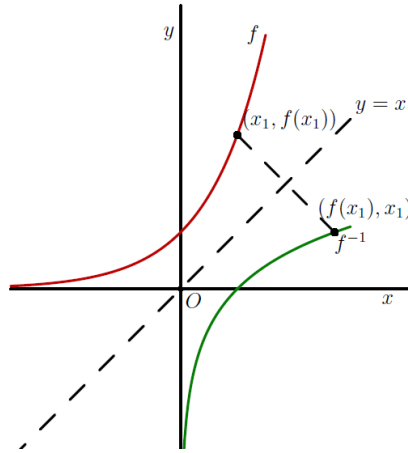
onda je $g_1 = g_2$. Zaista, za proizvoljno $y \in B$ je $g_2(y) \in A$, pa je

$$g_2(y) = (g_1 \circ f)(g_2(y)) = g_1(f(g_2(y))) = g_1(y),$$

što povlači da je $g_2 = g_1$. ■

Grafik funkcije $y = f^{-1}(x)$ simetričan je grafiku funkcije $y = f(x)$ u odnosu na pravu $y = x$ (slika 5).

Inverzna funkcija funkcije f ne mora da postoji, a bliže uslove pod kojima funkcija f ima inverznu funkciju daje naredna teorema.

Slika 5: Grafik funkcije f i njene inverzne funkcije f^{-1}

TEOREMA 1.3. *Neka je $f : A \rightarrow B$. Funkcija f je bijekcija ako i samo ako postoji jedinstvena funkcija $g : B \rightarrow A$ takva da važi (1).*

DOKAZ: $(\Rightarrow)$: Dokažimo najpre da ako je f bijekcija, funkcija g sa svojstvima (i) i (ii) postoji i jedinstvena je.

EGZISTENCIJA: Kako je $f : A \rightarrow B$ funkcija "NA", za svako $y \in B$ postoji $x \in A$ takvo da je $y = f(x)$. Kako je f "1-1", takvo x je jedinstveno. Na taj način svaki element $y \in B$ je u relaciji sa tačno jednim elementom $x \in A$ za koji je $y = f(x)$, odnosno imamo na taj način definisanu funkciju $g : B \rightarrow A$. Dokažimo da za funkciju g važi (i) i (ii). Za svako $x \in A$ imamo $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ i za svako $y = f(x) \in B$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(g(f(x))) = f((g \circ f)(x)) = f(x) = y.$$

JEDINSTVENOST: (a) Kako je $f : A \rightarrow B$ surjekcija, postoji najviše jedna funkcija $g : B \rightarrow A$ sa svojstvom (i) tj. takva da je $(g \circ f)(x) = x$ za svako $x \in A$.

Zaista, ako bi postojale dve funkcije g_1, g_2 sa tim svojstvom, onda pretpostavka $g_1 \neq g_2$ vodi ka egzistenciji bar jednog elementa $z \in B$ takvog da je $g_1(z) \neq g_2(z)$. Kako je f surjekcija, postoji $x \in A$ takvo da je $z = f(x)$. Ali tada je $g_1(f(x)) \neq g_2(f(x))$, što je u suprotnosti sa $g_1 \circ f = g_2 \circ f = i_A$ (i_A je identično preslikavanje skupa A , tj. funkcija definisana sa $i_A(x) = x$ za svako $x \in A$). Prema tome, mora biti $g_1 = g_2$.

(b) Kako je $f : A \rightarrow B$ injekcija, postoji najviše jedna funkcija $g : B \rightarrow A$ sa svojstvom (ii) tj. takva da je $(f \circ g)(y) = y$ za svako $y \in B$.

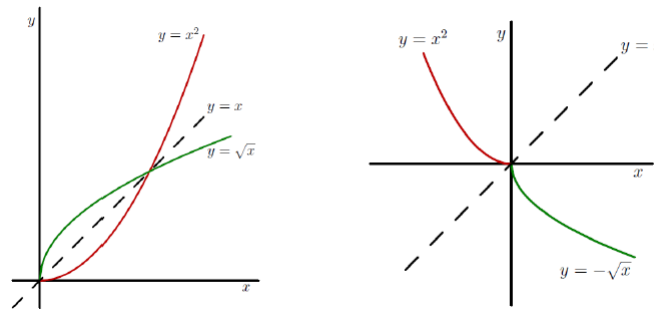
Zaista, ako bi postojale dve takve funkcije g_1, g_2 , onda zbog pretpostavke $g_1 \neq g_2$ postoji bar jedan element $z \in B$ takav da je $g_1(z) \neq g_2(z)$. Kako je f injekcija, onda je $f(g_1(z)) \neq f(g_2(z))$, a to je kontradikcija sa $f \circ g_1 = f \circ g_2 = i_B$.

$(\Leftarrow)$: Pretpostavimo suprotno, da je funkcija $g : B \rightarrow A$ sa svojstvima (i) i (ii) jedinstveno određena, a da funkcija f nije bijekcija.

Ako f nije "1-1", postoji $x_1, x_2 \in A$ tako da je $x_1 \neq x_2$ i $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Kako je onda $g(y_1) = g(y_2)$ tj. $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, zbog svojstva (i) bilo bi $x_1 = x_2$, što je suprotno pretpostavci da je $x_1 \neq x_2$.

Ako f nije "NA", tada postoji $y_0 \in B$ takav da se u njega funkcijom f ne preslikava nijedno $x \in A$, odnosno da za svako $x \in A$ je $f(x) \neq y_0$. Neka je $x_0 = g(y_0) \in A$. Tada za $y_0 \in B$ zbog svojstva (ii) je $f(g(y_0)) = y_0$, što je suprotno pretpostavci da je $f(g(y_0)) = f(x_0) \neq y_0$. ■

Kvadratna funkcija $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ je preslikavanje skupa $\mathbb{R}$ "NA" skup $[0, \infty)$, ali nije "1-1", jer je za svako $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. Prema tome, inverzna funkcija funkcije F ne postoji. Međutim, ako posmatramo restrikciju funkcije F , $F|_{[0, \infty)} = f$, $F|_{(-\infty, 0]} = g$, odnosno funkcije $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ i $g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$, koje su bijektivne, njihove inverzne funkcije $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ i $g^{-1} : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, $g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ postoje i prikazane su na Slici 6.



Slika 6: Grafik bijektivne funkcije $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ i njene inverzne funkcije $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ i grafik bijektivne funkcije $g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ i njene inverzne funkcije $g^{-1} : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, $g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

1.5. PARNOST FUNKCIJE

DEFINICIJA 1.6. Neka $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, gde skup $A \subseteq \mathbb{R}$ ima osobinu da ako $x \in A$ onda $-x \in A$. Funkcija f je **parna** na A ako za svako $x \in A$ važi $f(-x) = f(x)$, a **neparna** na A ako za svako $x \in A$ važi $f(-x) = -f(x)$.

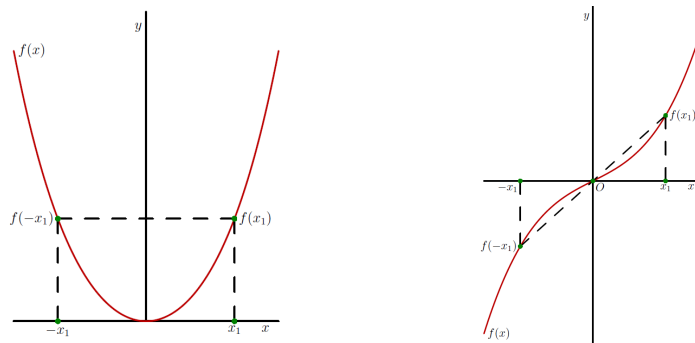
Ističemo sledeća svojstva parnih i neparnih funkcija:

- Grafik parne funkcije simetričan je u odnosu na y -osu
- Grafik neparne funkcije simetričan je u odnosu na koordinatni početak

TEOREMA 1.4. Ako je neparna funkcija $f : X \rightarrow Y$ bijekcija, onda je njena inverzna funkcija $f^{-1} : Y \rightarrow X$ takođe neparna funkcija.

DOKAZ: Kako je funkcija f "NA", za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = y$, odakle zbog neparnosti funkcije f zaključujemo daje $-y = -f(x) = f(-x) \in Y$. Dakle, za skup Y važi da ako $y \in Y$, onda i $-y \in Y$. Takođe,

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y). \blacksquare$$



Slika 7: (a) Grafik parne funkcije simetričan je u odnosu na y -osu; (b) grafik neparne funkcije simetričan je u odnosu na koordinatni početak.

1.6. MONOTONOST FUNKCIJE

DEFINICIJA 1.7. Neka je $f : X \rightarrow Y$ i $A \subseteq X$. Za funkciju f kažemo da je :

(a) *rastuća na skupu A* , ako je tačna implikacija

$$(\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

(b) *strogo rastuća na skupu A* , ako je tačna implikacija

$$(\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

(c) *opadajuća na skupu A* , ako je tačna implikacija

$$(\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

(d) *strogo opadajuća na skupu A* , ako je tačna implikacija

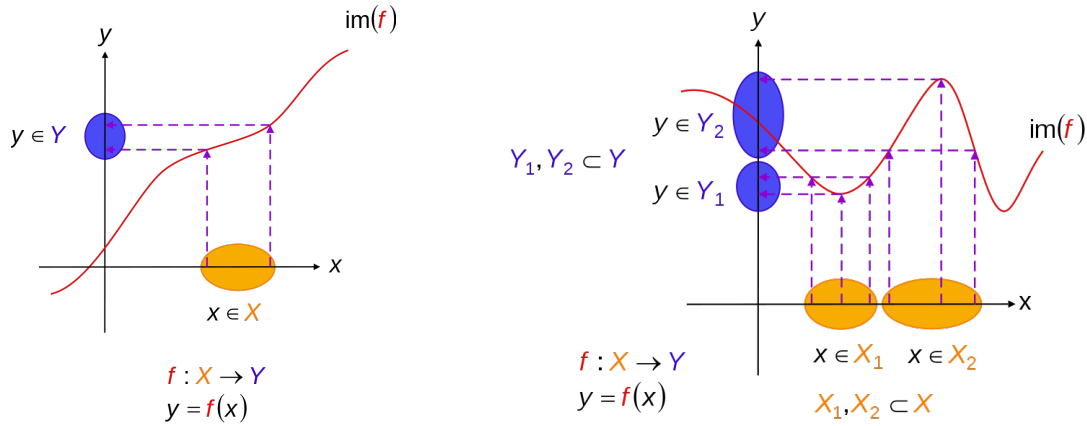
$$(\forall x_1, x_2 \in A) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Za funkciju koja zadovoljava bilo koji od uslova (a)-(d) kažemo da je *monotona* funkcija na skupu A , a za funkciju koja zadovoljava uslov (b) ili uslov (d) kažemo da je *strogo monotona* funkcija na skupu A .

DEFINICIJA 1.8. Neka je funkcija f definisana u tačka a . Za tačku $x = a$ kažemo da je tačka *lokalnog minimuma* (maksimuma) ako postoji $\epsilon > 0$ tako da je

$$f(x) \geq f(a) \quad (f(x) \leq f(a)) \quad \text{za svako } x \in (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

Broj $f(a)$ naziva se *lokalni minimum* (maksimum) funkcije f .



Slika 8: (a) Injektivna funkcija $f: X \rightarrow Y$, $f(X) = Y$; (b) Funkcije $f|_{X_1}$, $f|_{X_2}$ nisu injektivne funkcije

1.7 INJEKTIVNOST I MONOTONOST FUNKCIJE

TEOREMA 1.5. *Ako je $f: X \rightarrow Y$ strogo monotona funkcija na X , onda je f injektivna funkcija na tom skupu.*

DOKAZ: Neka je f strogo rastuća funkcija na X i neka su $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Tada je ili $x_1 < x_2$ ili $x_2 < x_1$. Kako je f strogo rastuća, zaključujemo da je ili $f(x_1) < f(x_2)$ ili $f(x_2) < f(x_1)$. Dakle, $f(x_1) \neq f(x_2)$, pa je f injektivna. ■

TEOREMA 1.6. *Ako je $f: X \rightarrow Y$ strogo monotono surjektivno preslikavanje skupa X na skup Y , tada postoji inverzna funkcija f^{-1} koja preslikava skup Y na skup X i koja je također strogo rastuća (opadajuća) na skupu Y , ako je f strogo rastuća (opadajuća) funkcija na skupu X .*

DOKAZ: Kako je f strogo monotono surjektivno preslikavanje skupa X na skup Y , tj. $f(X) = Y$, prema Teoremi 1.4, f je bijekcija, pa prema Teoremi 1.3. postoji inverzna funkcija $f^{-1}: Y \rightarrow X$ funkcije f .

Dokažimo da je $f^{-1}: Y \rightarrow X$ strogo rastuća funkcija, ako je $f: X \rightarrow Y$ strogo rastuća funkcija. Neka su $y_1, y_2 \in Y$ takvi da je $y_1 < y_2$ i neka je $x_1 = f^{-1}(y_1)$ i $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Tada je za x_1, x_2 tačno samo jedno od tvrdjenja: $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$. Ako je $x_1 = x_2$ imali bi da je $f(x_1) = f(x_2)$, tj. $y_1 = y_2$, što je suprotno pretpostavci da je $y_1 < y_2$. Ako je $x_1 > x_2$, kako je f strogo rastuća funkcija, važi $f(x_1) > f(x_2)$, tj. $y_1 > y_2$, što je također suprotno pretpostavci da je $y_1 < y_2$. Dakle, mora biti $x_1 < x_2$, odnosno $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, što znači da je f^{-1} strogo rastuća funkcija. ■

Napomena. Funkcija $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ je strogo monotono rastuća, pa je njena inverzna funkcija $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ je strogo monotono rastuća (videti Sliku 6). Takodje, funkcija $g: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ je strogo monotono opadajuća, pa je njena inverzna funkcija $g^{-1}: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, $g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ je strogo

monotono opadajuća (videti Sliku 6).

1.8. NEPREKIDNOST FUNKCIJE

DEFINICIJA 1.9. *Neka je $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ i $a \in A$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u tački a ako je*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ako su funkcije f, g neprekidne u tački a , onda su u tački a neprekidne i funkcije $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, ($c \in \mathbb{R}$).

TEOREMA 1.7. *Neka je f neprekidna i monotona funkcija na $[a, b]$. Tada je $f([a, b])$ segment sa krajevima u tačkama $f(a)$ i $f(b)$. Ako je f rastuća, onda je $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, a ako je f opadajuća, onda je $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.*

TEOREMA 1.8. *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija. Ako je f strogo rastuća, inverzna funkcija f^{-1} definisana je na $[f(a), f(b)]$, strogo je rastuća i neprekidna na tom segmentu. Ako je f strogo opadajuća, inverzna funkcija f^{-1} definisana je na $[f(b), f(a)]$, strogo je opadajuća i neprekidna na tom segmentu.*

TEOREMA 1.9. *Neka je f neprekidna i strogo rastuća (strogo opadajuća) funkcija na intervalu (a, b) (konačnom ili beskonačnom). Ako su a, b konačni, neka je $c = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ i $d = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Ako je $a = -\infty$, neka je $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, a ako je $b = +\infty$, neka je $d = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Tada,*

(i) *ako je f strogo rastuća, onda je $f((a, b)) = (c, d)$ i postoji inverzna funkcija f^{-1} koja je strogo rastuća i neprekidna na (c, d) .*

(ii) *ako je f strogo opadajuća, onda je $f((a, b)) = (d, c)$ i postoji inverzna funkcija f^{-1} koja je strogo opadajuća i neprekidna na (d, c) .*

TEOREMA 1.10. (i) *Neka je f neprekidna i strogo rastuća (strogo opadajuća) funkcija na intervalu $[a, b]$ (konačnom ili beskonačnom). Neka je $c = f(a)$ i ako je b konačno, neka je $d = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$, a ako je $b = +\infty$, neka je $d = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Tada, ako je f strogo rastuća, onda je $f([a, b]) = [c, d]$ i inverzna funkcija f^{-1} definisana je na $[c, d]$, strogo je rastuća i neprekidna na tom intervalu. Ako je f strogo opadajuća, onda je $f([a, b]) = (d, c]$ i inverzna funkcija f^{-1} definisana je na $(d, c]$, strogo je opadajuća i neprekidna na tom intervalu.*

(ii) *Neka je f neprekidna i strogo rastuća (strogo opadajuća) funkcija na intervalu $(a, b]$ (konačnom ili beskonačnom). Neka je $d = f(b)$ i ako je a konačno, neka je $c = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, a ako je $a = -\infty$, neka je $c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Tada, ako je f strogo rastuća, onda je $f((a, b]) = (c, d]$ i inverzna funkcija f^{-1} definisana je na $(c, d]$, strogo je rastuća i neprekidna na tom intervalu. Ako je f strogo opadajuća, onda je $f((a, b]) = [d, c)$ i inverzna funkcija f^{-1} definisana je na $[d, c)$, strogo je opadajuća i neprekidna na tom intervalu.*

Skup realnih brojeva

U nastavku pretpostavljamo da je skup realnih brojeva definisan aksiomatski:

DEFINICIJA 1.10. *Polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ naziva se polje realnih brojeva ako su ispunjeni uslovi:*

(i) *Na skupu $\mathbb{R}$ je definisana relacija poretka $\leq$ za koju važi*

$$(i-1) (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$$

$$(i-2) (\forall x, y \in \mathbb{R}) (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y)$$

(ii) *za svaka dva neprazna podskupa X, Y skupa $\mathbb{R}$ takva da je $x \leq y$ za svako $x \in X, y \in Y$ postoji $z \in \mathbb{R}$ tako da je $x \leq z \leq y$.*

Relacije $<$ i $>$ određene su sa:

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y; \quad x > y \iff x \geq y \wedge x \neq y;$$

TEOREMA 1.10. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Važi tačno jedna od mogućnosti:

$$a < b \quad a = b \quad a > b$$

$$2. a < b \Rightarrow a + c < b + c;$$

$$3. a \leq b \wedge c \leq d \implies a + c \leq b + d;$$

$$4. a \geq 0 \wedge b \geq 0 \implies a \cdot b \geq 0;$$

$$5. a \leq 0 \wedge b \geq 0 \implies a \cdot b \leq 0; \quad a \leq 0 \wedge b \leq 0 \implies a \cdot b \geq 0;$$

$$6. a \leq b \wedge c \geq 0 \implies a \cdot c \leq b \cdot c; \quad a \leq b \wedge c \leq 0 \implies a \cdot c \geq b \cdot c;$$

$$7. 0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \implies 0 \leq ac \leq bd;$$

$$a \leq b \leq 0 \wedge c \leq d \leq 0 \implies 0 \leq bd \leq ac;$$

$$8. 0 \leq a \leq b \implies 0 \leq a^2 \leq b^2; \quad a \leq b \leq 0 \implies a^2 \geq b^2 \geq 0;$$

Svojstva **2°** – **6°** važe i ako se $\leq$ zameni sa $<$, odnosno $\geq$ zameni sa $>$.

Prema **5°** je

$$0 < a \leq b \xrightarrow{ab > 0} 0 < a \cdot \frac{1}{ab} \leq b \cdot \frac{1}{ab} \implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

$$a \leq b < 0 \xrightarrow{ab > 0} a \cdot \frac{1}{ab} \leq b \cdot \frac{1}{ab} < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$$

2. KVADRATNA FUNKCIJA

Funkcija $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ naziva se *kvadratna funkcija*. Kvadratna funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$. Kriva u xOy ravni koja predstavlja grafik kvadratne funkcije naziva se *parabola*.

Da bi smo skicirali grafik kvadratne funkcije, transformišemo kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ na *kanonski oblik*:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

Dakle, uvođenjem oznaka

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = -\frac{D}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

dobija se

$$y = f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta. \quad (2)$$

Iz (2) zaključujemo da su

$$x_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\frac{\beta}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

koreni kvadratne jednačine

$$(KJ) \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

TEOREMA 2.1. Brojevi x_1, x_2 su rešenja kvadratne jednačine (KJ) ako i samo ako je

$$(VF) \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{VIETOVE FORMULE.}$$

DOKAZ. ($\Rightarrow$) : Ako su x_1, x_2 rešenja kvadratne jednačine (KJ), tada je

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

i

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \left(-\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

($\Leftarrow$) : Neka su x_1, x_2 brojevi koji zadovoljavaju relacije (VF). Posmatrajmo polinom $a(x - x_1)(x - x_2)$. Koristeći relacije (VF) dobija se

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$$

Dakle, jednačinu (KJ) možemo zapisati u obliku $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, pa su x_1, x_2 rešenja te jednačine. ■

TEOREMA 2.2. (i) Neka je $a > 0$. Funkcija f je strogo opadajuća na $(-\infty, \alpha)$ i strogo rastuća na $(\alpha, +\infty)$. Kvadratna funkcija ima **minimum** $\beta = -\frac{D}{4a}$ koji se dostiže za $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$;

(ii) Neka je $a < 0$. Funkcija f je strogo rastuća na $(-\infty, \alpha)$ i strogo opadajuća na $(\alpha, +\infty)$. Kvadratna funkcija ima **maksimum** $\beta = -\frac{D}{4a}$ koji se dostiže za $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$.

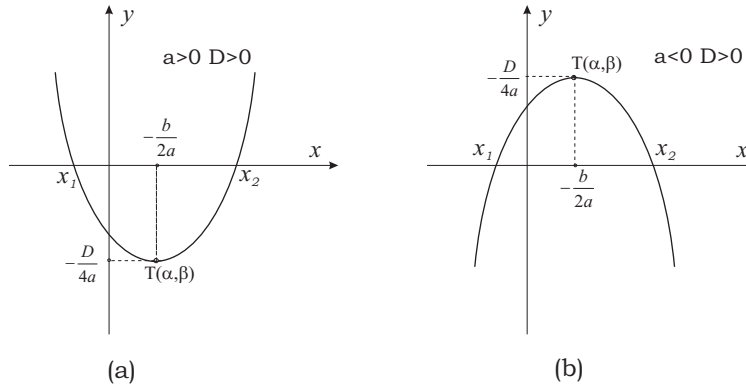
DOKAZ. Neka je $a < 0$. Pokažimo da je f strogo rastuća na $(-\infty, \alpha)$, odnosno da za svako $x_1, x_2 \in (-\infty, \alpha)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Imamo

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 < \alpha &\Rightarrow x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0 \\ \Rightarrow (x_1 - \alpha)^2 > (x_2 - \alpha)^2 &\Rightarrow a(x_1 - \alpha)^2 < a(x_2 - \alpha)^2 \\ \Rightarrow f(x_1) = a(x_1 - \alpha)^2 + \beta < a(x_2 - \alpha)^2 + \beta = f(x_2). \end{aligned}$$

Ostali slučajevi pokazuju se analogno.

Neka je $a < 0$. Zbog monotonosti funkcije f imamo da je $f(x) < f(\alpha)$ za svako $x < \alpha$ i $f(x) < f(\alpha)$ za svako $x > \alpha$, tako da prema Definiciji 1.8. $x = \alpha$ je tačka lokalnog maksimuma funkcije, a $f(\alpha) = \beta$ je maksimum funkcije f . ■

Tačka $T(\alpha, \beta)$ naziva se **teme parabole**.

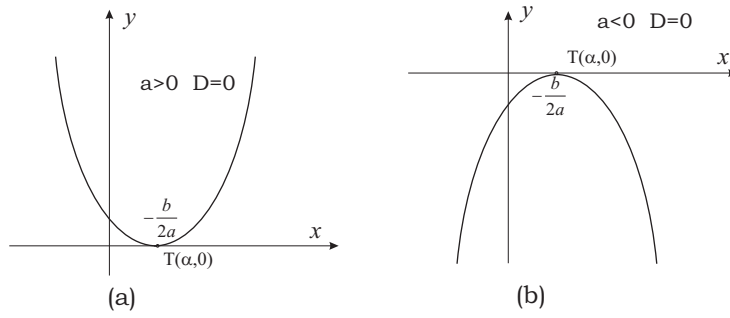


Slika 9: Kvadratna funkcija ako je $D > 0$: (a) za $a > 0$; (b) za $a < 0$.

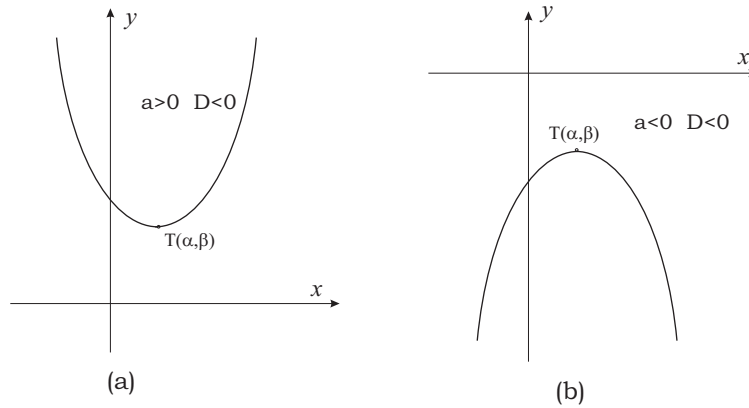
S obzirom na znak koeficijenta a i znaka diskriminante D razlikujemo šest karakterističnih slučajeva grafika kvadratne funkcije. Ako je $a > 0$ parabola je sa otvorom nagore, a ako je $a < 0$ parabola je sa otvorom nadole.

(I) Ako je $D = b^2 - 4ac > 0$ funkcija ima dve nule (Slika 9.)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R}.$$



Slika 10: Kvadratna funkcija ako je $D = 0$: (a) za $a > 0$; (b) za $a < 0$.



Slika 11: Kvadratna funkcija ako je $D < 0$: (a) za $a > 0$; (b) za $a < 0$.

Za $a > 0$, funkcija f je pozitivna za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ i negativna za $x \in (x_1, x_2)$. Za $a < 0$, funkcija f je pozitivna za $x \in (x_1, x_2)$ i negativna za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

(II) Ako je $D = b^2 - 4ac = 0$ funkcija ima jednu nulu (Slika 10.) $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ i parabola dodiruje x -osu u tački $(x_1, 0) = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$. Dakle, $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, odnosno $f(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.

(III) Ako je $D = b^2 - 4ac < 0$ funkcija nema realnih nula (Slika 11.), tj. njegov grafik nema zajedničkih tačaka sa x -osom. Dakle, $f(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

Takodje, primetimo da oblast vrednosti funkcija f je $[\beta, \infty)$ ako je $a > 0$, odnosno $(-\infty, \beta]$ ako je $a < 0$. Odnosno, za $a > 0$, funkcija f preslikava skup $\mathbb{R}$ na skup $[\beta, \infty)$, dok za $a < 0$, funkcija f preslikava skup $\mathbb{R}$ na skup $(-\infty, \beta]$.

PRIMER 2.1. Odrediti vrednost realnog parametra m za koju je zbir kvadrata korena jednačine $x^2 - mx + m - 3 = 0$ najmanji.

REŠENJE: Prema Vietovim pravilima za korene x_1, x_2 date KJ je $x_1 + x_2 = m, x_1 \cdot x_2 = m - 3$, tako da je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = m^2 - 2(m - 3) = m^2 - 2m + 6.$$

Vrednost parametra m za koju je zbir kvadrata korena KJ najmanji je vrednost parametra m za koju kvadratna funkcija $f(m) = m^2 - 2m + 6$ ima minimalnu vrednost. Dakle, $m = -\frac{-2}{2} = 1$.

PRIMER 2.2. Iz skupa funkcija

$$f(x) = (m - 1)x^2 + (m - 4)x - m - 1, \quad m \neq 1$$

odrediti onu funkciju:

- (a) koja dostiže najveću vrednost za $x = -1$;
- (b) koja ima najveću vrednost $f_{max} = 4$.

REŠENJE:

(A) Funkcija dostiže najveću vrednost ako je $a = m - 1 < 0$, tj. $m < 1$. Najveća vrednost se dostiže za $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m - 4}{2(m - 1)}$. Dakle,

$$-\frac{m - 4}{2(m - 1)} = -1 \Rightarrow m = -2 < 1.$$

(B) Funkcija ima najveću vrednost ako je $a = m - 1 < 0$ i

$$4 = f_{max} = -\frac{D}{4a} = -\frac{(m - 4)^2 - 4(m - 1)(-m - 1)}{4(m - 1)} \Rightarrow 5m^2 + 8m - 4 = 0$$

Kako su $m_1 = -2$ i $m_2 = \frac{2}{5}$ rešenja dobijene kvadratne jednačine i ispunjavaju uslov $m < 1$ to su i tražene vrednosti parametra m . $\boxtimes$

PRIMER 2.3. Odrediti najmanju i najveću vrednost funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ na segmentu $[-1, 1]$.

REŠENJE: Najmanja i najveća vrednost funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ na segmentu $[-1, 1]$ biće najveća i najmanja vrednost funkcije $g(x) = x^2 + x + 1$ na datom segmentu. Lokalni minimum funkcije g je

$$g_{min} = -\frac{D}{4a} = \frac{3}{4} \text{ za } x_{min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \in [-1, 1].$$

Dakle, najveća vrednost funkcije f na segmentu $[-1, 1]$ je $4/3$. Kako je $g(-1) = 1$ i $g(1) = 3$, to je najveća vrednost funkcije g na datom segmentu 3 , tako da je najmanja vrednost funkcije f na datom segmentu $1/3$. $\boxtimes$

PRIMER 2.4. U zavisnosti od parametra $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ rešiti nejednačine

$$(a) (k+2)x^2 - 2x + k < 0; \quad (b) (k+2)x^2 - 2x + k \leq 0.$$

REŠENJE: Rešenja odgovarajuće kvadratne jednačine su

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k(k+2)}}{2(k+2)} = \frac{1 \pm \sqrt{-k^2 - 2k + 1}}{k+2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{-k^2 - 2k + 1}}{k+2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{-k^2 - 2k + 1}}{k+2}$$

Rešavanje kvadratne nejednačine zasniva se na ispitivanju znaka odgovarajuće kvadratne funkcije $y = f(x) = (k+2)x^2 - 2x + k$ čiji grafik može imati jedan od šest oblika prikazanih na slikama 9., 10. i 11. u zavisnosti od $a = k+2 \leq 0$ i $D \leq 0$. Za $D = -k^2 - 2k + 1$ važi

$$\begin{cases} D > 0, & -1 - \sqrt{2} < k < -1 + \sqrt{2} \\ D = 0, & k = -1 - \sqrt{2} \wedge k = -1 + \sqrt{2} \\ D < 0, & k < -1 - \sqrt{2} \vee k > -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Dakle, nejednačinu ćemo rešavati razdvajajući slučajeve za

$$k \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 - \sqrt{2}, -2) \cup (-2, -1 + \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty) \cup \{-1 \pm \sqrt{2}\}.$$

$k < -1 - \sqrt{2}$	$k \in (-1 - \sqrt{2}, -2)$	$k \in (-2, -1 + \sqrt{2})$	$k > -1 + \sqrt{2}$
$a < 0, D < 0$	$a < 0, D > 0$	$a > 0, D > 0$	$a > 0, D < 0$

Slučaj (I) - za $k < -1 - \sqrt{2} < -2$: je $a = k+2 < 0$ i $D < 0$ (Slika 11-(b)). Kvadratna funkcija $f(x)$ je negativna za svako $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $\forall x \in \mathbb{R}$ je rešenje kvadratne nejednačine (a) i (b).

Slučaj (II) - za $-1 - \sqrt{2} < k < -2$: je $a = k+2 < 0$ i $D > 0$ (Slika 9-(b)). Pre svega primetimo da je $\lambda_2 < \lambda_1$. Kvadratna funkcija $f(x)$ je negativna za $x < \lambda_2$ i $x > \lambda_1$. Dakle, rešenje kvadratne nejednačine (a) i kvadratne nejednačine (b) je $x \in (-\infty, \lambda_2) \cup (\lambda_1, \infty)$.

Slučaj (III) - za $-2 < k < -1 + \sqrt{2}$: je $a = k+2 > 0$ i $D > 0$ (Slika 9-(a)). Pre svega primetimo da je $\lambda_1 < \lambda_2$. Kvadratna funkcija $f(x)$ je negativna za $x \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Dakle, rešenje kvadratne nejednačine (a) je $x \in (\lambda_1, \lambda_2)$, a rešenje kvadratne nejednačine (b) je $x \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Slučaj (IV) - za $k > -1 + \sqrt{2} > -2$: je $a = k+2 > 0$ i $D < 0$ (Slika 11-(a)). Kvadratna funkcija $f(x)$ je pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$. Dakle, kvadratna nejednačina (a), kao i kvadratna nejednačina (b), nema realnih rešenja.

Slučaj (V-a) - za $k = -1 - \sqrt{2} < -2$: je $a = k+2 < 0$ i $D = 0$ (Slika 10-(b)). Kvadratna funkcija $f(x)$ dodiruje x -osu u tački $(-\frac{b}{2a}, 0) = (\frac{1}{k+2}, 0) = (-1 - \sqrt{2}, 0)$ i $f(x) < 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}\}$. Dakle, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 - \sqrt{2}\}$ je rešenje kvadratne nejednačine (a), $\forall x \in \mathbb{R}$ je rešenje kvadratne nejednačine (b).

Slučaj (V-b) - za $k = -1 + \sqrt{2} > -2$: je $a = k+2 > 0$ i $D = 0$ (Slika 10-(a)). Kvadratna funkcija $f(x)$ dodiruje x -osu u tački $(-\frac{b}{2a}, 0) = (\frac{1}{k+2}, 0) = (\sqrt{2} - 1, 0)$ i $f(x) > 0$ za

svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2} - 1\}$. Dakle, kvadratna nejednačina (a) nema realnih rešenja, kvadratna nejednačina (b) ima jedinstveno rešenje $x = \sqrt{2} - 1$.

Rešenje kvadratne nejednačine (a) je

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & k < -1 - \sqrt{2}; \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, & k = -1 - \sqrt{2}; \\ x \in (-\infty, \lambda_2) \cup (\lambda_1, \infty) & -1 - \sqrt{2} < k < -2; \\ x \in (\lambda_1, \lambda_2), & -2 < k < -1 + \sqrt{2}; \\ x \in \emptyset, & k \geq -1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Rešenje kvadratne nejednačine (b) je

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & k \leq -1 - \sqrt{2}; \\ x \in (-\infty, \lambda_2] \cup [\lambda_1, \infty) & -1 - \sqrt{2} < k < -2; \\ x \in [\lambda_1, \lambda_2], & -2 < k < -1 + \sqrt{2}; \\ x = \sqrt{2} - 1, & k = -1 + \sqrt{2}; \\ x \in \emptyset, & k > -1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

2.1. ODREĐJIVANJE OBLASTI VREDNOSTI FUNKCIJE

Ako je $\mathbb{D}$ oblast definisanosti funkcije f problem određivanja skupa $f(\mathbb{D}) = \mathcal{R}(f)$, odnosno oblasti vrednosti funkcije f , može se formulisati kao zadatak određivanja vrednosti parametra $y \in \mathbb{R}$ pri kojima jednačina $f(x) = y$ ima bar jedan realan koren $x \in \mathbb{D}$.

PRIMER 1.1A. Odrediti oblast vrednosti funkcija u Primeru 1.1.

REŠENJE: (a) $f_1(x) = \frac{3}{2+x^2}$. Oblast definisanost funkcije f_1 je $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Jednačina $f(x) = y$ je ekvivalentna sa

$$\frac{3}{2+x^2} = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{3-2y}{y} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3-2y}{y}}$$

Prema tome, jednačina $f_1(x) = y$ ima bar jedan realan koren ako i samo ako je

$$\frac{3-2y}{y} \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$$

Dakle, $f_1(\mathbb{D}) = \mathcal{R}(f_1) = (0, 3/2]$.

(b) $f_2(x) = \frac{x-3}{x+2}$. Oblast definisanost funkcije f_2 je $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Jednačina $f(x) = y$ je ekvivalentna sa

$$\frac{x-3}{x+2} = y \Leftrightarrow x = \frac{3+2y}{1-y}$$

Prema tome, jednačina $f_2(x) = y$ ima bar jedan realan koren $x \neq -2$ ako i samo ako je $y \neq 1$. Dakle, $f_2(\mathbb{D}) = \mathcal{R}(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) $f_3(x) = \frac{2}{3 - |x|}$. Oblast definisanost funkcije f_3 je $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Jednačina $f(x) = y$ je ekvivalentna sa

$$\frac{2}{3 - |x|} = y \Leftrightarrow |x| = \frac{3y - 2}{y}$$

Prema tome, jednačina $f_3(x) = y$ ima bar jedan realan koren $x \in \mathbb{D}$ ako i samo ako je

$$\frac{3y - 2}{y} \geq 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Dakle, $f_3(\mathbb{D}) = \mathcal{R}(f_3) = (-\infty, 0) \cup [2/3, +\infty)$.

(d) $f_5(2x - 1) = 4x^2 - 2x + 1$. Smenom $t = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$ dobija se $f_5(t) = t^2 + t + 1$. Oblast definisanost funkcije f_5 je $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Jednačina $f(x) = y$ je ekvivalentna sa

$$x^2 + x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{4y - 3}}{2}$$

Prema tome, jednačina $f(x) = y$ ima bar jedan realan koren ako i samo ako je $4y - 3 \geq 0$, odnosno $y \geq 3/4$. Dakle, $f_5(\mathbb{D}) = \mathcal{R}(f_5) = [3/4, +\infty)$. $\square$

PRIMER 2.5. Neka je $\mathbb{D}$ oblast definisanosti funkcije $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$. Odrediti skup $f(\mathbb{D})$.

REŠENJE: Oblast definisanosti funkcije f je $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Jednačina $f(x) = y$ je ekvivalentna sa

$$x^2 - 2xy + y = 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \iff x_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - y} \wedge x \neq \frac{1}{2}.$$

Prema tome, jednačina $f(x) = y$ ima bar jedan realan koren $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ ako i samo ako je $y^2 - y \geq 0$, tj. $y \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, što daje skup $f(\mathbb{D}) = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$. $\square$

2.2. ODREĐIVANJE INVERZNE FUNKCIJE

PRIMER 2.6. Za date funkcije:

$$(a) g(x) = x^2 - 6x + 1; \quad (b) f(x) = x^2 - x + 1$$

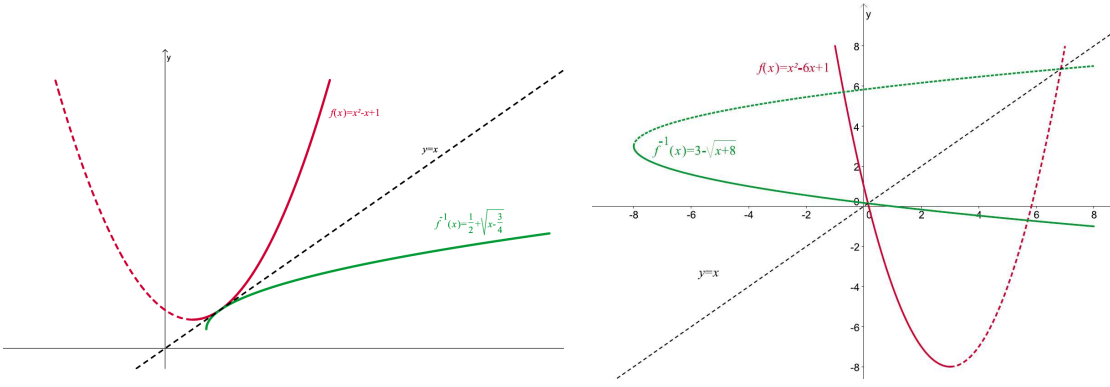
odrediti oblast vrednosti funkcije i naći restrikciju funkcije koja je bijekcija i odrediti njenu inverznu funkciju.

REŠENJE. (a) Oblast definisanost funkcije g je $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Jednačina $g(x) = y$ je ekvivalentna sa

$$x^2 - 6x + 1 = y \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{y + 8} \quad (3)$$

Prema tome, jednačina $g(x) = y$ ima bar jedan realan koren ako i samo ako je $y + 8 \geq 0$, odnosno $y \geq -8$. Dakle, oblast vrednosti funkcije g je $g(\mathbb{D}) = \mathcal{R}(g) = [-8, +\infty)$, odnosno funkcija g preslikava skup $\mathbb{R}$ NA skup $[-8, +\infty)$.

Surjektivna funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow [-8, +\infty)$ nije "1-1". Da bi odredili restrikciju funkcije koja je bijekcija ispitujemo monotonost funkcije. Kako je $g(x) = (x - 3)^2 - 8$, ispitujemo monotonost



Slika 12: Grafik funkcije $f(x) = x^2 - x + 1, x \geq 1/2$ i njene inverzne funkcije $f^{-1}(y) = 1/2 + \sqrt{y - 3/4}, y \geq 3/4$ i grafik funkcije $f(x) = x^2 - 6x + 1, x \leq 3$ i njene inverzne funkcije $f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{y + 8}, y \geq 8$

funkcije na $(-\infty, 3]$ i na $[3, +\infty)$. Za $x \in (-\infty, 3]$ funkcija g je strogo monotono opadajuća, jer je

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \leq 3 &\Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - 3)^2 - 8 > (x_2 - 3)^2 - 8 \geq -8 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \geq -8 \end{aligned}$$

Za $[3, +\infty)$ analogno se pokazuje da je funkcija g strogo monotono rastuća.

Prema tome, restrikcija funkcije g na skup $(-\infty, 3]$ kao strogo monotona funkcija, je "1-1" funkcija. Dakle, funkcija $G : (-\infty, 3] \rightarrow [-8, +\infty)$ je bijekcija i prema Teoremi 1.3. postoji inverzna funkcija $G^{-1} : [-8, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$. Rešavanjem jednačina $g(x) = y$ po x dobija se (3). Kako je $G^{-1}(y) = x \in (-\infty, 3]$, biće $G^{-1}(y) = 3 - \sqrt{y + 8}$.

(a) Oblast vrednosti funkcije f je $\mathcal{R}(f) = [3/4, +\infty)$. Kako je $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + 3/4$, funkcija f je strogo monotono rastuća na $[1/2, +\infty)$ i strogo monotono opadajuća na $(-\infty, 1/2]$. Prema Teoremi 1.3. restrikcija $F : [1/2, +\infty) \rightarrow [3/4, +\infty)$ funkcije f je bijekcija i njena inverzna funkcija $F^{-1} : [3/4, +\infty) \rightarrow [1/2, +\infty)$ je

$$F^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}, \quad y \geq \frac{3}{4}. \quad \boxtimes$$

PRIMER 2.7. Data je funkcija $f(x) = 1 - \sqrt{8x - x^2}$.

(a) Ako je $\mathbb{D}$ oblast definisanosti date funkcije, odrediti $f(\mathbb{D})$.

(b) Ispitati monotonost funkcije.

(c) Naći restrikciju funkcije f koja je bijekcija i odrediti njenu inverznu funkciju.

REŠENJE. Funkcija f je definisana za $x \in [0, 8] = \mathbb{D}$. Funkcija

$$f(x) = 1 - \sqrt{8x - x^2} = 1 - \sqrt{16 - (x - 4)^2}$$

očigledno nije "1-1" na celoj svojoj oblasti definisanosti, jer je $f(a+4) = f(4-a)$ za svako $a \in [-4, 4]$.

(a) Odredimo vrednosti parametra $y \in \mathbb{R}$ pri kojima jednačina $y = 1 - \sqrt{8x - x^2}$ ima bar jedan realan koren $x \in \mathbb{D}$. Da bi smeli da kvadiramo jednačinu $\sqrt{8x - x^2} = 1 - y$ mora biti $1 - y \geq 0$, odnosno $y \leq 1$. Dobija se kvadratna jednačina

$$x^2 - 8x + (y-1)^2 = x^2 - 8x + 1 - 2y + y^2 = 0 \quad (4)$$

koja ima realan koren ako je

$$D = 4(16 - (y-1)^2) = 4(15 + 2y - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 5.$$

Dakle, jednačina $f(x) = y$ ima realan koren za $y \in [-3, 1]$. Ostaje da ispitamo da li bar jedno od rešenja KJ (4)

$$x_1 = 4 - \sqrt{15 + 2y - y^2}, \quad x_2 = 4 + \sqrt{15 + 2y - y^2} \quad (5)$$

pripada $\mathbb{D} = [0, 8]$. Rešavamo nejednačine

$$0 \leq 4 - \sqrt{15 + 2y - y^2} \leq 8 \Leftrightarrow -4 \leq \sqrt{16 - (y-1)^2} \leq 4$$

$$0 \leq 4 + \sqrt{15 + 2y - y^2} \leq 8 \Leftrightarrow -4 \leq \sqrt{16 - (y-1)^2} \leq 4$$

Kako $\sqrt{16 - (y-1)^2} \geq 0$ očigledno važi za svako $y \in \mathbb{R}$ i

$$16 - (y-1)^2 \leq 16 \Rightarrow \sqrt{16 - (y-1)^2} \leq 4$$

zaključujemo da i druga nejednakost važi za svako $y \in \mathbb{R}$, odnosno da za svako $y \in \mathbb{R}$ su $x_1, x_2 \in [0, 8]$. Zaključujemo da jednačina $f(x) = y$ ima bar jedan realan koren $x \in \mathbb{D}$, ako je $-3 \leq y \leq 1$, tj. oblast vrednosti funkcije f je $f(\mathbb{D}) = [-3, 1]$.

(b) Kako je $y = h(x) = 8x - x^2 = 16 - (x-4)^2$, funkcija koja je strogo rastuća na $[0, 4]$ i strogo opadajuća na $[4, 8]$, ispitajmo monotonost funkcije f na ovim intervalima. Pri tome koristimo da je $G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $G(t) = \sqrt{t}$ strogo monotono rastuća funkcija, kao inverzna funkcija strogo monotono rastuće funkcije $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ (videti Napomenu na str. 9), odnosno koristimo

$$(\star) \quad 0 \leq t_1 < t_2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 < x_2 \leq 4 &\Rightarrow -4 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4 \leq 0 \Rightarrow 16 \geq (x_1 - 4)^2 > (x_2 - 4)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow -16 \leq -(x_1 - 4)^2 < -(x_2 - 4)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 16 - (x_1 - 4)^2 < 16 - (x_2 - 4)^2 \leq 16 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(\star)}{\Rightarrow} 0 \leq \sqrt{16 - (x_1 - 4)^2} < \sqrt{16 - (x_2 - 4)^2} \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - \sqrt{8x_1 - x_1^2} > 1 - \sqrt{8x_2 - x_2^2} \geq -3$$

$$\Rightarrow 1 \geq f(x_1) > f(x_2) \geq -3. \quad (6)$$

Dakle, funkcija f je strogo monotonno opadajuća na $[0, 4]$. Pored toga, zaključujemo i da je $f : [0, 4] \rightarrow [-3, 1]$ preslikavanje "NA".

$$\begin{aligned}
 4 \leq x_1 < x_2 \leq 8 &\Rightarrow 0 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq (x_1 - 4)^2 < (x_2 - 4)^2 \leq 16 \\
 \Rightarrow 0 \geq -(x_1 - 4)^2 > -(x_2 - 4)^2 \geq -16 &\Rightarrow 16 \geq 16 - (x_1 - 4)^2 > 16 - (x_2 - 4)^2 \geq 0 \\
 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 4 \geq \sqrt{16 - (x_1 - 4)^2} > \sqrt{16 - (x_2 - 4)^2} \geq 0 \\
 \Rightarrow -4 \leq -\sqrt{8x_1 - x_1^2} < -\sqrt{8x_2 - x_2^2} \leq 0 \\
 \Rightarrow -3 \leq f(x_1) < f(x_2) \leq 1.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Dakle, funkcija f je strogo monotonno rastuća na $[4, 8]$. Pored toga, zaključujemo i da je $f : [4, 8] \rightarrow [-3, 1]$ preslikavanje "NA".

(c) Prema Teoremi 1.4. restrikcija F funkcije f na $[0, 4]$ kao strogo monotonno opadajuća funkcija je "1-1" funkcija. Pored toga, zaključili smo da je $F : [0, 4] \rightarrow [-3, 1]$ preslikavanje "NA". Prema Teoremi 1.6. postoji inverzna funkcija $F^{-1} : [-3, 1] \rightarrow [0, 4]$.

Da bi odredili inverznu funkciju rešavamo jednačinu $y = 1 - \sqrt{8x - x^2}$ po x i dobijamo KJ (4) čija su rešenja (5). Kako $x = F^{-1}(y) \in [0, 4]$, biće $F^{-1}(y) = 4 - \sqrt{15 + 2y - y^2}$. $\boxtimes$

PRIMER 2.8. Data je funkcija $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

(a) Odrediti $f(\mathbb{D})$, ako je $\mathbb{D}$ oblast definisanosti funkcije f .

(b) Ispitati monotonost funkcije.

(c) Naći restrikciju funkcije f koja je bijekcija i odrediti njenu inverznu funkciju.

REŠENJE. Funkcija f je definisana za $x \geq 0$, tj. $\mathbb{D} = [0, \infty)$. Funkcija

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$$

očigledno nije "1-1" na celoj svojoj oblasti definisanosti, jer je $f(4) = f(0)$.

(a) Smenom $t = \sqrt{x} \geq 0$ jednačina $f(x) = x - 2\sqrt{x} = y$ postaje kvadratna jednačina

$$t^2 - 2t - y = 0 \tag{8}$$

Odredimo vrednosti parametra $y \in \mathbb{R}$ pri kojima jednačina (8) ima bar jedan nenegativan realan koren. Ova jednačina ima realne korene akko $D = 4(1 + y) \geq 0$, tj. $y \geq -1$. Koreni jednačine su $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + y}$ i kako je $1 + \sqrt{1 + y} \geq 1 > 0$ za svako $y \geq -1$, zaključujemo da je $f(\mathbb{D}) = [-1, \infty)$.

(b) Kako je $f(x) = g(\sqrt{x})$, gde je $g(t) = t^2 - 2t = (t - 1)^2 - 1$, ispitivanje monotonosti funkcije f treba izvršiti na $[0, 1]$ i na $[1, \infty)$. Dokažimo da je f strogo opadajuća na $[0, 1]$.

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} 0 \leq \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \leq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -1 \leq \sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1 \leq 0 &\Rightarrow 1 \geq (\sqrt{x_1} - 1)^2 > (\sqrt{x_2} - 1)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow -1 \leq f(x_2) = (\sqrt{x_2} - 1)^2 - 1 < (\sqrt{x_1} - 1)^2 - 1 = f(x_1) \leq 0. \end{aligned}$$

Pored toga, zaključujemo da je $f : [0, 1] \rightarrow [-1, 0]$ preslikavanje "NA".

Analogno, može se pokazati da je f strogo rastuća funkcija na $[1, \infty)$, kao i da je $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ preslikavanje "NA".

(c) Prema Teoremi 1.4. restikcija F funkcije f na $[0, 1]$ je injektivna funkcija. Takodje, prema prethodnom, F je surjektivno preslikavanje $[0, 1]$ "NA" $[-1, 0]$, pa prema Teoremi 1.3. postoji inverzna funkcija $F^{-1} : [-1, 0] \rightarrow [0, 1]$.

Da bi odredili inverznu funkciju tražimo rešenje jednačine $x - 2\sqrt{x} - y = 0$ po x koje pripada segmentu $[0, 1]$. Dobijamo $\sqrt{x} = 1 \pm \sqrt{1+y}$. Za $x \in [0, 1]$ je $\sqrt{x} \in [0, 1]$. Kako je $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{1+y} \geq 1$ za svako $y \geq -1$ i

$$\sqrt{x} = 1 - \sqrt{1+y} \leq 1 \quad \text{i} \quad \sqrt{x} = 1 - \sqrt{1+y} \geq 0 \quad \text{za svako } y \geq -1$$

biće

$$x = F^{-1}(y) = \left(1 - \sqrt{1+y}\right)^2 = 2 + y - 2\sqrt{1+y}. \quad \boxtimes$$

PRIMER 2.9. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{3 + 2x^2}{2 + x^2}.$$

(a) Odrediti $f(\mathbb{D})$, ako je $\mathbb{D}$ oblast definisanosti funkcije f .

(b) Ispitati monotonost funkcije.

(c) Naći restrikciju funkcije f koja je bijekcija i odrediti njenu inverznu funkciju.

REŠENJE. Funkcija f definisana je na $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Kako je $f(-a) = f(a)$, za svako $a \in \mathbb{R}$ funkcija nije "1-1" na $\mathbb{R}$.

(a) Problem odredjivanja skupa $f(\mathbb{D})$, svodi se na odredjivanja vrednosti parametra $y \in \mathbb{R}$ pri kojima jednačina $f(x) = y$ ima bar jedan realan koren $x_0 \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = \frac{3 + 2x^2}{2 + x^2} &\Rightarrow x^2 = \frac{3 - 2y}{y - 2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 - 2y}{y - 2}} \in \mathbb{R} \quad \text{za} \quad \frac{3 - 2y}{y - 2} \geq 0 \\ \frac{3 - 2y}{y - 2} &\geq 0 \Leftrightarrow y \in [3/2, 2) \end{aligned}$$

Dakle, funkcija f preslikava skup $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ NA skup $[3/2, 2)$, tj. za svako $y \in [3/2, 2)$, postoji $x = \pm \sqrt{\frac{3-2y}{y-2}}$ tako da je $f(x) = y$.

(b) Da bi ispitali monotonost funkcije predstavljamo je u obliku

$$f(x) = \frac{3 + 2x^2}{2 + x^2} = \frac{2(x^2 + 2) - 1}{2 + x^2} = 2 - \frac{1}{2 + x^2}.$$

Kako je $y = x^2$ funkcija koja je strogo rastuća na $[0, \infty)$ i strogo opadajuća na $(-\infty, 0]$, ispitajmo monotonost funkcije f na $[0, \infty)$ i na $(-\infty, 0]$. Pri tome koristimo

$$(\star\star) \quad 0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 2 \leq x_1^2 + 2 < x_2^2 + 2 \xRightarrow{(\star\star)} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+x_1^2} > \frac{1}{2+x_2^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{1}{2+x_1^2} < 2 - \frac{1}{2+x_2^2} < 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [0, \infty)$$

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow 2+x_1^2 > 2+x_2^2 \geq 2 \xRightarrow{(\star\star)} 0 < \frac{1}{2+x_1^2} < \frac{1}{2+x_2^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 > 2 - \frac{1}{2+x_1^2} > 2 - \frac{1}{2+x_2^2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$$

Prema Teoremi 1.4. restrikcija funkcije f na skup $[0, \infty)$, kao i restrikcija funkcije f na skup $(-\infty, 0]$, kao strogo monotone funkcije su injektivne funkcije.

(c) Restrikcija F funkcije f na $[0, \infty)$ je "1-1", a prema prethodnom zaključujemo da F preslikava $[0, \infty)$ NA skup $[3/2, 2)$. Dakle, $F : [0, \infty) \rightarrow [3/2, 2)$ je bijekcija i postoji $F^{-1} : [3/2, 2) \rightarrow [0, \infty)$. Inverznu f-ju $x = F^{-1}(y)$ odredjujemo rešavanjem jednačine $y = F(x)$ po x . Rešenja ove jednačine su $x = \pm \sqrt{\frac{3-2y}{y-2}}$. Kako je $x = F^{-1}(y) \in [0, \infty)$, biće $x = \sqrt{\frac{3-2y}{y-2}} = F^{-1}(y)$. $\square$

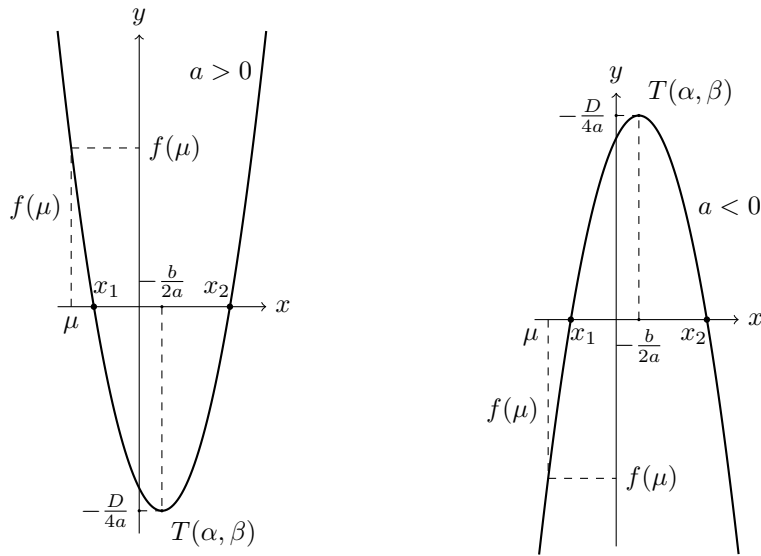
2.3. RASPORED KORENA KVADRATNE JEDNAČINE U ODNOSU NA DATE BROJEVE

Neka su x_1, x_2 koreni kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ i neka su μ, ν , $\mu < \nu$ dati realni brojevi i $f(x) = ax^2 + bx + c$.

TEOREMA 2.3. Koreni x_1, x_2 su realni i važi $\mu < x_1 \leq x_2$ akko je

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af(\mu) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \mu \end{cases} \quad (\text{SLIKA 13})$$

$$\begin{aligned}
\text{DOKAZ. } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \mu < x_1 \leq x_2 &\iff D \geq 0 \quad \wedge \quad x_1 - \mu > 0 \quad \wedge \quad x_2 - \mu > 0 \\
&\iff \begin{cases} D \geq 0 \\ (x_1 - \mu)(x_2 - \mu) > 0 \\ (x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 x_2 - \mu(x_1 + x_2) + \mu^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\mu \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{c}{a} + \mu \cdot \frac{b}{a} + \mu^2 > 0 \\ -\frac{b}{a} > 2\mu \end{cases} \\
&\iff D \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{f(\mu)}{a} > 0 \quad \wedge \quad -\frac{b}{2a} > \mu \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Slika 13: Koreni x_1, x_2 realni i $\mu < x_1 \leq x_2$

TEOREMA 2.4. *Koreni x_1, x_2 su realni i važi $x_1 \leq x_2 < \mu$ akko je*

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a f(\mu) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \mu \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{DOKAZ. } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \leq x_2 < \mu &\iff D \geq 0 \wedge x_1 - \mu < 0 \wedge x_2 - \mu < 0 \\
&\iff \begin{cases} D \geq 0 \\ (x_1 - \mu)(x_2 - \mu) > 0 \\ (x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) < 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 x_2 - \mu(x_1 + x_2) + \mu^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\mu \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{c}{a} + \mu \cdot \frac{b}{a} + \mu^2 > 0 \\ -\frac{b}{a} < 2\mu \end{cases} \\
&\iff D \geq 0 \wedge \frac{f(\mu)}{a} > 0 \wedge -\frac{b}{2a} < \mu \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

TEOREMA 2.5. Koreni x_1, x_2 su realni i važi $x_1 < \mu < x_2$ akko je $a f(\mu) < 0$.

DOKAZ: $(\implies)$: Neka su x_1, x_2 realni koreni takvi da je $x_1 < \mu < x_2$. Tada je $x_1 - \mu < 0$ i $x_2 - \mu > 0$, pa je

$$(x_1 - \mu)(x_2 - \mu) < 0 \iff \mu^2 - \mu(x_1 + x_2) + x_1 x_2 < 0 \iff a f(\mu) < 0$$

$(\impliedby)$: Ako je $a f(\mu) < 0$, tada je

$$a f(\mu) = a^2 \left(\mu - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4} < 0 \iff D > 4a^2 \left(\mu - \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0,$$

pa su rešenja realna i različita. Pokažimo da je $x_1 < \mu < x_2$. Ako pretpostavimo suprotno, da μ nije između x_1 i x_2 , onda je $x_1 < x_2 \leq \mu$ ili $\mu \leq x_1 < x_2$, pa bi prema Teoremi 2.1. i 2.2. imali da je $a f(\mu) \geq 0$, što je suprotno pretpostavci. $\blacksquare$

TEOREMA 2.6. Koreni x_1, x_2 su realni i važi $\mu < x_1 \leq x_2 < \nu$ akko je

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a f(\mu) > 0 \\ a f(\nu) > 0 \\ \mu < -\frac{b}{2a} < \nu. \end{cases}$$

PRIMER 2.10. Za koje $k \in \mathbb{R}$ su oba korena jednačine

$$x^2 - 6kx + 9k^2 - 2k + 2 = 0$$

veća od 3?

REŠENJE. Prema Teoremi 2.3. za $k > 11/9$ je $3 < x_1 \leq x_2$.

PRIMER 2.11. Za koje $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ koreni jednačine $kx^2 + 2(k-1)x - 2 = 0$, zadovoljavaju uslov $x_1 < 3 < x_2$?

REŠENJE. Prema Teoremi 2.5. za $k \in \left(0, \frac{8}{15}\right)$ je $x_1 < 3 < x_2$.

PRIMER 2.12. Naći $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tako da se oba korena jednačine $(k-1)x^2 - 2(k+2)x + k = 0$, nalaze u intervalu $(-1, 2)$.

REŠENJE. Prema Teoremi 2.6. za $k \in \left[-\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}\right) \cup (12, +\infty)$ je $-1 < x_1 \leq x_2 < 2$.

PRIMER 2.13. Data je kvadratna jednačina $(2-k)x^2 - 3kx + 2k = 0$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Naći $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ za koje je:

- (a) bar jedan koren jednačine veći od -1 ;
- (b) samo jedan koren jednačine veći od 1 ;
- (c) samo veći koren jednačine u intervalu $(-1, 2)$.

REŠENJE. (a) Naći $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ za koje je $x_1 < -1 < x_2$ ili $-1 < x_1 \leq x_2$ ili $x_1 = -1 < x_2$. Ako za $k \in R_1$ važi $x_1 < -1 < x_2$, za $k \in R_2$ važi $-1 < x_1 \leq x_2$ i za $k \in R_3$ važi $x_1 = -1 < x_2$, konačno rešenje je da za $k \in R_1 \cup R_2 \cup R_3$ važi da je bar jedan koren date jednačine veći od -1 .

(b) Naći $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ za koje je $x_1 < 1 < x_2$ ili $x_1 = 1 < x_2$ ili $1 < x_1 = x_2$. Ako za $k \in R_1$ važi $x_1 < 1 < x_2$, za $k \in R_2$ važi $x_1 = 1 < x_2$ i za $k \in R_3$ važi $1 < x_1 = x_2$, konačno rešenje je da za $k \in R_1 \cup R_2 \cup R_3$ važi da je samo jedan koren date jednačine veći od 1 .

(c) Naći $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ za koje je $x_1 < -1 < x_2$ i $x_1 < x_2 < 2$. Ako za $k \in R_1$ važi $x_1 < -1 < x_2$ i za $k \in R_2$ važi $x_1 < x_2 < 2$, konačno rešenje je da za $k \in R_1 \cap R_2$ važi da je samo veći koren date jednačine u intervalu $(-1, 2)$.

2.4. KVADRATNA FUNKCIJA KONSTANTNOG ZNAKA NA DATOM INTERVALU

Posmatrajmo kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$. Kvadratna funkcija $f(x)$ je pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$ ako je $D < 0$ i $a > 0$. Kvadratna funkcija $f(x)$ je negativna za svako $x \in \mathbb{R}$ ako je $D < 0$ i $a < 0$. Neka su μ, ν , $\mu < \nu$ dati realni brojevi. Određujemo uslove pod kojima je $f(x) \leq 0$ za svako $x \in (\mu, \nu)$ ili za svako $x < \mu$ ili za svako $x > \nu$.

PRIMER 2.14. Odrediti vrednost realnog parametra m za koje nejednakost

$$(4m-3)x^2 + 2(3m-2)x + 7-6m > 0, \quad m \neq \frac{3}{4},$$

važi za svako $x \in \mathbb{R}$.

REŠENJE. $\frac{25}{33} < m < 1$

TEOREMA 2.7. *Nejednakost $ax^2 + bx + c < 0$ važi za svako $x \in (\mu, \nu)$ ako i samo ako je*

$$(7_1) \begin{cases} D < 0 \\ a < 0 \end{cases} \vee (7_2) \begin{cases} a > 0 \\ f(\mu) \leq 0 \\ f(\nu) \leq 0 \end{cases} \vee (7_3) \begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ f(\mu) \leq 0 \\ \frac{b}{2a} < \mu \end{cases} \vee (7_4) \begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ f(\nu) \leq 0 \\ \frac{b}{2a} > \nu \end{cases} \\ \vee (7_5) \begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ \frac{b}{2a} \leq \mu \end{cases} \vee (7_6) \begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ \frac{b}{2a} \geq \nu \end{cases} \quad (\text{SLIKA 14})$$

ako i samo ako

$$\begin{cases} D < 0 \\ a < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ f(\mu) \leq 0 \\ f(\nu) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ f(\mu) \leq 0 \\ \frac{b}{2a} \leq \mu \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ f(\nu) \leq 0 \\ \frac{b}{2a} \geq \nu \end{cases}$$

Da bi odredili uslove (7_1) - (7_6) pod kojima važi $f(x) < 0$ za sako $x \in (\mu, \nu)$, razmatramo svaki od šest karakterističnih slučajeva grafika kvadratne funkcije prikazanih na slikama 9., 10. i 11. odnosno šest slučajeva:

$$(i) a > 0, D > 0 \quad (ii) a > 0, D = 0 \quad (iii) a > 0, D < 0$$

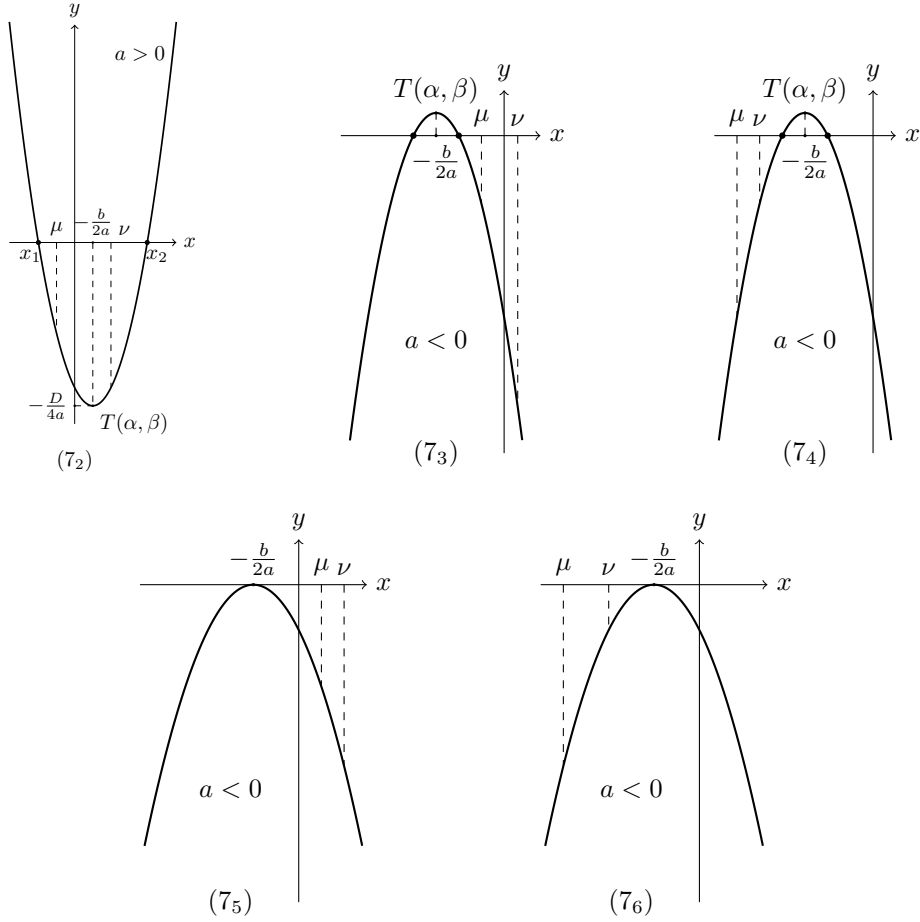
$$(iv) a < 0, D > 0 \quad (v) a < 0, D = 0 \quad (vi) a < 0, D < 0$$

Dolazimo do zaključka da za (ii) i za (iii) je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, što dakle nisu uslovi koji su nam neophodni. S druge strane, za $(vi) \Leftrightarrow (7_1)$ je $f(x) < 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, pa i za svako $x \in (\mu, \nu)$. Dalje, ako važi (i) ili (iv) posmatramo pet mogućih rasporeda korena $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kvadratne jednačine i brojeva μ, ν :

$$(1) \mu < \nu \leq x_1 < x_2 \quad (2) \mu < x_1 < \nu < x_2 \quad (3) x_1 \leq \mu < \nu \leq x_2$$

$$(4) x_1 < \mu < x_2 < \nu \quad (5) x_1 < x_2 \leq \mu < \nu$$

i ispitujemo za koji od njih će važiti da je $f(x) < 0$ za svako $x \in (\mu, \nu)$. Dolazimo do zaključka da za (i) jedini mogući slučaj je (3) (Slika (14)- (7_2)). Prema Teoremi 2.5, važiće $(i) \wedge (3) \Leftrightarrow (7_2)$. Za (iv) jedini mogući slučajevi su (1) ili (5) (Slika (14)- (7_3) i (7_4)). Prema Teoremi 2.3, važiće $(iv) \wedge (1) \Leftrightarrow (7_4)$, dok prema Teoremi 2.4. važi $(iv) \wedge (5) \Leftrightarrow (7_3)$. Konačno, ako važi (v) , $f(x) < 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$. Prema tome, ako je $\mu < \nu \leq -\frac{b}{2a}$ ili $-\frac{b}{2a} \leq \mu < \nu$ imamo da je $f(x) < 0$ za $x \in (\mu, \nu)$, odakle dobijamo uslove (7_6) odnosno (7_5) (Slika (14)- (7_6) i (7_5)).

Slika 14: Nejednakost $ax^2 + bx + c < 0$ važi za svako $x \in (\mu, \nu)$

TEOREMA 2.8. Nejednakost $ax^2 + bx + c < 0$ važi za svako $x < \mu$ ako i samo ako je

$$(8_1) \begin{cases} D < 0 \\ a < 0 \end{cases} \quad \vee \quad (8_2) \begin{cases} a < 0 \\ D > 0 \\ f(\mu) \leq 0 \\ -\frac{b}{2a} > \mu \end{cases} \quad \vee \quad (8_3) \begin{cases} a < 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq \mu \end{cases} \quad (\text{SLIKA 15})$$

ako i samo ako je

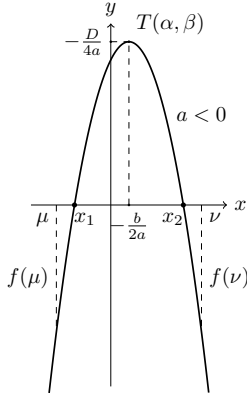
$$\begin{cases} D < 0 \\ a < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ f(\mu) \leq 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq \mu \end{cases}$$

Da bi odredili uslove (8_1) , (8_2) , (8_3) pod kojima važi $f(x) < 0$ za svako $x < \mu$, razmatramo svaki od šest oblika kvadratne funkcije prikazanih na slikama 9., 10. i 11. odnosno slučajeve:

$$(i) a > 0, D > 0 \quad (ii) a > 0, D = 0 \quad (iii) a > 0, D < 0$$

$$(iv) a < 0, D > 0 \quad (v) a < 0, D = 0 \quad (vi) a < 0, D < 0$$

Dolazimo do zaključka da za (ii) i za (iii) je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, što dakle nisu uslovi koji su nam neophodni. S druge strane, za $(vi) \Leftrightarrow (8_1)$ je $f(x) < 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, pa i za svako $x < \mu$.



Slika 15: Nejednakost $ax^2 + bx + c < 0$ važi za svako $x < \mu$ i za svako $x > \nu$

Dalje, za (i) i (iv) posmatramo tri moguća rasporeda korena $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kvadratne jednačine i broja μ :

$$(1) \mu \leq x_1 < x_2 \quad (2) x_1 < \mu < x_2 \quad (3) x_1 < x_2 \leq \mu$$

i ispitujemo za koji od njih će važiti da je $f(x) < 0$ za svako $x < \mu$. Dolazimo do zaključka da

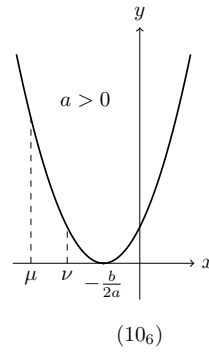
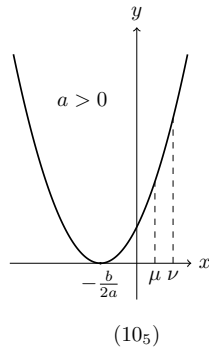
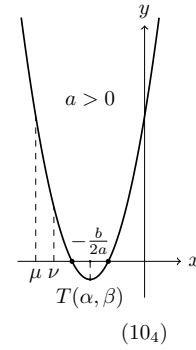
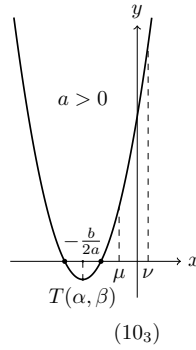
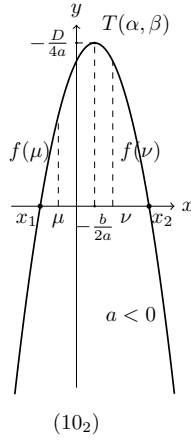
- za (iv) , važi $f(x) < 0$ za svako $x < \mu$ jedino u slučaju (1) . Prema Teoremi 2.3. važi $(iv) \wedge (1) \Leftrightarrow (8_2)$.
- za (i) ni u jednom od slučajeva (1) , (2) ili (3) neće važiti $f(x) < 0$ za svako $x < \mu$.
- za (v) , kako je $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, ako je $\mu \leq x_1 = x_2$ imamo da je $f(x) < 0$ za $x < \mu$, odakle dobijamo uslove (8_3) .

TEOREMA 2.9. Nejednakost $ax^2 + bx + c < 0$ važi za svako $x > \nu$ ako i samo ako je

$$\left\{ \begin{array}{l} D < 0 \\ a < 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ D > 0 \\ f(\nu) \leq 0 \\ -\frac{b}{2a} < \nu \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq \nu \end{array} \right\} \quad (\text{SLIKA 15})$$

ako i samo ako je

$$\left\{ \begin{array}{l} D < 0 \\ a < 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ D \geq 0 \\ f(\nu) \leq 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq \nu \end{array} \right\}$$



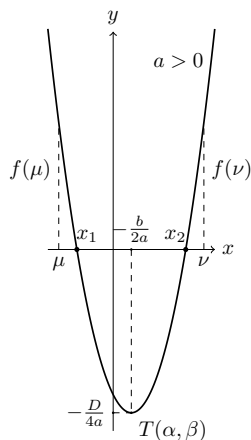
Slika 16: Nejednakost $ax^2 + bx + c > 0$ važi za svako $x \in (\mu, \nu)$

TEOREMA 2.10. Nejednakost $ax^2 + bx + c > 0$ važi za svako $x \in (\mu, \nu)$ ako i samo ako je

$$(10_1) \begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee (10_2) \begin{cases} a < 0 \\ f(\mu) \geq 0 \\ f(\nu) \geq 0 \end{cases} \vee (10_3) \begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ f(\mu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < \mu \end{cases} \vee (10_4) \begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ f(\nu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > \nu \end{cases} \\ \vee (10_5) \begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq \mu \end{cases} \vee (10_6) \begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq \nu \end{cases} \quad (\text{SLIKA 16})$$

ako i samo ako je

$$\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ f(\mu) \geq 0 \\ f(\nu) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ f(\mu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq \mu \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ f(\nu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq \nu \end{cases}$$



Slika 17: Nejednakost $ax^2 + bx + c > 0$ važi za svako $x < \mu$ i za svako $x > \nu$

TEOREMA 2.11. Nejednakost $ax^2 + bx + c > 0$ važi za svako $x > \nu$ ako i samo ako je

$$\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ f(\nu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < \nu \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq \nu \end{cases} \quad (\text{SLIKA 17})$$

ako i samo ako je

$$\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ f(\nu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq \nu \end{cases}$$

TEOREMA 2.12. Nejednakost $ax^2 + bx + c > 0$ važi za svako $x < \mu$ ako i samo ako je

$$\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ f(\mu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > \mu \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D = 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq \mu \end{cases} \quad (\text{SLIKA 17})$$

ako i samo ako je

$$\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ f(\mu) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq \mu \end{cases}$$

PRIMER 2.15. Odrediti sve vrednosti $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ za koje nejednakost

$$kx^2 - 4x + 2k - 1 > 0$$

važi za:

(a) svako $x > 0$; (b) svako $x \in (-3, -1)$; (c) svako $x < 1$.

REŠENJE. (a) $k \in \left(\frac{1 + \sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$. Prema Teoremi 2.11. nejednakost važi za svako $x > 0$ ako i samo ako

$$\begin{cases} D = 4(-2k^2 + k + 4) < 0 \\ a = k > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = k > 0 \\ D = 4(-2k^2 + k + 4) \geq 0 \\ f(0) = 2k - 1 \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{2}{k} \leq 0 \end{cases}$$

(b) $k \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Prema Teoremi 2.10. nejednakost važi za svako $x \in (-3, -1)$ ako i samo ako

$$\begin{cases} D = 4(-2k^2 + k + 4) < 0 \\ a = k > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = k < 0 \\ f(-3) = 11(k + 1) \geq 0 \\ f(-1) = 3(k + 1) \geq 0 \end{cases} \quad \vee$$

$$\begin{cases} a = k > 0 \\ D = 4(-2k^2 + k + 4) \geq 0 \\ f(-3) = 11(k + 1) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{2}{k} \leq -3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = k > 0 \\ D = 4(-2k^2 + k + 4) \geq 0 \\ f(-1) = 3(k + 1) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{2}{k} \geq -1 \end{cases}$$

(c) $k \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$. Prema Teoremi 2.12. nejednakost važi za svako $x < 1$ ako i samo ako

$$\begin{cases} D = 4(-2k^2 + k + 4) < 0 \\ a = k > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = k > 0 \\ D = 4(-2k^2 + k + 4) \geq 0 \\ f(1) = 3k - 5 \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{2}{k} \geq 1 \end{cases}$$

3. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC PRIRODAN BROJ

Uvedimo najpre definiciju stepena realnog broja prirodnim brojem:

DEFINICIJA 3.1. *Neka je $a \in \mathbb{R}$.*

(1) $a^1 = a$,

(2) *za svako $m \in \mathbb{N}$ je $a^{m+1} = a^m \cdot a$.*

Osnovna svojstva stepenovanja realnog broja prirodnim brojem su:

Za svako $a, b \in \mathbb{R}$ i svako $m, n \in \mathbb{N}$ važi:

(S.N.1.) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(S.N.2.) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(S.N.3.) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

Pored ovih osnovnih svojstva, za realan broj $a \neq 0$ i prirodne brojeve m, n važi:

(S.N.4a.) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, ako je $m > n$, tj. $m - n \in \mathbb{N}$.

(S.N.4b.) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, ako je $m < n$, tj. $n - m \in \mathbb{N}$.

(S.N.5.) $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$, ako je $b \in \mathbb{R}$.

(S.N.6a.) ako je $a > 1$, onda $a^m > 1$ za svako $m \in \mathbb{N}$.

(S.N.6b.) ako je $0 < a < 1$, onda $a^m < 1$ za svako $m \in \mathbb{N}$.

(S.N.7a.) ako je $a > 1$ i $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ tada je $a^m > a^n$.

(S.N.7b.) ako je $0 < a < 1$ i $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ tada je $a^m < a^n$.

(S.N.8a.) ako je $x_1 < x_2$ i $m \in \mathbb{N}$ tada je $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$.

(S.N.8b.) ako je $0 < x_1 < x_2$ i $m \in \mathbb{N}$ tada je $0 < x_1^{2m} < x_2^{2m}$;

ako je $x_1 < x_2 < 0$ i $m \in \mathbb{N}$ tada je $0 < x_2^{2m} < x_1^{2m}$.

Sva navedena svojstva se pokazuju direktno iz Definicije 3.1. i/ili koristeći princip matematičke indukcije.

► (S.N.1.): $m \in \mathbb{N}$ fiksirano - dokaz indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^1 \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^m \cdot a \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^{m+1}$$

Pretpostavimo da važi za neko $n = k \in \mathbb{N}$, tj. da je $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ i dokažimo da važi za $n = k + 1$:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{k+1} \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^m \cdot a^k \cdot a \stackrel{(IP)}{=} a^{m+k} \cdot a \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^{m+k+1} = a^{m+n}$$

► (S.N.3.): dokaz indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$:

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^1 \stackrel{(D.3.1.)}{=} a \cdot b \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^1 \cdot b^1 = a^n \cdot b^n$$

Pretpostavimo da važi za neko $n = k \in \mathbb{N}$, tj. da je $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$ i dokažimo da važi za $n = k + 1$:

$$(a \cdot b)^{k+1} \stackrel{(D.3.1.)}{=} (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b) \stackrel{(IP)}{=} a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = a^k \cdot a \cdot b^k \cdot b \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^{k+1} b^{k+1}$$

► (S.N.2a.): $m \in \mathbb{N}$ fiksirano - dokaz indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$:

$$(a^m)^n = (a^m)^1 \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^m = a^{m \cdot n}$$

Pretpostavimo da važi za neko $n = k \in \mathbb{N}$, tj. da je $(a^m)^k = a^{mk}$ i dokažimo da važi za $n = k + 1$:

$$(a^m)^n = (a^m)^{k+1} \stackrel{(D.3.1.)}{=} (a^m)^k \cdot a^m \stackrel{(IP)}{=} a^{mk} \cdot a^m \stackrel{(S.N.1.)}{=} a^{mk+m} = a^{m(k+1)} = a^{mn}$$

► (S.N.2b.): $n \in \mathbb{N}$ fiksirano - dokaz indukcijom po $m \in \mathbb{N}$. Za $m = 1$:

$$(a^1)^n \stackrel{(D.3.1.)}{=} a^n = a^{m \cdot n}$$

Pretpostavimo da važi za neko $m = k \in \mathbb{N}$, tj. da je $(a^k)^n = a^{kn}$ i dokažimo da važi za $m = k + 1$:

$$(a^{k+1})^n \stackrel{(D.3.1.)}{=} (a^k \cdot a)^n \stackrel{(S.N.3.)}{=} (a^k)^n \cdot a^n \stackrel{(IP)}{=} a^{kn} \cdot a^n \stackrel{(S.N.1.)}{=} a^{kn+n} = a^{(k+1)n} = a^{mn}$$

► (S.N.4a.): neka je $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, $\frac{a^m}{a^n} \stackrel{(S.N.1.)}{=} \frac{a^n a^{m-n}}{a^n} = a^{m-n}$.

► (S.N.4b.): neka je $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $\frac{a^m}{a^n} \stackrel{(S.N.1.)}{=} \frac{a^m}{a^m a^{n-m}} = \frac{1}{a^{m-n}}$.

► (S.N.5.): dokaz indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ važi po Definiciji 3.1. Pretpostavimo da važi za neko $n = k \in \mathbb{N}$ i dokažimo da važi za $n = k + 1$:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} \stackrel{(D.3.1.)}{=} \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{b}{a} \stackrel{(IP)}{=} \frac{b^k}{a^k} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^k \cdot b}{a^k \cdot a} \stackrel{(D.3.1.)}{=} \frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}$$

► (S.N.6a.): Neka je $a > 1$. Dokaz indukcijom po $m \in \mathbb{N}$. Za $m = 1$ je prema Definiciji 3.1. $a^1 = a > 1$. Neka je $a^k > 1$ za $k \in \mathbb{N}$ i dokažimo da je $a^{k+1} > 1$. Kako je $a > 1$ iz $a^k > 1$ sledi $a^k \cdot a > a$, odnosno prema Definiciji 3.1. da je $a^{k+1} > a > 1$.

► (S.N.7a.): Neka je $a > 1$ i $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Tada je $m - n \in \mathbb{N}$, i imamo prema (S.N.6a) da je $a^{m-n} > 1$, odnosno da je $a^{m-n} \cdot a^n > a^n$, odakle prema (S.N.1.) sledi da je $a^m > a^n$.

► (S.N.8a.): Da bi pokazali (S.N.8a.) treba pokazati

(i) ako je $0 \leq x_1 < x_2$, onda je za svako $m \in \mathbb{N}$, $x_1^m < x_2^m$;

(ii) ako je $x_1 < 0 < x_2$, onda je za svako $m \in \mathbb{N}$, $x_1^{2m+1} < 0 < x_2^{2m+1}$;

(iii) ako je $x_1 < x_2 \leq 0$, onda je $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$ za svako $m \in \mathbb{N}$.

(I): Ako je $x_1 = 0$, tvrđenje važi jer je $x_1^m = 0$ i $x_2^m > 0$. Dokažimo indukcijom da $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1^m < x_2^m$. Za $m = 1$ važi prema Definiciji 3.1. Pretpostavimo da je $x_1^m < x_2^m$ za neko $m \in \mathbb{N}$ i dokažimo da je $x_1^{m+1} < x_2^{m+1}$. Pre svega, iz (IP) kako je $x_1 > 0$ imamo da je $x_1^m x_1 < x_2^m x_1$, dok iz $x_1 < x_2$, kako je $x_2^m > 0$ imamo da je $x_2^m x_1 < x_2^m x_2$. Dakle,

$$x_1^{m+1} \stackrel{(D.3.1.)}{=} x_1^m \cdot x_1 \stackrel{(IP)}{<} x_2^m \cdot x_1 < x_2^m \cdot x_2 \stackrel{(D.3.1.)}{=} x_2^{m+1}$$

(II): važi jer je proizvod neparnog broja negativnih brojeva negativan, a proizvod neparnog broja pozitivnih brojeva pozitivan broj.

(III): ako je $x_1 < x_2 \leq 0$, onda iz $0 \leq -x_2 < -x_1$ i prethodno dokazane nejednakosti za pozitivne brojeve, imamo da je

$$(-x_2)^{2m+1} < (-x_1)^{2m+1} \stackrel{(S.N.3.)}{\Rightarrow} (-1)^{2m+1} x_2^{2m+1} < (-1)^{2m+1} x_1^{2m+1}$$

odnosno $-x_2^{2m+1} < -x_1^{2m+1}$, odakle sledi $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$.

► (S.N.8b.): Da bi pokazali (S.N.8b.) treba pokazati:

(i) ako je $0 \leq x_1 < x_2$, onda je za svako $m \in \mathbb{N}$, $x_1^m < x_2^m$;

(iv) ako je $x_1 < x_2 \leq 0$, onda je $x_2^{2m} < x_1^{2m}$ za svako $m \in \mathbb{N}$.

(IV): Iz $0 \leq -x_2 < -x_1$ i prethodno dokazane nejednakosti za pozitivne brojeve, imamo da je

$$(-x_2)^{2m} < (-x_1)^{2m} \stackrel{(S.N.3.)}{\Rightarrow} (-1)^{2m} x_2^{2m} < (-1)^{2m} x_1^{2m} \Rightarrow x_2^{2m} < x_1^{2m}$$

3.1. STEPENA FUNKCIJA SA PRIRODNIM IZLOŽIOCEM

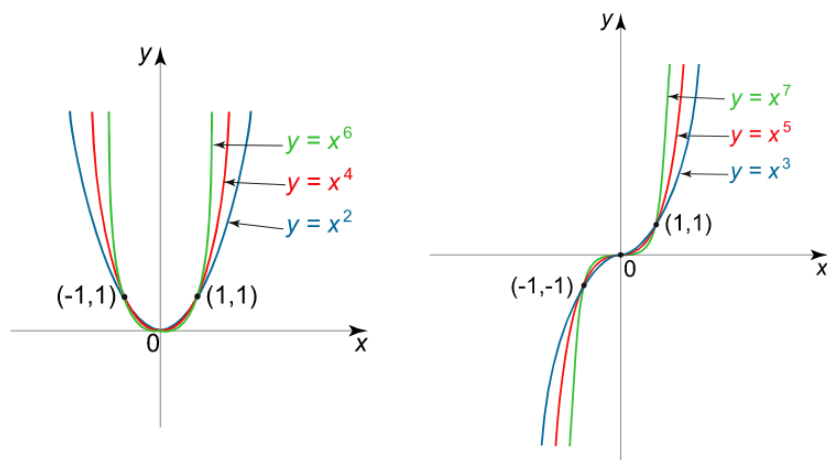
DEFINICIJA 3.2. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana formulom $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, naziva se stepena funkcija sa prirodnim izloziocem.

Posmatrajmo najpre funkciju $f(x) = x^{2n+1}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x , tj. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
- Funkcija f je neparna, tj. za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$f(-x) = (-x)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} x^{2n+1} = -x^{2n+1} = -f(x)$$

- $f(x) > 0$ za $x > 0$ i $f(x) < 0$ za $x < 0$
- $f(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$
- Funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ (prema (S.N.8a))



Slika 18: Stepena funkcija sa prirodnim izložiocem

Posmatrajmo sada funkciju $f(x) = x^{2n}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x
- Funkcija f je parna, tj. za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$f(-x) = (-x)^{2n} = (-1)^{2n} x^{2n} = x^{2n} = f(x)$$

- $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $f(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$
- Funkcija f je strogo rastuća na $[0, +\infty)$ i strogo opadajuća na $(-\infty, 0]$ (prema (S.N.8b)).

4. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC CEO BROJ

DEFINICIJA 4.1. Neka je $a \in \mathbb{R}$.

- (1) $a^1 = a$,
- (2) za svako $m \in \mathbb{N}$ je $a^{m+1} = a^m \cdot a$;
- (3) za svako $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je $a^0 = 1$;
- (4) za svako $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $m \in \mathbb{N}$ je $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$;

Pri definisanju stepenovanja celobrojnim izložiocem, a zatim i pri definisanju stepenovanja racionalnim izložiocem, vodi se računa da se sačuvaju svojstva stepenovanja prirodnim brojem (S.N.1.), (S.N.2.) i (S.N.3.).

STAV 4.1. Za svako $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i svako $n, m \in \mathbb{N}$ važi

$$(S.N.4.) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

DOKAZ. Ako je $m > n$, (S.N.4.) očigledno važi prema Definiciji 4.1. Ako je $m = n$, prema Definiciji 4.1. je $a^{m-n} = a^0 = 1$, a sa druge strane $a^m/a^m = 1$. Ako je $m < n$, prema (S.N.4b.) je

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

što je dalje prema Definiciji 4.1. (uzevši u obzir da je $n - m \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 4.1. *Ako je $m, n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in \mathbb{R}$ ili ako je bar jedan od brojeva m, n iz $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ i $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tada važi*

$$(S.Z.1.) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(S.Z.2.) \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$(S.Z.3.) \quad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$

DOKAZ. Pokažimo najpre svojstvo (S.Z.3.). Za $m \in \mathbb{N}$ svojstvo važi prema (S.N.2.), a za $m = 0$ očigledno važi prema Definiciji 4.1. Za $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$(a \cdot b)^m = (a \cdot b)^{-k} \stackrel{(D.4.1.)}{=} \frac{1}{(a \cdot b)^k} \stackrel{(S.N.3.)}{=} \frac{1}{a^k b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} \stackrel{(D.4.1.)}{=} a^{-k} \cdot b^{-k} = a^m \cdot b^m$$

Da bi pokazali svojstva (S.Z.1.) i (S.Z.2.) razlikovaćemo sledeće slučajeve:

- (1) $m, n \in \mathbb{N}$
- (2) $m \in \mathbb{N}$, $n = 0$
- (3) $m \in \mathbb{N}$, $n = -l$, $l \in \mathbb{N}$
- (4) $m = 0$, $n = -l$, $l \in \mathbb{N}$
- (5) $m = 0$, $n \in \mathbb{N}$
- (6) $m = 0$, $n = 0$
- (7) $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$
- (8) $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$, $n = 0$
- (9) $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$, $n = -l$, $l \in \mathbb{N}$

Slučajevi (2), (4), (5), (6) i (8) lako se pokazuju koristeći da je prema Definiciji 4.1. $a^0 = 1$ i svojstva stepenovanja prirodnim brojem. Dokazaćemo najpre slučaj (7).

(7): $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(S.Z.1.): \quad a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^n \stackrel{(D.4.1.)}{=} \frac{1}{a^k} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^k} \stackrel{(S.N.4.)}{=} a^{n-k} = a^{n+(-k)} = a^{n+m}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(S.Z.2.): } (a^m)^n &= (a^{-k})^n \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} \left(\frac{1}{a^k}\right)^n \stackrel{\text{(S.N.5.)}}{=} \frac{1}{(a^k)^n} \\
 &\stackrel{\text{(S.N.2.)}}{=} \frac{1}{a^{kn}} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} a^{-kn} = a^{(-k)n} = a^{mn}
 \end{aligned}$$

U slučaju (3) svojstva (S.Z.1.), (S.Z.2.) pokazuju se analogno prethodnom. Ostaje da dokažemo slučaj (9).

(9): $m = -k, k \in \mathbb{N}, n = -l, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \text{(S.Z.1.): } a^m \cdot a^n &= a^{-k} \cdot a^{-l} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^l} = \frac{1}{a^k \cdot a^l} \\
 &\stackrel{\text{(S.N.1.)}}{=} \frac{1}{a^{k+l}} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} a^{-(k+l)} = a^{(-k)+(-l)} = a^{n+m} \\
 \text{(S.Z.2.): } (a^m)^n &= (a^{-k})^{-l} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} \left(\frac{1}{a^k}\right)^{-l} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^k}\right)^l} \stackrel{\text{(S.N.5.)}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^k}\right)^l} \\
 &= (a^k)^l \stackrel{\text{(S.N.2.)}}{=} a^{kl} = a^{(-k)(-l)} = a^{mn} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

TEOREMA 4.2. (i) Neka je $a > 1$. Ako je $m, n \in \mathbb{Z}, m < n$, tada je $a^m < a^n$.
(ii) Neka je $0 < a < 1$. Ako je $m, n \in \mathbb{Z}, m < n$, tada je $a^m > a^n$.

DOKAZ. Neka je $a > 1$ i $m, n \in \mathbb{Z}, m < n$. Treba pokazati da je $a^m < a^n$.

(i-1) Ako je $0 < m < n$ tvrdjenje važi prema (S.N.7a.).

(i-2) Ako je $0 = m < n$, tvrdjenje važi prema (S.N.6a.), jer je $a^n > 1 \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} a^0 = a^m$.

(i-3) Ako je $-k = m < 0 < n, k \in \mathbb{N}$ imamo prema (S.N.6a.) da je $a^k > 1$ i $a^n > 1$, pa je

$$a^m = a^{-k} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} \frac{1}{a^k} < 1 < a^n$$

(i-4) Ako je $-k = m < n = 0, k \in \mathbb{N}$, tada je $a^k > 1$, pa je

$$a^m = a^{-k} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} \frac{1}{a^k} < 1 \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{=} a^0 = a^n.$$

(i-5) Ako je $m < n < 0, m = -k, n = -l, k, l \in \mathbb{N}$ imamo da je $k > l$, pa je $a^k > a^l > 0$ prema svojstvu (S.N.7a.). Tada

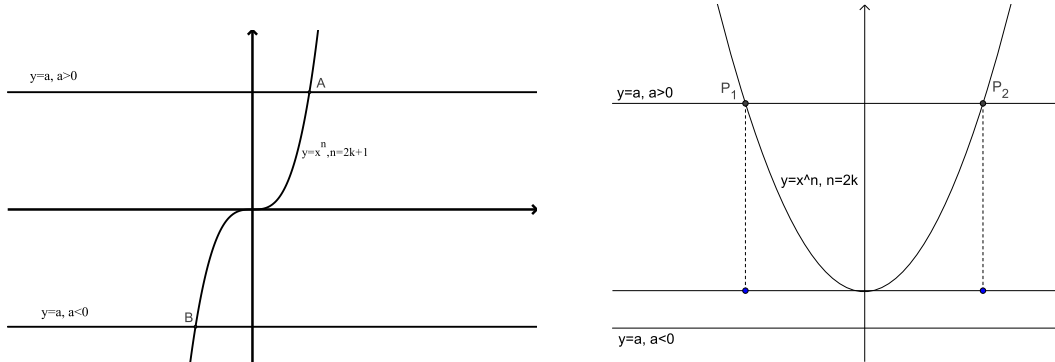
$$\frac{1}{a^k} < \frac{1}{a^l} \stackrel{\text{(D.4.1.)}}{\implies} a^{-k} = a^m < a^n = a^{-l}. \quad \blacksquare$$

5. POJAM I SVOJSTVA KORENA

Da bi definisali simbol n -tog korena od posebnog značaja je ispitati broj realnih rešenja jednačine

$$x^n = a \quad (9)$$

u zavisnosti od $a \in \mathbb{R}$.



Slika 19: Grafičko rešavanje jednačine $x^n = a$

Neka je n neparan prirodan broj. Prava $y = a$ za svako $a \in \mathbb{R}$ seče grafik funkcije $y = x^n$ u tačno jednoj tački.

Ako je n paran prirodan broj:

- (i) prava $y = a$ za $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ nema preseka sa grafikom funkcije $y = x^n$
- (ii) prava $y = a$ za $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ima dve zajedničke tačke sa grafikom funkcije $y = x^n$ - te dve tačke su simetrične u odnosu na Oy -osu, odnosno njihove apscise su dva suprotna realna broja
- (iii) prava $y = 0$ ima sa grafikom funkcije $y = x^n$, $n = 2k$ tačno jednu zajedničku tačku - koordinatni početak.

Ova razmatranja ukazuju na broj realnih rešenja jednačine $x^n = a$ u zavisnosti od $a \in \mathbb{R}$ i važe sledeće dve teoreme:

TEOREMA 5.1. Neka je $a \in \mathbb{R}$, a $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada jednačina (9):

- (1) ako je $a < 0$ nema realnih rešenja;
- (2) ako je $a = 0$ ima tačno jedno realno rešenje $x = 0$;
- (3) ako je $a > 0$ ima tačno dva realna rešenja suprotnog znaka.

TEOREMA 5.2. Neka je $a \in \mathbb{R}$, a $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Za svako $a \in \mathbb{R}$ jednačina (9) ima tačno jedno realno rešenje.

Koristeći Teoreme 5.1. i 5.2. možemo definisati simbol n -tog korena.

DEFINICIJA 5.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Simbol $\sqrt[n]{a}$ označava

- (1) jedinstveno realno rešenje jednačine $x^n = a$ ako je n neparan broj;
- (2) realno pozitivno rešenje jednačine $x^n = a$ ako je $a > 0$ i n paran broj;
- (3) $\sqrt[n]{0} = 0$.

Ako je n paran broj i $a > 0$, na osnovu Teoreme 5.1., jednačina (9) ima tačno jedno pozitivno rešenje, to je $\sqrt[n]{a}$ i tačno jedno negativno rešenje $-\sqrt[n]{a}$. Ako je n neparan broj i $a \in \mathbb{R}$, na osnovu Teoreme 5.2., jednačina (9) ima jedinstveno realno rešenje $\sqrt[n]{a}$. Dakle, važi

SVOJSTVO K.1. (i) Ako je $a \geq 0$, n paran prirodan broj, onda je

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (-\sqrt[n]{a})^n = a.$$

(ii) Ako je $a \in \mathbb{R}$, n neparan prirodan broj, onda je $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

TEOREMA 5.3. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}$ je bijekcija.

DOKAZ. (a) Pokažimo da je f injekcija. Neka je $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $f(x_1) = f(x_2)$, tj

$$x_1^{2n+1} = x_2^{2n+1} \tag{10}$$

Ako je $x_1 < x_2$, kako je f strogo rastuća biće $x_1^{2n+1} < x_2^{2n+1}$, što je u kontradikciji sa (10). Analogno, ako je $x_1 > x_2$, kako je f strogo rastuća biće $x_1^{2n+1} > x_2^{2n+1}$, što je u kontradikciji sa (10). Dakle, $x_1 = x_2$.

(b) Pokažimo da je f surjekcija. Kako za svako $y \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveno $x = \sqrt[2n+1]{y} \in \mathbb{R}$ za koje je prema (S.K.1.)-(ii) $f(x) = x^{2n+1} = (\sqrt[2n+1]{y})^{2n+1} = y$, funkcija f je surjekcija.

Dakle, f je bijektivno preslikavanje skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{R}$. ■

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ nije ni "1-1" ni "NA":

Zaista, na primer, važi $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ i $f(x_1) = f(-1) = 1 = f(1) = f(x_2)$, pa funkcija nije "1-1". S druge strane, za $y = -1 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takvo da je $x^{2n} = -1 = y$, pa funkcija nije ni "NA".

TEOREMA 5.4. (i) Funkcija $f_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f_1(x) = x^{2n}$ je bijekcija.

(ii) Funkcija $f_2 : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $f_2(x) = x^{2n}$ je bijekcija.

DOKAZ. (a) Pokažimo da je f_1 injekcija. Neka je $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $f(x_1) = f(x_2)$, tj.

$$x_1^{2n} = x_2^{2n} \tag{11}$$

Ako je $0 \leq x_1 < x_2$, kako je f_1 strogo rastuća biće $x_1^{2n} < x_2^{2n}$, što je u kontradikciji sa (11). Analogno, ako je $x_1 > x_2 \geq 0$, kako je f_1 strogo rastuća biće $x_1^{2n} > x_2^{2n}$, što je u kontradikciji sa (11). Dakle, $x_1 = x_2$.

(b) Funkcija $f_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je surjekcija, jer za svako $y \geq 0$ postoji jedinstven broj $x = \sqrt[n]{y} \geq 0$, takav da je prema (S.K.1.)-(i) $f_1(x) = x^{2n} = (\sqrt[n]{y})^{2n} = y$.

Dakle, f_1 je bijektivno preslikavanje skupa $[0, \infty)$ NA skup $[0, \infty)$. Analogno, f_2 je bijektivno preslikavanje skupa $(-\infty, 0]$ NA skup $[0, \infty)$ ■

Iz Teorema 5.3. i 5.4. sledi

TEOREMA 5.5. (i) Neka je $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada, $x_1^{2n} = x_2^{2n} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
(ii) Neka je $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada, $x_1^{2n} = x_2^{2n} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
(iii) Neka je $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada, $x_1^{2n+1} = x_2^{2n+1} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

SVOJSTVO K.2. Ako je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ neparno} \\ |a|, & n \text{ parno} \end{cases}$$

DOKAZ. Neka je $n = 2m + 1$. Kako je prema S.K.1.-(ii) $(\sqrt[n]{a^n})^n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$, prema Teoremi 5.5. je

$$\left(\sqrt[n]{a^{2m+1}}\right)^{2m+1} = a^{2m+1} \xLeftrightarrow{\text{(T.5.5.)-(iii)}} \sqrt[n]{a^{2m+1}} = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Neka je $n = 2m$. Da bi iskoristili S.K.1. i Teoremu 5.5. razlikujemo slučajeve $a < 0$ i $a > 0$.

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R}^+ : \quad & \left(\sqrt[n]{a^{2m}}\right)^{2m} \xLeftrightarrow{\text{(S.K.1.)}} a^{2m} \xLeftrightarrow{\text{(T.5.5.)-(i)}} \sqrt[n]{a^{2m}} = a = |a|. \\ a \in \mathbb{R}^- : \quad & \left(-\sqrt[n]{a^{2m}}\right)^{2m} \xLeftrightarrow{\text{(S.K.1.)}} a^{2m} \xLeftrightarrow{\text{(T.5.5.)-(ii)}} \sqrt[n]{a^{2m}} = -a = |a| \\ & \Rightarrow \sqrt[n]{a^{2m}} = -a = |a|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

SVOJSTVO K.3. Ako je $n \in \mathbb{N}$ paran i $a, b \geq 0$ ili ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan i $a, b \in \mathbb{R}$, onda je

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

DOKAZ. Kako je

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n \xLeftrightarrow{\text{(S.N.3.)}} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \xLeftrightarrow{\text{(S.K.1.)}} a \cdot b \xLeftrightarrow{\text{(S.K.1.)}} \left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^n$$

prema T.5.5. zaključujemo

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \blacksquare$$

SVOJSTVO K.4. Ako je $n \in \mathbb{N}$ paran i $a \geq 0, b > 0$ ili ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan i $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, onda je

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

DOKAZ. Prema T.5.5. važi traženo svojstvo, jer je

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} \frac{a}{b} \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} \stackrel{\text{(S.N.5.)}}{=} \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n \quad \blacksquare$$

SVOJSTVO K.5. Neka su $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Ako važi jedan od uslova:

- (1) n paran, $m > 0$ i $a \geq 0$,
- (2) n paran, $m \leq 0$ i $a > 0$,
- (3) n neparan, $m > 0$ i $a \in \mathbb{R}$,
- (4) n neparan, $m \leq 0$ i $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

onda je

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

DOKAZ. Prema T.5.5. važi traženo svojstvo, jer je

$$\left[(\sqrt[n]{a})^m\right]^n \stackrel{\text{(S.Z.2.)}}{=} (\sqrt[n]{a})^{mn} \stackrel{\text{(S.Z.2.)}}{=} \left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^m \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} a^m \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n \quad \blacksquare$$

SVOJSTVO K.6. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Ako je n paran i $a \geq 0$, ili ako je n neparan i $a \in \mathbb{R}$, onda je

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}.$$

DOKAZ. Prema T.5.5. važi traženo svojstvo jer je

$$(\sqrt[n]{a})^{mn} \stackrel{\text{(S.N.2.)}}{=} \left[(\sqrt[n]{a})^n\right]^m \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} a^m \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} \left[\sqrt[m]{a^m}\right]^{mn} \quad \blacksquare$$

SVOJSTVO K.7. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Ako je bar jedan od brojeva n, m paran i $a \geq 0$, ili ako su n, m neparni i $a \in \mathbb{R}$, onda je

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

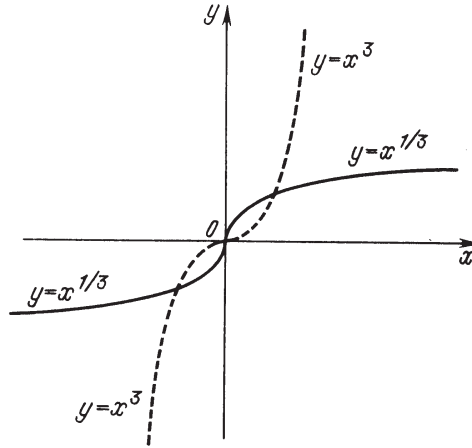
DOKAZ. Prema T.5.5. važi traženo svojstvo, jer je

$$\left[\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right]^{m \cdot n} \stackrel{\text{(S.N.2.)}}{=} \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \right)^n \right]^m \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} \left(\sqrt[m]{a} \right)^m \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} a \stackrel{\text{(S.K.1.)}}{=} \left(\sqrt[m]{a} \right)^{m \cdot n} \quad \blacksquare$$

5.1. FUNKCIJA $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$

(A) Prema Teoremi 5.3. funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}$ je bijekcija, pa postoji njena inverzna funkcija

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = \sqrt[2n+1]{y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$



Slika 20: Grafici uzajamno inverznih funkcija $y = x^3$ i $y = x^{1/3}$

Osnovna svojstva funkcije $h(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ su sledeća:

- Funkcija je definisana za sve realne vrednosti x
- Funkcija je neparna, tj. za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$h(-x) = \sqrt[2n+1]{-x} = \sqrt[2n+1]{-1} \sqrt[2n+1]{x} = - \sqrt[2n+1]{x} = -h(x)$$

- $h(x) > 0$ za $x > 0$ i $h(x) < 0$ za $x < 0$
- $h(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$
- Funkcija je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ (prema T.1.6. kao inverzna funkcija strogo rastuće funkcije f)

(B) Prema Teoremi 5.4. funkcija $f_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f_1(x) = x^{2n}$ je bijekcija, pa postoji inverzna funkcija funkcije f_1

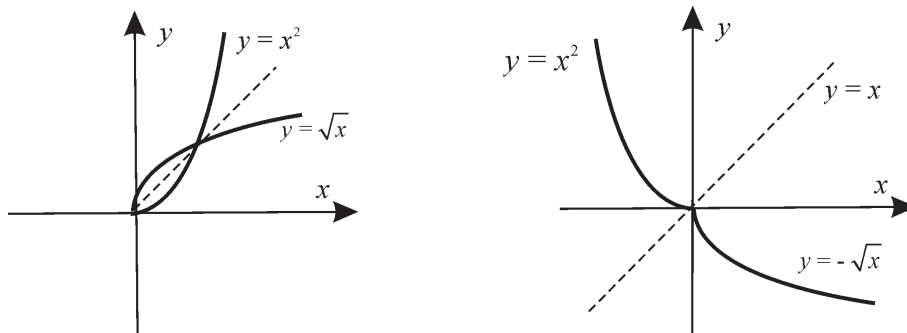
$$g_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad g_1(y) = \sqrt[2n]{y}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+.$$

Analogno, inverzna funkcija bijekcije

$$f_2 : \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f_2(x) = x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}_0^-,$$

je funkcija

$$g_2 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^-, \quad g_2(y) = -\sqrt[n]{y}, \quad y \in \mathbb{R}_0^+.$$



Slika 21: Grafici funkcija $f(x) = x^2, x \geq 0$ i $g(x) = x^2, x \leq 0$ i njenih inverznih funkcija

Na slici 21 prikazani su prvo grafici uzajamno inverznih funkcija

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = x^2, \quad \text{i} \quad f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

(obe funkcije su rastuće), a zatim grafici uzajamno inverznih funkcija (obe funkcije su opadajuće)

$$g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = x^2, \quad \text{i} \quad g^{-1} : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty), \quad g^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

Osnovna svojstva funkcije $g_1(x) = \sqrt[n]{x}$ su sledeća:

- Funkcija je definisana za $x \in [0, +\infty)$
- Funkcija nije ni parna ni neparna
- Funkcija je pozitivna na $(0, \infty)$ tj. $g_1(x) = \sqrt[n]{x} > 0$ za svako $x > 0$
- $\sqrt[n]{x} = 0$ ako i samo ako $x = 0$
- Funkcija je strogo rastuća na $[0, \infty)$ (prema T.1.6. kao inverzna funkcija strogo rastuće funkcije f_1)

6. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC RACIONALAN BROJ

DEFINICIJA 6.1. Neka su $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Ako važi jedan od uslova:

- (1) n paran, $m > 0$ i $a \geq 0$,
- (2) n paran, $m \leq 0$ i $a > 0$,
- (3) n neparan, $m > 0$ i $a \in \mathbb{R}$,
- (4) n neparan, $m \leq 0$ i $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

tada je

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ako važi jedan od uslova (1)-(4) iz Definicije 6.1. prema svojstvu korena K.5. važi $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

TEOREMA 6.1. Za svako $a, b \in \mathbb{R}^+$ i svako $p, q \in \mathbb{Q}$ važi:

- (S.Q.1.) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
- (S.Q.2.) $(a^p)^q = a^{pq}$;
- (S.Q.3.) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

DOKAZ. (S.Q.1.): Neka je $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a^p \stackrel{(D.6.1.)}{=} \sqrt[n]{a^m} \quad a^q \stackrel{(D.6.1.)}{=} \sqrt[l]{a^k}, \quad a^{p+q} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} = a^{\frac{ml+k n}{nl}} \stackrel{(D.6.1.)}{=} \sqrt[nl]{a^{ml+k n}}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} (a^p \cdot a^q)^{nl} &= \left(\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[l]{a^k} \right)^{nl} \stackrel{(S.Z.3.)}{=} \left(\sqrt[n]{a^m} \right)^{nl} \left(\sqrt[l]{a^k} \right)^{nl} \\ &\stackrel{(S.Z.2.)}{=} \left[\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^n \right]^l \left[\left(\sqrt[l]{a^k} \right)^l \right]^n \\ &\stackrel{(S.K.1.)}{=} (a^m)^l (a^k)^n \\ &\stackrel{(S.Z.2.)}{=} a^{ml} \cdot a^{kn} \stackrel{(S.Z.1.)}{=} a^{ml+kn} \end{aligned}$$

S druge strane, imamo da je

$$(a^{p+q})^{nl} = \left(\sqrt[nl]{a^{ml+kn}} \right)^{nl} \stackrel{(S.K.1.)}{=} a^{ml+kn}$$

Prema tome, $(a^{p+q})^{nl} = (a^p \cdot a^q)^{nl}$, odakle prema T.5.5. zaključujemo da je $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$.

(S.Q.2.): Neka je $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$. Tada je

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}} \right)^{\frac{k}{l}} \stackrel{(D.6.1.)}{=} \sqrt[l]{\left(a^{\frac{m}{n}} \right)^k} \stackrel{(D.6.1.)}{=} \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^k} \stackrel{(S.K.5.)}{=} \sqrt[l]{\sqrt[n]{(a^m)^k}} \stackrel{(S.N.2.)}{=} \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}}$$

i

$$a^{p \cdot q} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l}} = a^{\frac{mk}{nl}} \stackrel{(D.6.1.)}{=} \sqrt[nl]{a^{km}}.$$

Stepenovanjem sa $ln \in \mathbb{N}$ prethodne dve jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} \left[(a^p)^q \right]^{ln} &= \left[\sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} \right]^{ln} \stackrel{(S.N.2.)}{=} \left[\left(\sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} \right)^l \right]^n \\ &\stackrel{(S.K.1.)}{=} \left(\sqrt[n]{a^{mk}} \right)^n \stackrel{(S.K.1.)}{=} a^{mk} \end{aligned}$$

i

$$(a^{p \cdot q})^{ln} = \left(\sqrt[n]{a^{mk}} \right)^{ln} \stackrel{(S.K.1.)}{=} a^{mk}.$$

Dakle, $[(a^p)^q]^{ln} = (a^{p \cdot q})^{ln} \stackrel{(T.5.5.)}{\implies} (a^p)^q = a^{p \cdot q}.$

(S.Q.3.): Neka je $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (ab)^p &= (ab)^{\frac{m}{n}} \stackrel{(D.6.1.)}{=} \sqrt[n]{(ab)^m} \stackrel{(S.Z.3.)}{=} \sqrt[n]{a^m b^m} \stackrel{(S.K.3.)}{=} \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} \\ &\stackrel{(D.6.1.)}{=} a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^p \cdot b^p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 6.2. (i) Neka je $a > 1$. Ako je $r, q \in \mathbb{Q}$, $r < q$, tada je $a^r < a^q$.
(ii) Neka je $0 < a < 1$. Ako je $r, q \in \mathbb{Q}$, $r < q$, tada je $a^r > a^q$.

DOKAZ. Neka je $a > 1$, $r, q \in \mathbb{Q}$, $r < q$. Treba pokazati da je $a^r < a^q$. Neka je

$$r = \frac{m}{n} = \frac{m \cdot l}{n \cdot l}, \quad q = \frac{k}{l} = \frac{k \cdot n}{l \cdot n}, \quad m, k \in \mathbb{Z}, \quad n, l \in \mathbb{N}.$$

Tada iz pretpostavke da je $r < q$ zaključujemo da je

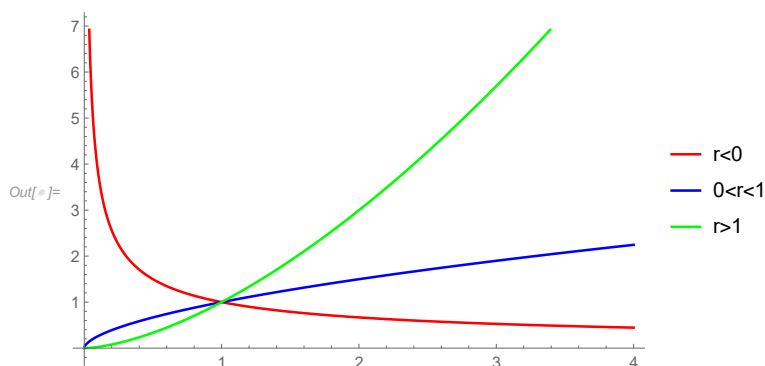
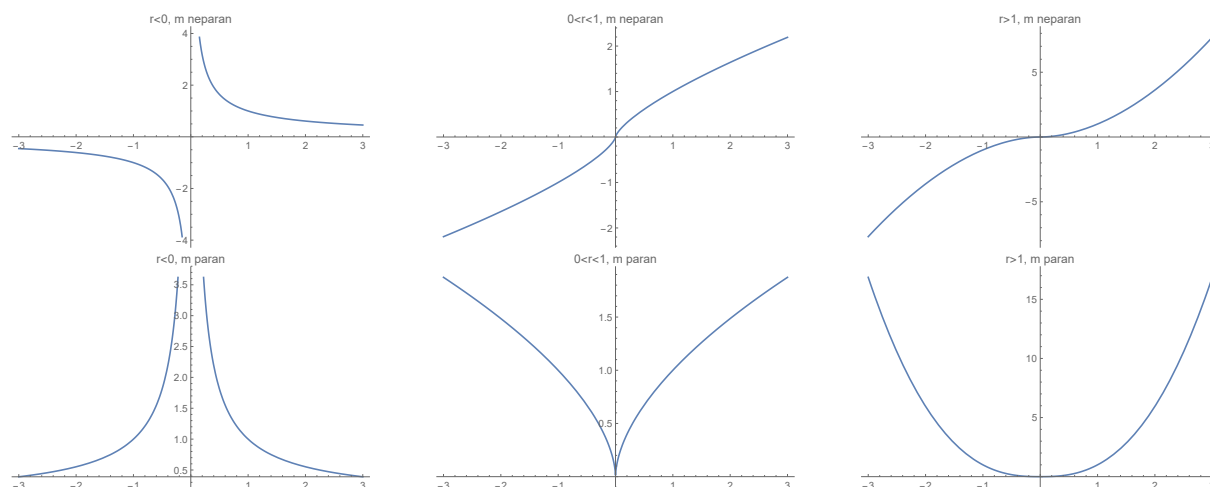
$$\frac{m}{n} < \frac{k}{l} \stackrel{nl \geq 0}{\implies} m \cdot l < k \cdot n.$$

Kako su $m \cdot l \in \mathbb{Z}$ i $k \cdot n \in \mathbb{Z}$ prema Teoremi 4.2. zaključujemo da je $a^{m \cdot l} < a^{k \cdot n}$. Onda, kako je $f(x) = \sqrt[nl]{x}$ strogo rastuća funkcija na $[0, \infty)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, imamo da je

$$\sqrt[nl]{a^{m \cdot l}} < \sqrt[nl]{a^{k \cdot n}} \iff a^r < a^q. \quad \blacksquare$$

6.1. FUNKCIJA $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$

Posmatrajmo sada funkciju $y = f(x) = x^r$, gde je $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$, odnosno funkciju $y = \sqrt[n]{x^m}$. Funkcija f je kompozicija funkcije $g(x) = x^m$ i funkcije $h(x) = \sqrt[n]{x}$, odnosno $f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^m) = \sqrt[n]{x^m}$, pa do osnovnih svojstva funkcije f dolazimo na osnovu svojstava funkcija g i h (videti poglavlje 3.1. i 5.1.) i osobina kompozicije funkcija.

Slika 22: Grafici funkcija $y = x^r$, $r = m/n$, $(m, n) = 1$ za n parnoSlika 23: Grafici funkcija $y = x^r$, $r = m/n$, $(m, n) = 1$ za n neparno

(1) Neka je n paran broj (m je tada neparan). Funkcija nije ni parna ni neparna.

(i) Ako je $m > 0$, oblast definisanosti funkcije je $D = [0, \infty)$ i strogo je rastuća na D ;

(ii) Ako je $m < 0$, oblast definisanosti funkcije je $D = (0, \infty)$ i strogo je opadajuća na D .

Grafici su skicirani na slici 22 za slučajeve $r > 1$, $0 < r < 1$, $r < 0$.

(2) Neka je n neparan broj. Funkcija je parna ako je m parno i neparna ako je m neparno.

(i) Ako je $m > 0$ funkcija je definisana za $x \in \mathbb{R}$. Za m neparno funkcija je strogo rastuća na $\mathbb{R}$, a za m parno funkcija je strogo opadajuća na $(-\infty, 0)$ i strogo rastuća na $(0, \infty)$;

(ii) Ako je $m < 0$ funkcija je definisana za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za m neparno funkcija je strogo opadajuća na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a za m parno funkcija je strogo rastuća na $(-\infty, 0)$ i strogo opadajuća na $(0, \infty)$.

U zavisnosti od toga da li je $r > 1$, $0 < r < 1$ i $r < 0$, kao i od toga da li je m parno ili neparno, imamo šest različitih grafika funkcije (slika 23).

MONOTONOST FUNKCIJE. Monotonost funkcije u svakom od slučajeva prikazanih na slikama 22 i 23 pokazuje se analogno. Pokažimo npr. monotonost funkcije $f(x) = \sqrt[2k+1]{x^m}$, ako je $m = -2l, l \in \mathbb{N}$. Dakle, posmatramo funkciju

$$f(x) = \sqrt[2k+1]{x^{-2l}} = \sqrt[2k+1]{\frac{1}{x^{2l}}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{x^{2l}}}$$

definisano na $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Za $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $x_1 < x_2$, kako je funkcija $y = x^{2l}$ strogo rastuća na $(0, \infty)$, i kako je funkcija $y = \sqrt[2k+1]{x}$ takodje strogo rastuća na $\mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned} 0 < x_1 < x_2 &\Rightarrow 0 < x_1^{2l} < x_2^{2l} \Rightarrow 0 < \sqrt[2k+1]{x_1^{2l}} < \sqrt[2k+1]{x_2^{2l}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[2k+1]{x_1^{2l}}} &> \frac{1}{\sqrt[2k+1]{x_2^{2l}}} \Rightarrow f(x_1) = \sqrt[2k+1]{x_1^m} > \sqrt[2k+1]{x_2^m} = f(x_2) \Rightarrow f \searrow \end{aligned}$$

Za $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 < x_2$, kako je funkcija $y = x^{2l}$ strogo opadajuća na $(-\infty, 0)$, i kako je funkcija $y = \sqrt[2k+1]{x}$ strogo rastuća na $\mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 < 0 &\Rightarrow x_1^{2l} > x_2^{2l} > 0 \Rightarrow \sqrt[2k+1]{x_1^{2l}} > \sqrt[2k+1]{x_2^{2l}} > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[2k+1]{x_1^{2l}}} &< \frac{1}{\sqrt[2k+1]{x_2^{2l}}} \Rightarrow f(x_1) = \sqrt[2k+1]{x_1^m} < \sqrt[2k+1]{x_2^m} = f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \end{aligned}$$

TEOREMA 6.3. Funkcija $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$ je neprekidna na $(0, +\infty)$.

DOKAZ: Neka je $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ je neprekidna na $(0, +\infty)$ kao inverzna funkcija neprekidne strogo monotono rastuće funkcije (prema Teoremi 1.3). Funkcija $g(t) = t^m$, $m \in \mathbb{Z}$ je neprekidna za $t \in (0, \infty)$ (jer su na $\mathbb{R}^+$ neprekidne funkcije $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ i $y = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$). Tada je funkcija $f(g(x)) = \sqrt[n]{x^m} = x^r$ neprekidna na $(0, +\infty)$. ■

7. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC REALAN BROJ

Postavlja se pitanje, može li se i za one brojeve $x \in \mathbb{R}$ koji nisu racionalni definisati a^x , ali tako da ostanu na snazi osnovna svojstva stepena. Odgovor na postavljeno pitanje je potvrđan, ali dokaz te činjenice nije jednostavan.

POJAM STEPENA SA REALNIM EKSPONENTOM

Da bi definisali stepen čiji je izložilac realan broj i eksponencijalnu funkciju $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, pokazaćemo najpre sledeća tvrđenja:

STAV 7.1. Neka je $a > 1$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $r \in \mathbb{Q}$ takvo da je $|r| < \delta$ važi $|a^r - 1| < \varepsilon$.

DOKAZ: Kako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-1/n} = 1$ (videti napomenu), za svako $\varepsilon > 0$ postoji $p = p(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tako da je prema Teoremi 6.2.

$$0 < a^{1/p} - 1 < \varepsilon, \quad 0 < 1 - a^{-1/p} < \varepsilon, \quad \text{za } a > 1.$$

Odavde sledi da je

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^{1/p} < 1 + \varepsilon. \quad (12)$$

Neka je r proizvoljan racionalan broj takav da je $|r| < 1/p$, tj. $-1/p < r < 1/p$. Tada, kako je za $a > 1$ funkcija a^r , $r \in \mathbb{Q}$ rastuća sledi

$$a^{-1/p} < a^r < a^{1/p}.$$

Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = 1/p > 0$ tako da za sve racionalne brojeve r koji zadovoljavaju uslov $|r| < \delta$ važe nejednakosti

$$1 - \varepsilon < a^{-1/p} < a^r < a^{1/p} < 1 + \varepsilon,$$

tj. $-\varepsilon < a^r - 1 < \varepsilon$. ■

Napomena. Neka je $a > 1$. Tada je $a^{1/n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Zaista, za $w_n = a^{1/n} - 1 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, korišćenjem Binomne formule i da je $a = (w_n + 1)^n$, važi

$$\begin{aligned} a &= (1 + w_n)^n = 1 + \binom{n}{1} w_n + \binom{n}{2} w_n^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} w_n^{n-1} + w_n^n > n w_n \\ \Rightarrow \quad 0 < w_n &< \frac{a}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1. \end{aligned}$$

TEOREMA 7.1. Neka je $a > 1$. Ako niz $\{r_n\}$ racionalnih brojeva konvergira, onda je niz $\{a^{r_n}\}$ takođe konvergentan.

DOKAZ: Kako je niz $\{r_n\}$ konvergentan on je ograničen, tj.

$$(\exists C > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < a^{r_n} \leq C. \quad (13)$$

Prema Stavu 7.1.

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall r \in \mathbb{Q}) \left(|r| < \delta \rightarrow |a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{C} \right). \quad (14)$$

Iz konvergencije niza $\{r_n\}$ za $\delta > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takvo da

$$(\forall n, m \geq n_\varepsilon) \quad |r_n - r_m| < \delta. \quad (15)$$

Iz (14) i (15) sledi da je

$$(\forall n, m \geq n_\varepsilon) \quad |a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{C}. \quad (16)$$

Kako je prema (S.Q.1) $a^{r_n} = a^{r_m} \cdot a^{r_n - r_m}$, iz (13) i (16) je onda

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m} (a^{r_n - r_m} - 1)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

za svako $n \geq n_\varepsilon$ i svako $m \geq n_\varepsilon$, tj. niz $\{a^{r_n}\}$ je Košijev, pa je konvergentan. ■

Ako je x proizvoljan realan broj, kako je skup $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, postoji niz racionalnih brojeva $\{r_n\}$ koji konvergira ka x . Uzevši u obzir ovu činjenicu i Teoremu 7.1. možemo definisati pojam stepena sa realnim eksponentnom.

DEFINICIJA 7.1. *Neka je $a > 0$. Neka je x proizvoljan realan broj i $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva koji konvergira ka x tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Tada stepen broja a realnim eksponentom x definisan je sa*

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}. \quad (17)$$

Ako je $a > 1$, onda granična vrednost (17) postoji prema Stavu 7.1. Ako je $0 < a < 1$, onda je $a^{r_n} = 1/b^{r_n}$, gde je $b = 1/a > 1$, odakle sledi da granična vrednost (17) postoji i za $a \in (0, 1)$, jer je $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{r_n} = b^x > 0$.

Korektnost Definicije 7.1. Definicija 7.1. je korektna, jer granična vrednost (17) prema Teoremi 7.1. postoji za svaki niz racionalnih brojeva $\{r_n\}$ koji konvergira ka $x \in \mathbb{R}$ i ne zavisi od izbora niza racionalnih brojeva $\{r_n\}$ koji konvergira ka x . Naime, neka je $\{q_n\}$ neki drugi niz racionalnih brojeva koji konvergira ka x . Pokažimo da je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{q_n}$$

Kako je prema (S.Q.1.) $a^{r_n} = a^{r_n - q_n} \cdot a^{q_n}$, dovoljno je pokazati da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n - q_n} = 1$. Neka je $q_n = r_n - q_n$. Znamo da $q_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ i pokažimo da $a^{q_n} \rightarrow 1$ kada $n \rightarrow \infty$. Kao u dokazu Stava 7.1. dobija se (12). Kako $q_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $-1/p < q_n < 1/p$ za svako $n \geq n_0$, pa je

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{p}} < a^{q_n} < a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

odakle sledi da je $|a^{q_n} - 1| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_0$, dakle $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{q_n} = 1$.

SVOJSTVA STEPENA ČIJI JE IZLOŽILAC REALAN BROJ

Pokazaćemo da sa uvedenom Definicijom 7.1. stepena čiji je izložilac realan broj, ostaju da važe osnovna svojstva stepena.

$$(S.R.1.) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad x, y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$(S.R.2.) \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}; \quad x, y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$(S.R.3.) \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x; \quad x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$$

SVOJSTVO (S.R.1.): Za svako $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

DOKAZ: Neka su $\{r_n\}$ i $\{\rho_n\}$ nizovi racionalnih brojeva takvi da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = y$. Tada je $\lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n + \rho_n) = x + y$ i prema Definiciji 7.1. je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} = a^x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\rho_n} = a^y, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n + \rho_n} = a^{x+y}.$$

Kako je prema svojstvu (S.Q.1.) stepena sa racionalnim izloziocem $a^{r_n + \rho_n} = a^{r_n} a^{\rho_n}$ to je

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n + \rho_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} \cdot a^{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\rho_n} = a^x \cdot a^y. \blacksquare$$

SVOJSTVO (S.R.3.): Za svako $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i svako $x \in \mathbb{R}$ važi $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

DOKAZ: Neka je $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$. Prema Definiciji 7.1. je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} = a^x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{r_n} = b^x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a \cdot b)^{r_n} = (a \cdot b)^x.$$

Kako je prema svojstvu (S.Q.3.) stepena sa racionalnim izloziocem $(a \cdot b)^{r_n} = a^{r_n} \cdot b^{r_n}$ imamo da je

$$(a \cdot b)^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a \cdot b)^{r_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a^{r_n} \cdot b^{r_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{r_n} = a^x \cdot b^x. \blacksquare$$

DEFINICIJA 7.2. Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definisana formulom $f(x) = a^x$, naziva se **eksponencijalna funkcija**.

Da bi pokazali i drugo svojstvo stepena pokazaćemo najpre da je eksponencijalna funkcija monotona na $\mathbb{R}$ (strogo rastuća za $a > 1$ i strogo opadajuća za $0 < a < 1$.)

MONOTONOST EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

TEOREMA 7.2. Funkcija $y = a^x$ za $a > 1$ je strogo rastuća na $\mathbb{R}$, a za $0 < a < 1$ je strogo opadajuća na $\mathbb{R}$.

DOKAZ: Neka je $a > 1$ i $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ proizvoljni. Treba pokazati da je

$$a^{x_1} < a^{x_2} \iff a^{x_1} \cdot a^{-x_1} < a^{x_2} \cdot a^{-x_1}$$

Kako je prema Svojstvu (S.R.1.) $a^{x_1} \cdot a^{-x_1} = a^0 = 1$ i $a^{x_2} \cdot a^{-x_1} = a^{x_2 - x_1}$, treba pokazati da je

$$a^{x_2 - x_1} > 1 \text{ za } x_2 - x_1 > 0$$

odnosno

$$a^x > 1 \text{ za } x > 0. \quad (18)$$

Zaista, neka je $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < x$ i $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$ i $r_n > r$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je prema Teoremi 6.2. $a^{r_n} > a^r > 1$, odakle prelaskom na $\lim$ kada $n \rightarrow \infty$ zaključujemo da je $a^x \geq a^r > 1$, tj. važi nejednakost (18). ■

NEPREKIDNOST EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

TEOREMA 7.3. *Funkcija $y = a^x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.*

DOKAZ: Neka je $a > 1$ (analogno se može pokazati neprekidnost funkcije i za $0 < a < 1$) i neka je x_0 proizvoljna tačka iz $\mathbb{R}$. Treba pokazati da je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}) = 0,$$

odnosno kako je prema Svojstvu (S.R.1.) $a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$, treba pokazati da $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{\Delta x} = 1$ tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1. \quad (19)$$

Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz realnih brojeva takav da $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, postoje nizovi racionalnih brojeva $\{r_n\}$ i $\{\rho_n\}$ takvi da je

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < \rho_n < x_n + \frac{1}{n},$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Sada prema Teoremi 7.2. imamo da je

$$a^{r_n} < a^{x_n} < a^{\rho_n}. \quad (20)$$

Kako $r_n \rightarrow 0$ i $\rho_n \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow +\infty$, prema (17) je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} = 1$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\rho_n} = 1$. Dakle, koristeći nejednakost (20) dobija se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} = 1$. Pokazali smo (19) odakle sledi da je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{x_0 + \Delta x} = a^{x_0},$$

tj. funkcija a^x je neprekidna na $\mathbb{R}$. ■

SVOJSTVO (S.R.2.): Za svako $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

DOKAZ: (a) Neka je najpre $y = r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ i $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$. Tada je i $\lim_{n \rightarrow +\infty} r r_n = r x$, pa je prema Definiciji 7.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r r_n} = a^{r x}. \quad (21)$$

Kako je prema svojstvu (S.Q.2.) stepena sa racionalnim izložiocem

$$(a^{r_n})^r = a^{r r_n}.$$

iz (21) imamo da je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^{r_n})^r = a^{r x}. \quad (22)$$

Označimo sa $a^{r_n} = t_n$ i $a^x = t_0$. Tada prema Definiciji 7.1. je $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0$ i zbog neprekidnosti funkcije $g(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$ na $(0, \infty)$ (Teorema 6.3), $t_n, t_0 \in (0, \infty)$, imamo da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t_n) = g(t_0)$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^{r_n})^r = (a^x)^r. \quad (23)$$

Iz (22) i (23) imamo da je

$$(a^x)^r = a^{x^r} \text{ za svako } x \in \mathbb{R} \text{ i svako } r \in \mathbb{Q}. \quad (24)$$

(b) Neka su sada x i y proizvoljni realni brojevi i $\{\rho_n\}$ niz racionalnih brojeva takav da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = y$. Ako označimo sa $a^x = b$, prema Definiciji 7.1. imamo da je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^x)^{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{\rho_n} \stackrel{(D.7.1)}{=} b^y = (a^x)^y. \quad (25)$$

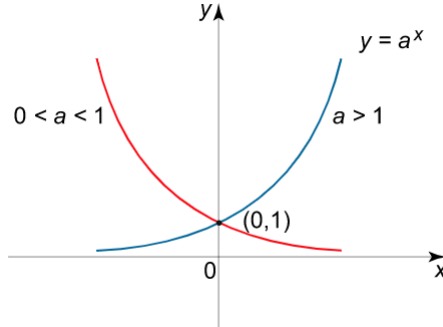
Iz (24) za $r = \rho_n$ je $(a^x)^{\rho_n} = a^{x \rho_n}$, pa se iz (25) dobija

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x \rho_n} = (a^x)^y. \quad (26)$$

S druge strane, kako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} x \rho_n = x y$, $x \rho_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i prema Teoremi 7.3. funkcija $h(x) = a^x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, biće

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x \rho_n) = h(x y) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x \rho_n} = a^{x y} \quad (27)$$

Konačno, iz (26) i (27) zaključujemo da (S.R.2) važi za svako $x, y \in \mathbb{R}$. ■



Slika 24: Grafici funkcije $y = a^x$ za $a > 1$ i $0 < a < 1$

Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije $y = f(x) = a^x$, $a > 0$ su:

- funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, a skup vrednosti funkcije je interval $(0, +\infty)$, tj. $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ je surjektivno preslikavanje
- funkcija je pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$
- nule funkcije ne postoje
- funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ za $a > 1$ i strogo opadajuća na $\mathbb{R}$ za $0 < a < 1$

8. POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA LOGARITMA

Imajući u vidu da se funkcijom $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, vrši injektivno preslikavanje skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{R}^+$, zaključujemo da važi

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

DEFINICIJA 8.1. *Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Logaritam broja b za osnovu a je realan broj kojim treba stepenovati broj a da bi se dobio broj b , u oznaci $\log_a b$.*

Dakle, za $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ je prema Definiciji 8.1. $a^{\log_a b} = b$, odnosno

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

SVOJSTVO 8.1. Za $a > 0$, $a \neq 1$, važi

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{i} \quad \log_a a = 1.$$

DOKAZ. Kako je $a^0 = 1$, sledi $\log_a 1 = 0$. Kako je $a^1 = a$, sledi $\log_a a = 1$. $\square$

SVOJSTVO 8.2. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Tada važi

$$\log_a a^x = x.$$

DOKAZ. Neka je $\log_a a^x = y$. Tada je prema Definiciji 8.1. $a^x = a^y$, pa je prema (28), $x = y$, odnosno $x = \log_a a^x$. $\square$

SVOJSTVO 8.3. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. Za svako $x > 0$, $y > 0$ važi

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y.$$

DOKAZ. Neka je $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_a y$. Onda je prema Definiciji 8.1. $a^\alpha = x$, $a^\beta = y$.

(I način):

$$a^{\log_a xy} \stackrel{(D.8.1.)}{=} xy = a^\alpha \cdot a^\beta \stackrel{(S.R.1.)}{=} a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y} \stackrel{(28)}{\Leftrightarrow} \log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

(II način):

$$\log_a xy = \log_a a^\alpha a^\beta \stackrel{(S.R.1.)}{=} \log_a a^{\alpha+\beta} \stackrel{(S.8.2.)}{=} \alpha + \beta = \log_a x + \log_a y. \quad \square$$

SVOJSTVO 8.4. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Za svako $x > 0$ važi

$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x.$$

DOKAZ. (I način):

$$a^{\log_a x^\alpha} \stackrel{(D.8.1.)}{=} x^{\alpha \log_a a} \stackrel{(D.8.1.)}{=} \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha \stackrel{(S.8.2.)}{=} a^{\alpha \log_a x} \stackrel{(28)}{\Leftrightarrow} \log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x.$$

(II način): Neka je $y = \log_a x$. Tada je prema Definiciji 8.1. $x = a^y$, pa je

$$x^\alpha = (a^y)^\alpha \stackrel{(S.8.2.)}{=} a^{\alpha y} \Rightarrow \log_a x^\alpha = \log_a a^{\alpha y} \stackrel{(S.8.2.)}{=} \alpha y = \alpha \log_a x. \quad \square$$

SVOJSTVO 8.5. Neka je $a > 0, a \neq 1$. Za svako $x > 0, y > 0$ važi

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

DOKAZ. (I način):

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} \stackrel{(S.8.3.)}{=} \log_a x + \log_a y^{-1} \stackrel{(S.8.4.)}{=} \log_a x - \log_a y.$$

(II način): Neka je $\alpha = \log_a x \Leftrightarrow a^\alpha = x$ i $\beta = \log_a y \Leftrightarrow a^\beta = y$. Tada je

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \frac{a^\alpha}{a^\beta} = \log_a a^{\alpha-\beta} \stackrel{(S.8.2.)}{=} \alpha - \beta = \log_a x - \log_a y. \quad \square$$

SVOJSTVO 8.6. Neka je $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$. Tada važi

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1.$$

DOKAZ. Kako je prema Definiciji 8.1. $a^{\log_a b} = b$, imamo da je

$$\log_b a^{\log_a b} = \log_b b \stackrel{(S.8.1.)}{=} 1.$$

Kako je

$$\log_b a^{\log_a b} \stackrel{(S.8.4.)}{=} \log_a b \cdot \log_b a$$

sledi tvrđenje. $\square$

SVOJSTVO 8.7. Neka je $a > 0, b > 0, c > 0, b \neq 1, c \neq 1$. Tada važi

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

DOKAZ. (I način): Kako je

$$c^{\log_c a} \stackrel{(D.8.1.)}{=} a \stackrel{(D.8.1.)}{=} b^{\log_b a} \Rightarrow \log_c c^{\log_c a} = \log_c b^{\log_b a},$$

korišćenjem Svojstva 8.4. imamo

$$\log_c a \cdot \log_c c = \log_b a \cdot \log_c b \stackrel{(S.8.1.)}{\Rightarrow} \log_c a = \log_b a \cdot \log_c b.$$

Kako je $\log_c b \neq 0$ dobija se $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

(II način): Neka je $x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$. Logaritmovanjem za osnovu c dobija se

$$\log_c b^x = \log_c a.$$

Korišćenjem Svojstva 8.4., dobija se $x \cdot \log_c b = \log_c a$, odakle kako je $\log_c b \neq 0$ sledi $x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$. $\square$

SVOJSTVO 8.8. Neka je $a > 0, a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za svako $x > 0$ važi

$$\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a x.$$

DOKAZ. Za $x \neq 1$ imamo

$$\log_{a^\alpha} x \stackrel{(S.8.6.)}{=} \frac{1}{\log_x a^\alpha} \stackrel{(S.8.4.)}{=} \frac{1}{\alpha \cdot \log_x a} \stackrel{(S.8.6.)}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a x.$$

Pored toga, za $x = 1$ svojstvo očigledno važi, jer su i leva i desna strana jednakosti jednake nuli, pa dakle svojstvo važi za svako $x \in \mathbb{R}^+$. $\square$

PRIMER 8.1. Ako je $a = \log_{12} 18$ izračunati $\log_8 9$.

REŠENJE: Kako je

$$a = \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2(2 \cdot 3^2)}{\log_2(2^2 \cdot 3)} = \frac{1 + 2 \log_2 3}{2 + \log_2 3} = \frac{1 + 2b}{2 + b}$$

pa je odavde $b = \log_2 3 = \frac{2a - 1}{2 - a}$. Zato je

$$\log_8 9 = \log_{2^3} 3^2 = \frac{2}{3} \log_2 3 = \frac{2(2a - 1)}{3(2 - a)}. \quad \boxtimes$$

PRIMER 8.2. Ako je $a = \log_{45} 5$ izračunati $\log_{\sqrt{5}} 27$.

REŠENJE: Kako je

$$a = \log_{45} 5 = \frac{1}{\log_5 45} = \frac{1}{\log_5(5 \cdot 3^2)} = \frac{1}{1 + 2 \log_5 3} = \frac{1}{1 + 2b}$$

pa je odavde $b = \log_5 3 = \frac{1 - a}{2a}$. Zato je

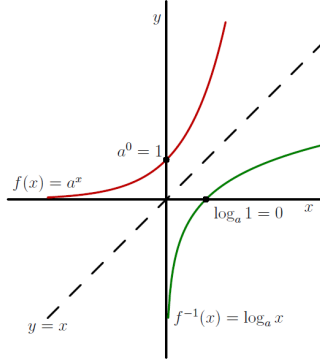
$$\log_{\sqrt{5}} 27 = \log_{5^{1/2}} 3^3 = \frac{3}{1/2} \log_5 3 = 6b = \frac{3(1 - a)}{a}. \quad \boxtimes$$

PRIMER 8.3. Ako je $a = \log_6 2, b = \log_6 5$ izračunati $\log_3 5$.

REŠENJE:

$$\log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{b}{\log_6 \frac{6}{2}} = \frac{b}{\log_6 6 - \log_6 2} = \frac{b}{1 - a}. \quad \square$$

8.1. LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Slika 25: Grafici funkcije $f(x) = a^x$, $a > 1$ i njene inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \log_a x$, $a > 1$

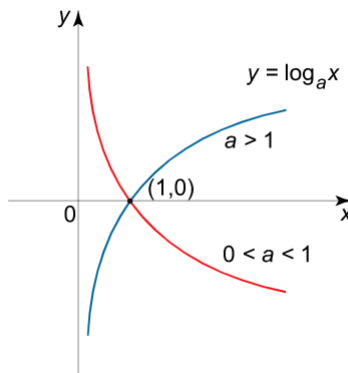
Prema Teoremi 7.2. eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$ je strogo monotona na $\mathbb{R}$, pa na osnovu Teoreme 1.4. je injektivna. Za svako $y \in \mathbb{R}^+$ postoji $x = \log_a y$ tako da je $f(x) = a^{\log_a y} = y$, odakle sledi da je eksponencijalna funkcija surjetivna. Dakle, funkcija

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = a^x = y \in \mathbb{R}^+$$

je bijektivno preslikavanje skupa $\mathbb{R}$ NA skup $\mathbb{R}^+$. Prema tome, postoji inverzna funkcija ove funkcije koja je data sa

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^+ \ni y \mapsto f^{-1}(y) = \log_a y = x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, naziva se logaritamska funkcija.

Slika 26: Grafici funkcije $y = \log_a x$ za $a > 1$ i $0 < a < 1$

Osnovna svojstva logaritamske funkcije $y = f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ su:

- funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}^+$
- za $0 < a < 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (0, 1)$ i negativna za $x \in (1, +\infty)$
- za $a > 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (1, +\infty)$ i negativna za $x \in (0, 1)$
- nula funkcije je $x = 1$
- funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}^+$ za $a > 1$ i strogo opadajuća na $\mathbb{R}^+$ za $0 < a < 1$

PRIMER 8.4. Uporediti brojeve $a = \log_4 3$, $b = \log_5 3$.

REŠENJE: $a = 1/\log_3 4$, $b = 1/\log_3 5$. Kako je $4 < 5$ i funkcija $\log_3 x$ rastuća, to je $\log_3 4 < \log_3 5$. Onda kako su $\log_3 4$ i $\log_3 5$ pozitivni brojevi, imamo

$$a = \frac{1}{\log_3 4} > \frac{1}{\log_3 5} = b.$$

PRIMER 8.5. Uporediti brojeve $a = \log_9 80$, $b = \log_7 50$.

REŠENJE: $a = \log_9 80 < \log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$, $b = \log_7 50 > \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$. Dakle, $a < 2 < b$. $\square$

PRIMER 8.6. Uporediti brojeve $a = \log_2 3 + \log_3 2$, $b = 2$.

REŠENJE: Koristeći nejednakost $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$, $x, y > 0$, $x \neq y$ imamo

$$a = \log_2 3 + \log_3 2 > 2\sqrt{\log_2 3 \cdot \log_3 2} = 2\sqrt{\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 3}} = 2. \quad \square$$

PRIMER 8.7. Ispitati monotonost funkcije $f(x) = \log_3 (\log_{1/3} |x-1| - 2)$.

REŠENJE: Funkcija f je definisana za $\log_{1/3} |x-1| - 2 > 0$ i $|x-1| > 0$, odnosno za $x \neq 1$ i

$$|x-1| < \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{8}{9} < x < \frac{10}{9}.$$

Dakle, $\mathbb{D} = (8/9, 1) \cup (1, 10/9)$.

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 (\log_{1/3}(1-x) - 2), & x \in (8/9, 1) \\ \log_3 (\log_{1/3}(x-1) - 2), & x \in (1, 10/9) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8/9 < x_1 < x_2 < 1 &\Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Rightarrow \log_{1/3}(1-x_1) - 2 < \log_{1/3}(1-x_2) - 2 \\ &\Rightarrow f(x_1) = \log_3 (\log_{1/3}(1-x_1) - 2) < f(x_2) = \log_3 (\log_{1/3}(1-x_2) - 2) \end{aligned}$$

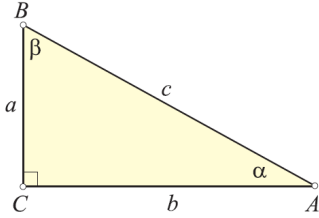
Dakle, za $x \in (8/9, 1)$ funkcija f je strogo rastuća.

$$\begin{aligned} 1 < x_1 < x_2 < \frac{10}{9} &\Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \log_{1/3}(x_1 - 1) - 2 > \log_{1/3}(x_2 - 1) - 2 \\ &\Rightarrow f(x_1) = \log_3 (\log_{1/3}(x_1 - 1) - 2) > f(x_2) = \log_3 (\log_{1/3}(x_2 - 1) - 2) \end{aligned}$$

Dakle, za $x \in (1, 10/9)$ funkcija f je strogo opadajuća. $\square$

9. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Trigonometrijske funkcije oštrog ugla definišu se preko odnosa stranica u pravougloj trouglu.



U pravougloj trouglu ABC je

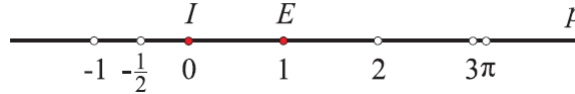
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta$$

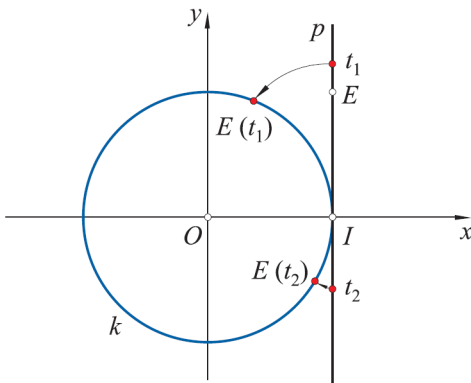
Za definiciju trigonometrijskih funkcija proizvoljnog ugla i trigonometrijskih funkcija realnog argumenta koristi se *trigonometrijska kružnica* - jedinična kružnica ravni xOy sa centrom u koordinatnom početku $O(0, 0)$.

DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA REALNOG BROJA

Posmatrajmo brojevu pravu p sa početkom u tački I i jediničnom dužinom IE



i jediničnu (trigonometrijsku) kružnicu sa centrom u koordinatnom početku $O(0, 0)$. Postavimo brojnu pravu p da dodiruje kružnicu k u tački $(1, 0)$, koja je ujedno početak I brojeve prave p koja je postavljena tako da pozitivni brojevi budu u prvom kvadrantu. Neka je jedinična dužina IE brojeve prave p jednaka poluprečniku kružnice k . Pravu p namotamo bez klizanja i rastezanja na kružnicu k tako da polupravu s pozitivnim brojevima namotavamo u pozitivnom smeru, a polupravu s negativnim brojevima u negativnom smeru. Na ovaj način smo svakom realnom broju t pridružili jednu tačku $E(t)$ kružnice i time je definisano preslikavanje izmedju realnih brojeva i tačaka trigonometrijske kružnice. Ovo pridruživanje zovemo *eksponencijalno preslikavanje* prave na kružnicu i označavamo sa E .

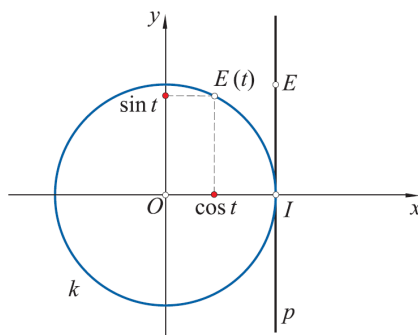


Broj 0 preslikava se u tačku I . Kako je obim jediničnog kruga 2π , sledi i da se brojevi $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ preslikavaju isto u tačku I . Zapravo, možemo zaključiti da se svake dve tačke koje se na brojevnoj pravoj nalaze na rastojanju $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, preslikavaju u istu tačku kružnice, tj.

$$E(t + 2k\pi) = E(t), \quad (29)$$

za svako $t \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Svakom realnom broju t pridružili smo jednu tačku $E(t)$ trigonometrijske kružnice. To nam omogućava da definišemo trigonometrijske funkcije kao realne funkcije, tj. kao funkcije realnog argumenta.



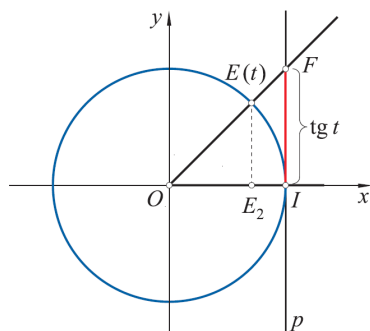
Slika 27: Definicija trigonometrijskih funkcija realnog broja

- *Apscisa tačke $E(t)$ naziva se **kosinus broja t** i označava sa **$\cos t$** . Odnosno, **kosinus realnog broja t** je apscisa one tačke trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju t .*
- *Funkcija koja broju t pridružuje realan broj $\cos t$ naziva se **kosinus**.*
- *Ordinata tačke $E(t)$ naziva se **sinus broja t** i označava sa **$\sin t$** . Sinus realnog broja t je ordinata one tačke trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju t .*
- *Funkcija koja broju t pridružuje realan broj $\sin t$ naziva se **sinus**.*
- *Funkcija **tanges**, u oznaci **tg**, definiše se za sve realne brojeve $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kao*

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

- *Funkcija **kotanges**, u oznaci **ctg**, definiše se za sve realne brojeve $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ kao*

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

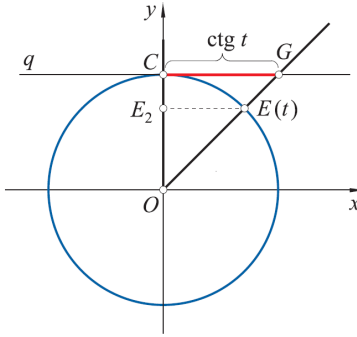


Označimo sa E_2 projekciju tačke $E(t)$ na x -osu, a sa F presek brojne prave p (odnosno tangente trigonometrijske kružnice u tački $I(1,0)$) i prave $OE(t)$. Kako je $\triangle OE_2 E(t) \sim \triangle OIF$, imamo

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_2 E(t)|}{|E_2 O|} \Rightarrow |FI| = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

- *Tangens broja t je ordinata tačke koja se dobija u preseku brojne prave p i prave koja je*

određena koordinatnim početkom i tačkom $E(t)$ trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju t .



Neka je q tangenta trigonometrijske kružnice k u tački $C(0, 1)$. Označimo sa E_2 projekciju tačke $E(t)$ na y -osu, a sa G presek prave q i prave $OE(t)$. Kako je $\triangle OE_2E(t) \sim \triangle OCG$, imamo

$$\frac{|CG|}{|CO|} = \frac{|E_2E(t)|}{|OE_2|} \Rightarrow |CG| = \frac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t.$$

- *Kotangens broja t je apscisa tačke koja se dobija u preseku tangente q trigonometrijske kružnice u tački $(0, 1)$ i prave koja je određena koordinatnim početkom i tačkom $E(t)$ trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju t .*

SVOJSTVA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Kako tačka $E(t)$ pripada jediničnoj kružnici $x^2 + y^2 = 1$ i prema definiciji trigonometrijskih funkcija koordinate tačke $E(t)$ su $(\cos t, \sin t)$, zaključujemo da važi osnovna relacija između trigonometrijskih funkcija

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

odakle se, uzevši u obzir definiciju funkcije $\operatorname{tg} t$, dobijaju i veze između funkcija $\operatorname{tg} t$ i $\sin t$, kao i između $\operatorname{tg} t$ i $\cos t$:

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t},$$

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$

Takodje, prema definiciji sledi da je $\sin t \in [-1, 1]$ i $\cos t \in [-1, 1]$ za svako $t \in \mathbb{R}$.

Realnom broju $t = 0$ pridružena je tačka $E(0)$ trigonometrijske kružnice (slika 28), čije su koordinate $(1, 0)$, tako da je

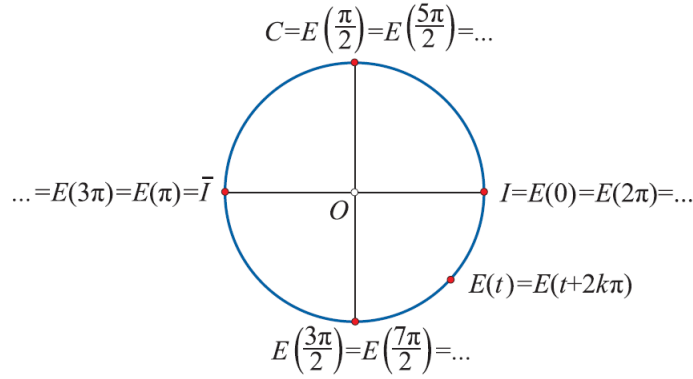
$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0.$$

Realnom broju $t = \pi/2$ pridružena je tačka $E(\pi/2)$ trigonometrijske kružnice (slika 28), čije su koordinate $(0, 1)$, tako da je

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Realnom broju $t = \pi$ pridružena je tačka $E(\pi)$ trigonometrijske kružnice (slika 28), čije su koordinate $(-1, 0)$, tako da je

$$\cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0.$$

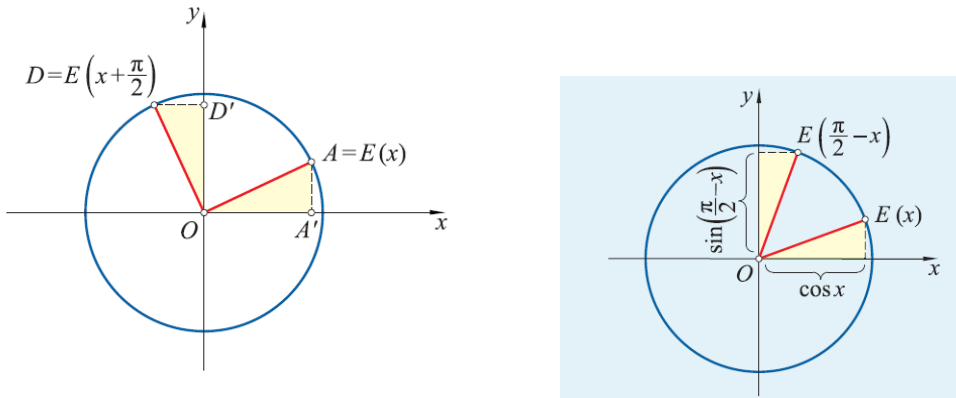


Slika 28: Vrednosti funkcija $y = \sin t$ i $y = \cos t$ za $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$

Realnom broju $t = 3\pi/2$ pridružena je tačka $E(3\pi/2)$ trigonometrijske kružnice (slika 28), čije su koordinate $(0, -1)$, tako da je

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Izvodimo formule koje nam omogućavaju da vrednosti sinusa i kosinusa realnog broja t , kojem pridružena tačka $E(t)$ se nalazi u drugom i trećem kvadrantu, određujemo na osnovu vrednosti sinusa i kosinusa realnog broja x kojem pridružena tačka $E(x)$ se nalazi u prvom kvadrantu.



Slika 29: $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$ i $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$

Neka su $A = E(x)$, $D = E\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ tačke trigonometrijske kružnice pridružene realnim brojevima $x, x + \frac{\pi}{2}$ (Slika 29), i A', D' njihove projekcije na x -osu, odnosno na y -osu. Trouglovi $\triangle OA'A$ i $\triangle OD'D$ su podudarni, jer je

- (i) $\angle OA'A = \angle OD'D = 90^\circ$,
- (ii) $\angle AOA' = \angle DOD'$ (kao centralni uglovi nad jednakim kružnim lukovima dužine x)
- (iii) $|OA| = |OD| = 1$.

Iz podudarnosti ovih trouglova zaključujemo da je

$$|OD'| = |OA'|, \quad |DD'| = |AA'|$$

odnosno

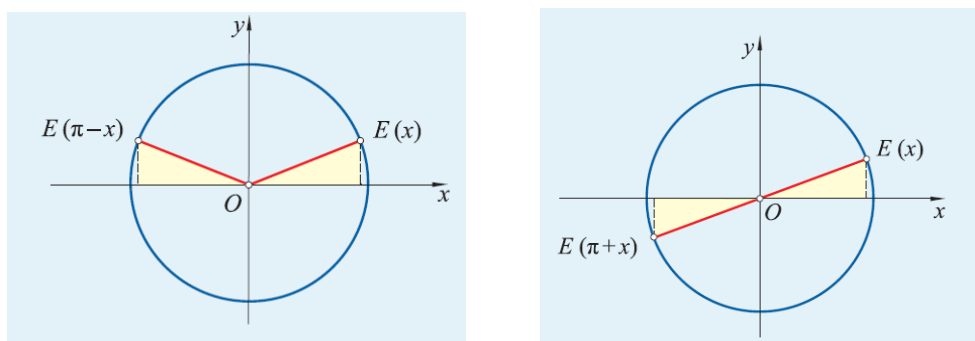
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x \quad (30)$$

Analogno prethodnom iz podudarnosti odgovarajućih trouglova zaključujemo da važi:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad (\text{videti Sliku 29}) \quad (31)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad (\text{videti sliku 30}) \quad (32)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad (\text{videti sliku 30}) \quad (33)$$



Slika 30: $\sin(\pi \pm x)$ i $\cos(\pi \pm x)$

PERIODIČNOST TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

DEFINICIJA 9.1. Ako za funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ postoji realan broj $T \neq 0$, tako da za svako $x \in D$, $x + T \in D$ i važi

$$f(x + T) = f(x)$$

kažemo da je funkcija f periodična, a broj T se naziva period funkcije f . Najmanji pozitivan period, ako postoji, naziva se **osnovni period**.

TEOREMA 9.1. Osnovni period funkcije $y = \sin x$ i $y = \cos x$ je $T = 2\pi$.

DOKAZ: Kako se realni brojevi x i $x + 2\pi$ preslikavaju u istu tačku trigonometrijske kružnice, iz (29) i definicije kosinusa realnog broja, očigledno je $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, $T = 2\pi$ je period funkcije $\cos x$. Da bi di dokazali da je to osnovni period, treba pokazati da za svako T_1 , $0 < T_1 < 2\pi$ postoji bar jedan realan broj x_0 , takav da je $\cos(x_0 + T_1) \neq \cos x_0$. Zaista, za $x_0 = 0$ je $\cos 0 = 1$ i $\cos(0 + T_1) = \cos T_1 < 1$ za $T_1 \in (0, 2\pi)$. Dakle, $T_1 \in (0, 2\pi)$ nije period funkcije $y = \cos x$, odnosno $T = 2\pi$ je najmanji period funkcije.

Dokaz za funkciju $y = \sin x$ je sličan (za x_0 može se uzeti $\pi/2$). ■

TEOREMA 9.2. Osnovni period funkcije $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ je $T = \pi$.

DOKAZ: Kako je prema (33)

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

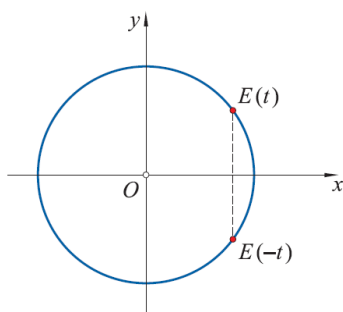
prema Definiciji 9.1., $T = \pi$ je period funkcije $y = \operatorname{tg} x$. Da bi di dokazali da je to osnovni period, pokazaćemo da za svako T_1 , $0 < T_1 < \pi$ postoji bar jedno $x_0 \in \mathbb{R}$, tako da je $\operatorname{tg}(x_0 + T_1) \neq \operatorname{tg} x_0$. Primetimo da je

$$\operatorname{tg} x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prema tome, za $x_0 = 0$ je $\operatorname{tg} 0 = 0$ i $\operatorname{tg}(0 + T_1) = \operatorname{tg} T_1 \neq 0$ za $T_1 \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Dakle, $T_1 \in (0, \pi)$ nije period funkcije $y = \operatorname{tg} x$, odnosno $T = \pi$ je osnovni period funkcije.

Dokaz za funkciju $y = \operatorname{ctg} x$ je sličan (za x_0 može se uzeti $\pi/2$). ■

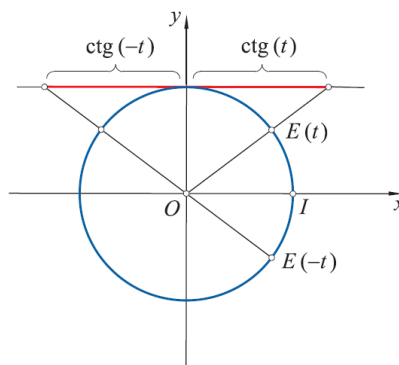
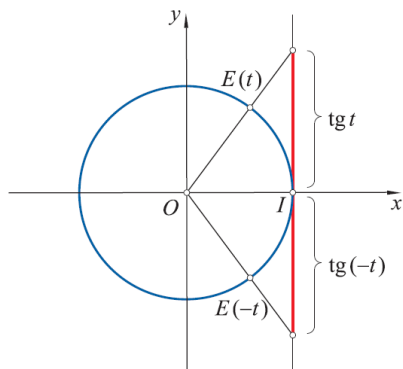
PARNOST TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA



Tačke $E(t)$ i $E(-t)$ simetrične su u odnosu na x -osu, pa imaju jednake apscise, dok su im ordinate brojevi suprotnog znaka, tj. ako su (a, b) koordinate tačke $E(t)$, onda su $(a, -b)$ koordinate tačke $E(-t)$. Kao su prema definiciji $(\cos t, \sin t)$ i $(\cos(-t), \sin(-t))$ koordinate tačke $E(t)$ i $E(-t)$, važi:

★ za svako $t \in \mathbb{R}$ je $\sin(-t) = -\sin t$, tj. funkcija $\sin t$ je **neparna**.

★ za svako $t \in \mathbb{R}$ je $\cos(-t) = \cos t$, tj. funkcija $\cos t$ je **parna**.

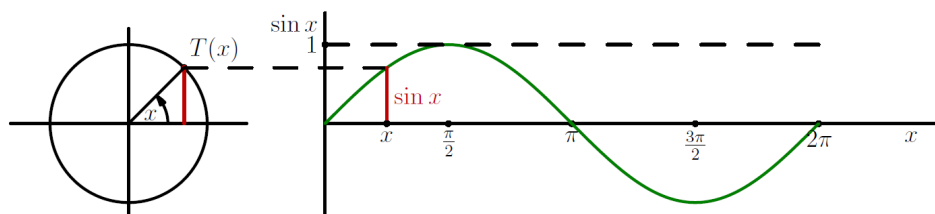


★ za svako $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ je $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$, tj. funkcija $\operatorname{tg} t$ je **neparna**.

★ za svako $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ je $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$, tj. funkcija $\operatorname{ctg} t$ je **neparna**.

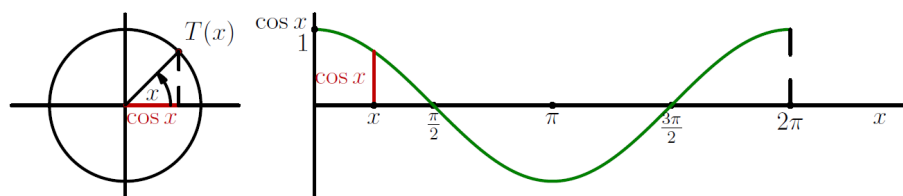
GRAFICI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Grafik funkcije sinus konstruišemo pomoću brojne kružnice. Za realan broj x na y -osu prenesmo ordinatu tačke $E(x)$ koja je jednaka $\sin x$. Postupak ponavljamo dok ne obiđemo celu kružnicu, tj. za sve realne brojeve $x \in [0, 2\pi]$. Funkcija je periodična sa osnovnom periodom 2π , pa je dovoljno iskazati svojstva funkcije samo na segmentu $[0, 2\pi]$. Na sličan način konstruišemo i grafik funkcije kosinus. Za realan broj x na y -osu prenesemo apscisu tačke $E(x)$ koja je jednaka $\cos x$.

Slika 31: Grafik funkcije $y = \sin x$

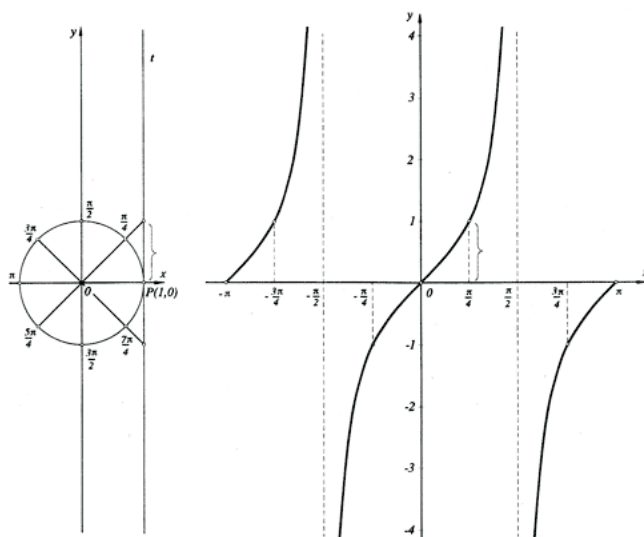
(i) **Sinusna funkcija.** Funkcija $f(x) = \sin x$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, a skup vrednosti funkcije je segment $[-1, 1]$, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.

- funkcija f je neparna i periodična sa osnovnom periodom 2π
- nule funkcije f su u tačkama $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- funkcija je pozitivna za $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ i negativna za $x \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$
- funkcija je strogorastuća na $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ i strogo opadajuća na $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$
- za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ funkcija ima maksimalnu vrednost $f_{max} = 1$, a za $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ima minimalnu vrednost $f_{min} = -1$

Slika 32: Grafik funkcije $y = \cos x$

(ii) **Kosinusna funkcija.** Funkcija $g(x) = \cos x$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, a skup vrednosti funkcije je segment $[-1, 1]$, tj. $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.

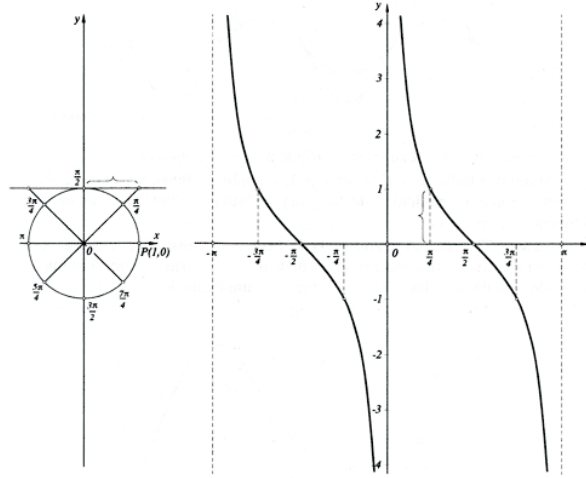
- funkcija g je parna i periodična sa osnovnom periodom 2π
- nule funkcije g su u tačkama $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- funkcija je pozitivna za $x \in (-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ i negativna za $x \in (\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$
- funkcija je strogo opadajuća na $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ i strogo rastuća na $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$
- za $x = 2k\pi$ funkcija ima maksimalnu vrednost $f_{max} = 1$, a za $x = \pi + 2k\pi$ ima minimalnu vrednost $f_{min} = -1$



Slika 33: Grafik funkcije $y = \operatorname{tg} x$

(iii) **Tanges.** Funkcija $h(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$ izuzev u tačkama $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, a skup vrednosti funkcije je $\mathbb{R}$.

- funkcija h je neparna i periodična sa osnovnom periodom π
- prave $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ su vertikalne asimptote funkcije
- nule funkcije h su u tačkama $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- funkcija je strogo rastuća na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- $\operatorname{tg} x > 0$ za $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, a $\operatorname{tg} x < 0$ za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$

Slika 34: Grafik funkcije $y = \operatorname{ctg} x$

(iv) **Kotanges.** Funkcija $p(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$ izuzev u tačkama $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a skup vrednosti funkcije je $\mathbb{R}$.

- funkcija p je neparna i periodična sa osnovnom periodom π
- prave $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su vertikalne asimptote funkcije
- nule funkcije h su u tačkama $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
- funkcija je strogo opadajuća na $(k\pi, \pi + k\pi)$
- $\operatorname{ctg} x > 0$ za $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, a $\operatorname{ctg} x < 0$ za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$

NEPREKIDNOST TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

TEOREMA 9.3. *Funkcije $y = \sin x$ i $y = \cos x$ su neprekidne na $\mathbb{R}$.*

DOKAZ: Neka je x_0 proizvoljna tačka iz $\mathbb{R}$. Tada

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Kako je

$$\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{2}, \quad \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1,$$

to je $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|$, odakle sledi da je funkcija $y = \sin x$ neprekidna u tački x_0 .

Analogno, kako je $\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x_0 - x}{2}$ sledi da je

$$|\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0|,$$

zbog čega je funkcija $y = \cos x$ neprekidna u tački x_0 . ■

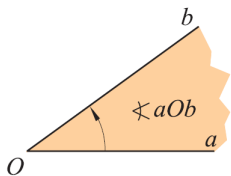
Iz neprekidnosti funkcija $y = \sin x$ i $y = \cos x$ sledi da je funkcija $y = \operatorname{tg} x$ neprekidna, ako je $\cos x \neq 0$, tj. $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a funkcija $\operatorname{ctg} x$ je neprekidna, ako je $\sin x \neq 0$, tj. za $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

PRIMER 9.1. Uporediti brojeve $a = \sin(-1)$, $b = \sin(-8)$.

REŠENJE: Kako je $\sin x$ neparna funkcija upoređićemo brojeve $-a = \sin 1 = a_1$ i $-b = \sin 8 = b_1$. Kako je $8 \approx 2\pi + 1.72$, biće $b_1 = \sin 8 \approx \sin 1.72$. Pored toga, $a_1 = \sin 1 = \sin(\pi - 1) \approx \sin 2.14$. Kako je $\pi/2 < 1.72 < 2.14 < \pi$ i funkcija $y = \sin x$ strogo opadajuća na $(\pi/2, \pi)$, biće $\sin 1.72 > \sin 2.14$, odnosno $b_1 > a_1$, tj. $b = -b_1 < a = -a_1$. ☒

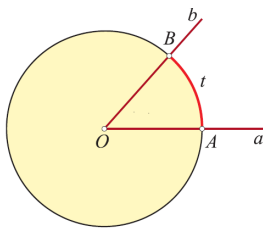
RADIJANSKA MERA UGLA

● Unija dve poluprave sa zajedničkim početkom nazivamo *ugaonom linijom*. Skup tačaka sa iste strane te ugaone linije uključujući i samu ugaonu liniju nazivamo *uglom*. Takođe nam je poznato da zajednički početak polupravih zovemo *teme*, a poluprave *kracima ugla*.



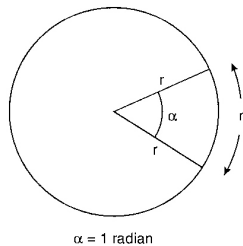
Usmereni (orjentisani) ugao uvodimo analogno usmerenoj duži izborom početnog i krajnjeg kraka. Poluprava Oa je početni krak $\sphericalangle aOb$, a poluprava Ob je krajnji krak ugla.

● Na trigonometrijskoj kružnici uvodimo kao pozitivan matematički smer onaj koji je suprotan smeru kretanja kazaljke na satu. Smer koji se poklapa sa smerom kretanja kazaljke na satu je negativan matematički smer.



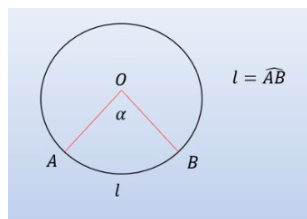
Orijentisani (usmereni) ugao na trigonometrijskom krugu posmatramo tako što teme postavljamo u koordinatni početak O , početni krak Oa u položaj poklapanja sa pozitivnim smerom x -ose, a krajnji krak Ob nanosimo u odgovarajućem smeru zavisno od toga da li je ugao pozitivno ili negativno orijentisan.

Tačke A , B su preseki krakova Oa , Ob sa jediničnom kružnicom. Tada, svakom $\sphericalangle aOb$ pridružujemo dužinu luka $t = \widehat{AB}$. Zato, uglove možemo porediti upoređujući dužine odgovarajućih tetiva $\overline{AB}$, odnosno dužine odgovarajućih lukova $\widehat{AB}$.



Radijanska mera ugla: Ako je dužina kružnog luka jednaka poluprečniku, tada meru odgovarajućeg centralnog ugla nazivamo **radijan**. Jedan radijan jeste mera ugla kojem na jediničnoj kružnici odgovara luk čija je dužina jednaka 1.

Dakle, ako uglu $\sphericalangle aOb$ na jediničnoj kružnici odgovara luk čija je dužina $t = \widehat{AB}$, mera tog ugla jednaka je t radijana.



Ako je $\alpha = \sphericalangle AOB$ centralni ugao kruga poluprečnika r i ako uglu α odgovara luk čija je dužina $\ell = \widehat{AB}$, onda važi

$$\ell = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}.$$

Dakle,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Ako je stepena mera ugla α jednaka a° , onda je radijanska mera ugla α jednaka

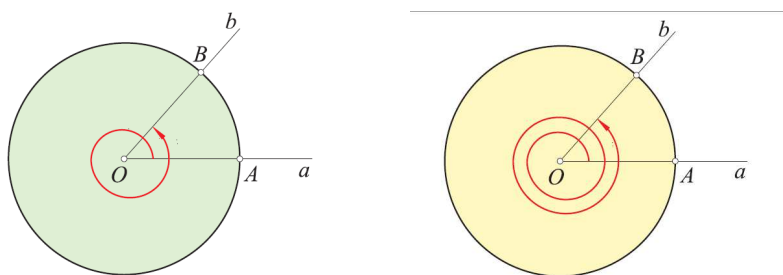
$$\frac{\pi a}{180} \text{ rad} = \frac{l}{r} \text{ rad}.$$

Dakle, sledi tvrđenje.

Radijanska mera ugla jeste razmera dužine odgovarajućeg luka i dužine poluprečnika odgovarajuće kružnice.

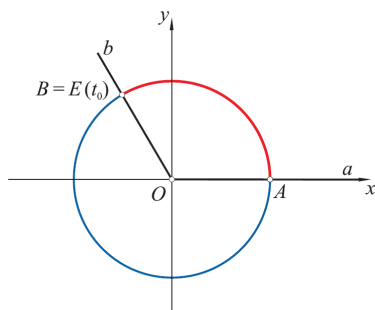
DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA UGLOVA

Posmatrajmo trigonometrijsku kružnicu sa centrom u koordinatnom početku $O(0,0)$ i orijentisani ugao aOb sa temenom u koordinatnom početku i početnim krakom u pravcu pozitivnog dela x -ose. Neka je $t_0 \in [0, 2\pi]$ mera $\sphericalangle aOb$. Ako krak Ob rotiramo u pozitivnom smeru za ceo krug ili za dva kruga, mera tako dobijenog ugla je $t_0 + 2\pi$ ili $t_0 + 4\pi$.



Slika 35: (a) mera $\sphericalangle aOb$ je $t + 2\pi$; (b) mera $\sphericalangle aOb$ je $t + 2 \cdot 2\pi$

Generalno, svi uglovi čija je mera $t_0 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, imaju završni položaj kraka b isti, tj. u istoj tački B seku trigonometrijsku kružnicu. Realnim brojevima $t_0 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, koji predstavljaju meru nekog $\sphericalangle aOb$, pridružujemo tačku B trigonometrijske kružnice. Realan broj t_0 nazivamo *glavna mera* $\sphericalangle aOb$, dok brojeve $t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nazivamo merom ugla $\sphericalangle aOb$.



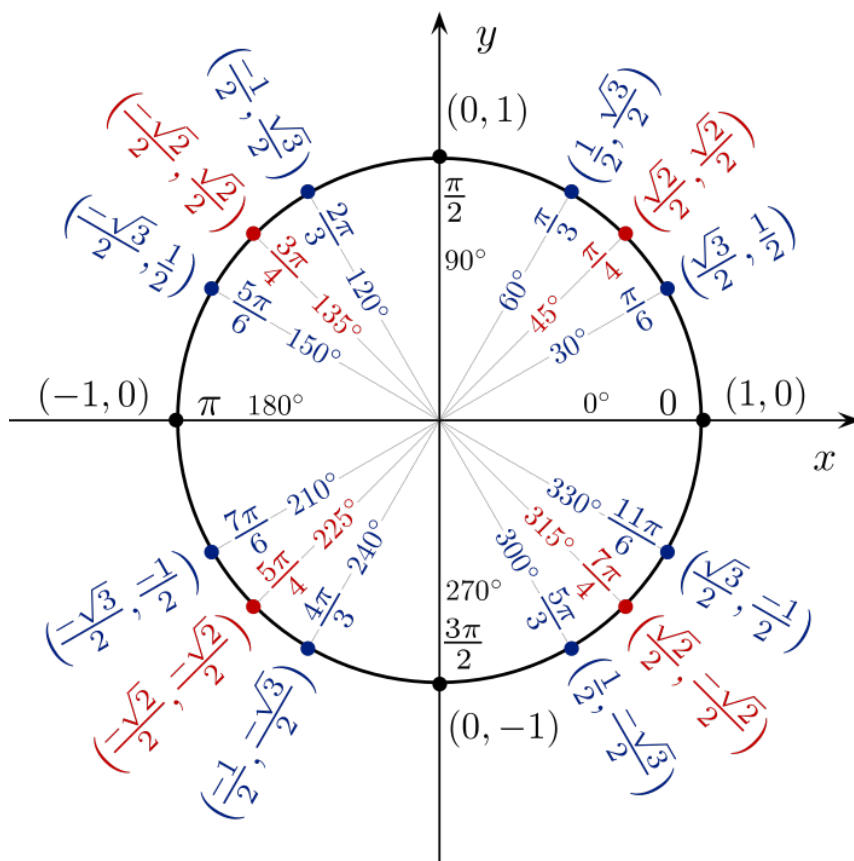
Neka je t_0 broj između 0 i 2π . Namotavanjem realne brojevnice prave na kružnicu taj se broj preslikava u tačku $E(t_0)$. Ako je t_0 dužina luka $\widehat{AB}$, zaključujemo da je

$$B = E(t_0),$$

ali važi i $B = E(t_0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kako je svaki broj $t \in \mathbb{R}$ radijanska mera nekog ugla, svakom broju $t \in \mathbb{R}$ možemo pridružiti na jediničnoj kružnici odgovarajuću tačku B . Trigonometrijske funkcije bilo kog ugla date su sledećom definicijom:

Neka je t mera ugla $\angle aOb$ u radijanima. Vrednost trigonometrijske funkcije $\angle aOb = \alpha$ jednaka je vrednosti te trigonometrijske funkcije realnog broja t , tj. $\sin \alpha = \sin t$, $\cos \alpha = \cos t$ i $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} t$.



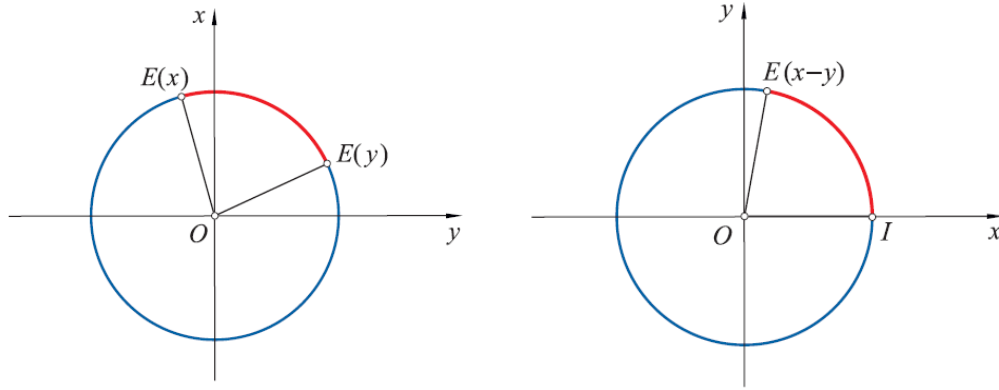
Slika 36: Trigonometrijski krug

10. ADICIONE FORMULE

10.1. SINUS I KOSINUS ZBIRA I RAZLIKE

I NAČIN: Odredićemo formulu za $\cos(x - y)$. Neka su x, y dva realna broja iz $[0, 2\pi]$ i bez gubitka opštosti, zbog parnosti funkcije $\cos x$, možemo pretpostaviti da je $x \geq y$. Brojevima $x, y, x - y$ pridružene su tačke redom, $E(x)$, $E(y)$, $E(x - y)$ trigonometrijske kružnice. Očigledno je (Slika 37) dužina luka od tačke $E(x)$ do tačke $E(y)$ jednaka dužini luka od tačke $E(x - y)$ do tačke $E(0) = I$, pa su i dužine duži $E(x)E(y)$ i $E(x - y)E(0)$ jednake, tj.

$$|E(x)E(y)| = |E(x - y)E(0)|. \quad (34)$$



Slika 37: Kosinus razlike dva broja

Kako je

$$\begin{aligned} E(x) &= (\cos x, \sin x), & E(y) &= (\cos y, \sin y), \\ E(x - y) &= (\cos(x - y), \sin(x - y)), & E(0) &= (1, 0), \end{aligned}$$

prema (34) je

$$\begin{aligned} (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 &= |E(x)E(y)|^2 = |E(x - y)E(0)|^2 \\ &= (\cos(x - y) - 1)^2 + \sin^2(x - y) \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \cos^2 x - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y \\ = 1 - 2 \cos(x - y) + \cos^2(x - y) + \sin^2(x - y) \\ \Leftrightarrow 2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 - 2 \cos(x - y) \end{aligned}$$

Dakle,

$$(1) \quad \boxed{\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$$

Pre svega, napomenimo da (1) važi za svaka dva realna broja, jer ako su $x_0, y_0 \in [0, 2\pi]$, onda za proizvoljne realne brojeve

$$x = x_0 + 2k\pi, \quad y = y_0 + 2m\pi, \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

imamo iz

$$\cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0 = \cos(x_0 - y_0)$$

da je

$$\cos(x - 2k\pi) \cos(y - 2m\pi) + \sin(x - 2k\pi) \sin(y - 2m\pi) = \cos(x - y - 2(k - m)\pi),$$

odakle zbog periodičnosti funkcija dobijamo

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y).$$

Iz prethodne formule mogu se pokazati i sledeće tri formule:

$$(2) \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$(3) \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$(4) \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

DOKAZI: Koristeći (31) dobija se

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x - (-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

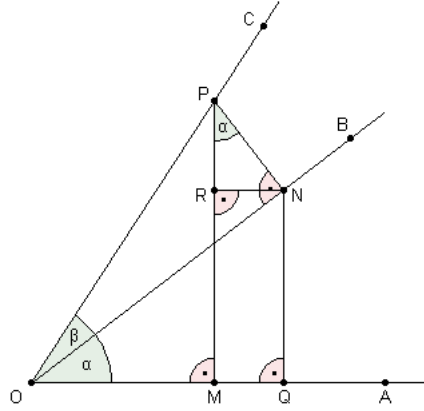
$$\begin{aligned} \sin(x - y) &= \sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned}$$

II NAČIN: Odredićemo formulu za $\sin(\alpha + \beta)$. Neka je $\sphericalangle AOB = \alpha$ i $\sphericalangle BOC = \beta$ (Slika 38). Uzmimo proizvoljnu tačku P na polupravoj OC , i spustimo normale iz tačke P na polupravu OA i OB , dobijajući tako tačke M i N . Neka je S tačka preseka duži PM sa polupravom OB . Iz tačke N povucimo normalu na polupravu OA i neka je tačka Q podnožje te normale. Iz tačke N takodje povucimo normalu na pravu PM i neka je tačka R podnožje te normale. Pre svega, primetimo da iz pravouglih $\triangle OMS$ i $\triangle PSN$, kako su unakrsni uglovi $\sphericalangle OSM$ i $\sphericalangle PSN$ jednaki, sledi da je i $\alpha = \sphericalangle SOM = \sphericalangle SPN$. Tada je iz pravouglog $\triangle OQN$

$$\sin \alpha = \frac{|QN|}{|ON|},$$

iz pravouglog $\triangle ONP$ je

$$\cos \beta = \frac{|ON|}{|OP|}, \quad \sin \beta = \frac{|NP|}{|OP|}$$



Slika 38: Sinus zbira dva ugla

i iz pravouglog $\triangle NRP$ je $\cos \alpha = \frac{|RP|}{|NP|}$, tako da se dobija

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{|MP|}{|OP|} = \frac{|MR| + |RP|}{|OP|} = \frac{|QN|}{|OP|} + \frac{|RP|}{|OP|} \\ &= \frac{|QN|}{|ON|} \cdot \frac{|ON|}{|OP|} + \frac{|RP|}{|NP|} \cdot \frac{|NP|}{|OP|} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Analogno prethodnom, iz dobijene formule mogu se dobiti formule (4), (1) i (2) za $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$.

PRIMER 10.1. Izračunati $\sin 75^\circ$.

REŠENJE.

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

PRIMER 10.2. Izračunati $\cos 47^\circ \sin 17^\circ - \sin 47^\circ \cos 17^\circ$.

REŠENJE.

$$\cos 47^\circ \sin 17^\circ - \sin 47^\circ \cos 17^\circ = \sin(17^\circ - 47^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}. \quad \boxtimes$$

PRIMER 10.3. Ako je $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ i $\cos \alpha = -\frac{11}{13}$, izračunati $\sin \beta$.

REŠENJE. Kako je $\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$, to je

$$\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Iz } \cos \alpha = -\frac{11}{13} \text{ imamo}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{121}{169} = \frac{48}{169}$$

odakle je $\sin \alpha = \pm \frac{4\sqrt{3}}{13}$ i kako je $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, to je $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{13}$. Sada je

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{11}{13}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{13} = -\frac{15\sqrt{3}}{26}. \quad \square$$

10.2. TANGES I KOTANGES ZBIRA I RAZLIKE

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$(5) \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x-y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} - 1}{\frac{\cos y}{\sin y} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$(7) \quad \operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}, \quad x \neq k\pi, y \neq k\pi, x+y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(8) \quad \operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}, \quad x \neq k\pi, y \neq k\pi, x-y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

10.3. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE DVOSTRUKOG ARGUMENTA

Ako u (2) i (3) stavimo da je $x = y$ dobija se:

$$(9) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(10) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(11) \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(12) \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

PRIMER 10.4. Ako je $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, izračunati $\cos(2\alpha - \beta)$.

REŠENJE. $\cos(2\alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cdot \cos \beta + \sin 2\alpha \cdot \sin \beta$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \Rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

$$\cos(2\alpha - \beta) = -\frac{7}{25} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{24}{25} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{253}{325}. \quad \square$$

PRIMER 10.5. Izračunati $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$

REŠENJE:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} &= \frac{\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin \left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{\sin \frac{\pi}{7}} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}. \quad \square \end{aligned}$$

PRIMER 10.6. Izračunati $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

REŠENJE:

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= \cos(90^\circ - 10^\circ) \cos(90^\circ - 50^\circ) \cos(90^\circ - 70^\circ) \\ &= \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}. \quad \square \end{aligned}$$

PRIMER 10.7. Izračunati $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

REŠENJE:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} &= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} \\ &= 2 \cdot \frac{\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = 2 \cdot \frac{\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 4. \quad \square \end{aligned}$$

10.4. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE ARGUMENTA $\frac{x}{2}$

Kako je

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

i iz identiteta (10) je

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos 2 \cdot \frac{x}{2} = \cos x.$$

Sabiranjem i oduzimanjem ovih jednakosti dobija se

$$(13) \quad \boxed{\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}} \quad \boxed{\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}}$$

Iz (13) kako je

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

imamo

$$(14) \quad \boxed{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}, \quad x \neq \pi + 2k\pi} \quad \boxed{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}, \quad x \neq 2k\pi}$$

PRIMER 10.8. Ako je $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ izračunati $\sin \frac{\alpha}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$.

REŠENJE:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \quad \wedge \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \implies \cos \alpha = -\frac{5}{13} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \implies \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4} \implies \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \quad \square \end{aligned}$$

10.5. TRANSFORMACIJA PROIZVODA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA U ZBIR I RAZLIKU

Formule za transformaciju proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir i razliku dobijaju se sabiranjem ili oduzimanjem adicijonih formula (1)-(2) odnosno (3)-(4). Naime, sabiranjem adicijonih formula

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y\end{aligned}$$

dobija se

$$(15) \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

Sabiranjem adicijonih formula

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

dobija se

$$(16) \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

a oduzimanjem imamo

$$(17) \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

PRIMER 10.9. Izračunati $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.

REŠENJE:

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \sin 80^\circ = \frac{1}{2} \sin 80^\circ \cos 20^\circ - \frac{1}{4} \sin 80^\circ \\ &= \frac{1}{4}(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ) - \frac{1}{4} \sin 80^\circ \\ &= \frac{1}{4}(\sin 100^\circ - \sin 80^\circ) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(\sin 100^\circ - \sin(180^\circ - 100^\circ)) + \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{1}{4}(\sin 100^\circ - \sin 100^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad \square\end{aligned}$$

PRIMER 10.10. Izračunati $C = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

REŠENJE:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

PRIMER 10.11. Pokazati da su $\cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7}$ koreni polinoma

$$P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1.$$

REŠENJE: Kako je

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{7} = -\cos \frac{6\pi}{7}, \quad x_2 = \cos \frac{3\pi}{7} = -\cos \frac{4\pi}{7}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{2\pi}{7}$$

pokazaćemo da važi

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\cos \frac{6\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = -\frac{b}{a} \quad (35)$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{1}{2} = -\frac{4}{8} = \frac{c}{a} \quad (36)$$

$$x_1x_2x_3 = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8} = -\frac{d}{a} \quad (37)$$

odakle zaključujemo da su x_1, x_2, x_3 koreni polinoma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a = 8, \quad b = -4, \quad c = -4, \quad d = 1$$

Jednakost (35) i (37) važe iz Primera 10.10. i Primera 10.5. Jednakost (36) sledi iz

$$\begin{aligned} &2 \left(\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \right) \\ &= \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= 2 \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \left(2\pi - \frac{6\pi}{7} \right) + \cos \frac{6\pi}{7} \\ &= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) = -1. \quad \square \end{aligned}$$

10.6. TRANSFORMACIJA ZBIRA I RAZLIKE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA U PROIZVOD

Ako su u formulama (15), (16) i (17) zameni $x + y = \alpha$ i $x - y = \beta$, odnosno $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, dobijaju se formule za transformaciju zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod:

$$(18) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(19) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(20) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Iz formule (18) zamenom β sa $-\beta$ dobija se

$$(21) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Iz formula (18) i (21) dobijaju se i formule

$$(22) \quad \sin \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)}{2}$$

$$(23) \quad \sin \alpha - \cos \beta = \sin \alpha - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = -2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta}{2}$$

PRIMER 10.12. Pokazati da su $\cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{5}$ koreni kvadratne jednačine $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

REŠENJE: Pokazaćemo da za $x_1 = \cos \frac{\pi}{5}$, $x_3 = \cos \frac{\pi}{5}$ važi $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ i $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4}$, odakle prema Vijetovim formulama (Teorema 2.1), sledi da su x_1, x_2 koreni date kvadratne jednačine. Zaista,

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} &= 2 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \frac{\sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}} \left(\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} \right) \\ &= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{5}} \left(\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{5\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} \right) = -\frac{\sin \frac{\pi}{5}}{4 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

PRIMER 10.13. Izračunati $\frac{\sin 100^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 200^\circ}$.

REŠENJE:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 100^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 200^\circ} &= \frac{\sin 100^\circ + \cos(90^\circ - 40^\circ)}{\cos 200^\circ} = \frac{\sin 100^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 200^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 70^\circ \cos 30^\circ}{\cos(180^\circ + 20^\circ)} = \sqrt{3} \frac{\sin 70^\circ}{-\cos 20^\circ} \\ &= -\sqrt{3} \frac{\sin(90^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = -\sqrt{3} \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

PRIMER 10.14. Izračunati $\frac{\sin 85^\circ \cos 75^\circ + \sin 15^\circ \cos 25^\circ}{\sin 50^\circ - \cos 20^\circ}$.

REŠENJE:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 85^\circ \cos 75^\circ + \sin 15^\circ \cos 25^\circ}{\sin 50^\circ - \cos 20^\circ} &= \frac{\frac{1}{2} \sin 160^\circ + \sin 10^\circ + \sin 40^\circ + \sin(-10^\circ)}{\sin(90^\circ - 40^\circ) - \cos 20^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 160^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 20^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin 100^\circ \cos 60^\circ}{-2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ} \\ &= -\frac{\frac{1}{2} \sin 100^\circ}{\sin 10^\circ} = -\frac{1}{2} \frac{\sin(90^\circ + 10^\circ)}{\sin 10^\circ} \\ &= -\frac{\frac{1}{2} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

11. INVERZNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

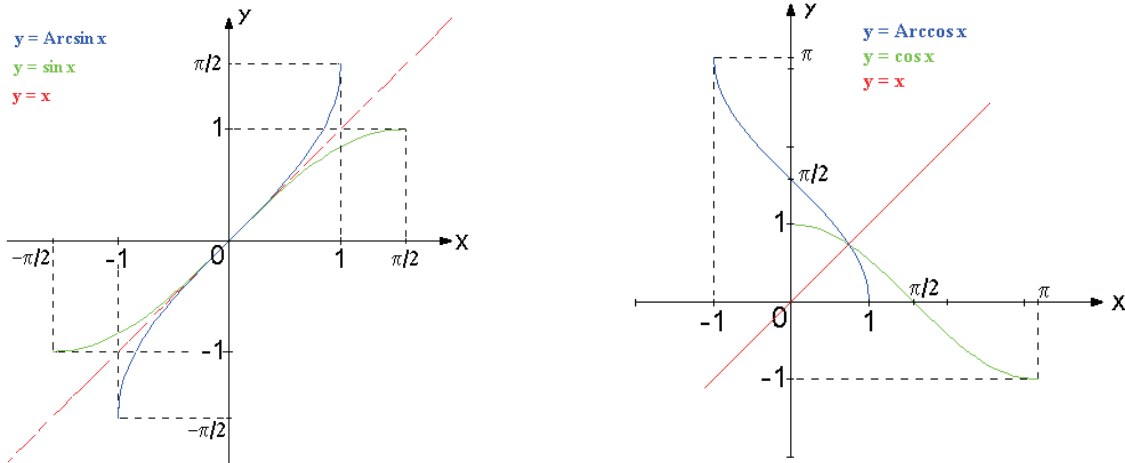
Inverzne trigonometrijske funkcije nazivaju se **ciklometrijske** ili **arkus** funkcije.

(i) **Arkus sinus.** Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ nije bijekcija, pa njena inverzna funkcija ne postoji. Na primer, svi brojevi oblika $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ preslikavaju se ovom funkcijom u broj 1, što znači da funkcija f nije injektivna. Međutim, posmatrajmo restrikciju funkcije f na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tj. funkciju

$$f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \text{ gde je } f_1(x) = \sin x.$$

Funkcija f_1 je strogo rastuća (injektivna) i neprekidna na $[-\pi/2, \pi/2]$. Kako je $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, prema Teoremi 1.7. zaključujemo da je $f_1([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$, tj. f_1 je surjektivno preslikavanje. Dakle, prema Teoremi 1.8., postoji inverzna funkcija $f_1^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, strogo rastuća i neprekidna na $[-1, 1]$, koja se označava sa $F(x) = \arcsin x$.

Grafik funkcije $y = \arcsin x$ simetričan je grafiku funkcije f_1 u odnosu na pravu $y = x$ (slika 39-(a)).



Slika 39: Grafik funkcije $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$

Prema svojstvima uzajamno inverznih funkcija $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_1^{-1} : Y \rightarrow X$, $X = [-\pi/2, \pi/2]$, $Y = [-1, 1]$, sledi da je $f_1^{-1} \circ f_1 = i_X$ i $f_1 \circ f_1^{-1} = i_Y$, odnosno važe jednakosti:

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1].$$

TEOREMA 11.1. Funkcija $F : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, $F(x) = \arcsin x$ je neparna, tj. važi

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$$

DOKAZ: Za proizvoljno $x \in [-1, 1]$, označimo sa $\arcsin x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\arcsin x$ je $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ i $\sin \alpha = x$. Tada je

$$\arcsin(-x) = \arcsin(-\sin \alpha) = \arcsin(\sin(-\alpha)), \quad (38)$$

Ali kako je $-\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, to je prema definiciji $\arcsin(\sin(-\alpha)) = -\alpha$, što zajedno sa (38) daje

$$\arcsin(-x) = -\alpha = -\arcsin x. \quad \blacksquare$$

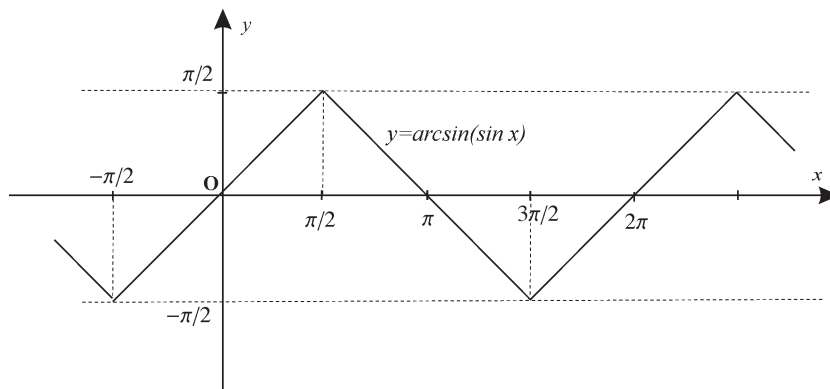
Grafik funkcije $F(x) = \arcsin x$ prikazan je na Slici 39-(a). Osnovna svojstva funkcije $F(x) = \arcsin x$ su:

- funkcija F definisana je za svako $x \in [-1, 1]$;
- funkcija F je neparna;
- $F(x) > 0$ za $x \in (0, 1]$ i $F(x) < 0$ za $x \in [-1, 0)$;
- $x = 0$ je nula funkcije F ;
- funkcija je strogo rastuća na $[-1, 1]$ (prema T.1.6.).

PRIMER 11.1. Nacrtati grafik funkcije $y = \psi(x) = \arcsin(\sin x)$.

REŠENJE. Funkcija ψ je definisana na $\mathbb{R}$ i periodična je sa periodom 2π , jer je $\psi(x + 2\pi) = \psi(x)$. Zato je dovoljno odrediti grafik funkcije na segmentu $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

Ako je $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, onda je $\psi(x) = \arcsin(\sin x) = x$.



Slika 40: Grafik funkcije $y = \arcsin(\sin x)$

Za $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$ je $-\pi/2 \leq x - \pi \leq \pi/2$, pa je

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi.$$

S druge strane, $\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$ i zato je zbog neparnosti funkcije $\arcsin x$

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x),$$

Dakle, $x - \pi = -\arcsin(\sin x)$ za $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Konačno, imamo da je

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \quad (39)$$

(ii) **Arkus kosinus.** Funkcija

$$g_1 : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad g_1(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$$

je strogo opadajuća (injektivna) i neprekidna na $[0, \pi]$. Kako je $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, prema Teoremi 1.7. je $g_1([0, \pi]) = [-1, 1]$, odnosno g_1 je surjekcija. Prema tome, prema Teoremi 1.8., postoji inverzna funkcija

$$G : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad G(x) = \arccos x, \quad x \in [-1, 1]$$

koja je takođe strogo opadajuća i neprekidna na $[-1, 1]$.

Prema svojstvima uzajamno inverznih funkcija $g_1 : X \rightarrow Y$, $G : Y \rightarrow X$, $X = [0, \pi]$, $Y = [-1, 1]$, sledi da je $G \circ g_1 = i_X$ i $g_1 \circ G = i_Y$, odnosno važe jednakosti:

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi], \quad \cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1].$$

Grafik funkcije $y = \arccos x$ prikazan je na Slici 39-(b). Osnovna svojstva funkcije $G(x) = \arccos x$ su:

- funkcija G definisana je za svako $x \in [-1, 1]$;
- funkcija G nije ni parna ni neparna, već važi (videti Teoremu 11.2.)

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

- funkcija G je pozitivna za svako $x \in [-1, 1]$
- nula funkcija G je $x = 1$
- funkcija je strogo opadajuća na $[-1, 1]$ (prema T.1.6.)

TEOREMA 11.2. Za svako $x \in [-1, 1]$ važe jednakosti:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad (\text{A})$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{B})$$

DOKAZ: (a) Za proizvoljno $x \in [-1, 1]$, označimo sa $\arccos x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\arccos x$ je $\cos \alpha = x$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Onda je $0 \leq \pi - \alpha \leq \pi$, tako da je

$$\arccos(\cos(\pi - \alpha)) = \pi - \alpha.$$

Kako je $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -x$, dobija se

$$\arccos(-x) = \pi - \alpha = \pi - \arccos x.$$

Ovim je formula (A) dokazana.

(b) Za proizvoljno $x \in [-1, 1]$, označimo sa $\arcsin x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\arcsin x$ je $\sin \alpha = x$, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. Onda je $0 \leq \pi/2 - \alpha \leq \pi$, tako da je

$$\arccos(\cos(\pi/2 - \alpha)) = \pi/2 - \alpha$$

Kako je $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha = x$, dobija se

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Ovim je i formula (B) dokazana. ■

PRIMER 11.2. Odrediti $\arccos(\sin x)$ ako je $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

REŠENJE. **I način:** Imamo da je $\arccos(\sin x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$. Ako stavimo da je $y = \frac{\pi}{2} - x$, kako je $-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\frac{\pi}{2}$, treba odrediti $\arccos(\cos y)$ za $-\pi \leq y \leq -\pi/2$. Kako je $0 \leq y + \pi \leq \pi/2$, imamo da je

$$\arccos(\cos(y + \pi)) = y + \pi.$$

Sa druge strane je

$$\arccos(\cos(y + \pi)) = \arccos(-\cos y) = \pi - \arccos(\cos y).$$

Dakle,

$$\pi - \arccos(\cos y) = y + \pi \Rightarrow \arccos(\cos y) = -y$$

za $-\pi \leq y \leq -\pi/2$. Konačno,

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos y) = -y = x - \frac{\pi}{2}.$$

II način: Imamo da je $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$. Odredićemo zato $\arcsin(\sin x)$ za $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Kako je $0 \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{2}$, imamo

$$\begin{aligned} x - \pi = \arcsin(\sin(x - \pi)) &= \arcsin(\sin(-(\pi - x))) = \arcsin(-\sin(\pi - x)) \\ &= -\arcsin(\sin(\pi - x)) = -\arcsin(\sin x). \end{aligned}$$

Dakle, za $x \in [\pi, 3\pi/2]$, je $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, odnosno

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (\pi - x) = x - \frac{\pi}{2}. \quad \boxtimes$$

PRIMER 11.3. *Odrediti $\arcsin |\cos x|$ ako je $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.*

REŠENJE. Za $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ imamo da je

$$S = \arcsin |\cos x| = \arcsin(-\cos x) = -\arcsin(\cos x).$$

I način: Kako je

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right),$$

ako stavimo da je $y = \frac{\pi}{2} - x$, uzveši u obzir da je $-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi/2$, treba odrediti $\arcsin(\sin y)$ za $y \in [-\pi, -\pi/2]$. Kako je $0 \leq y + \pi \leq \pi/2$, imamo da je

$$y + \pi = \arcsin(\sin(y + \pi)) = \arcsin(-\sin y) = -\arcsin(\sin y).$$

Dakle,

$$\arcsin(\sin y) = -y - \pi$$

za $-\pi \leq y \leq -\pi/2$. Konačno,

$$S = \arcsin |\cos x| = -\arcsin(\sin y) = y + \pi = \frac{\pi}{2} - x + \pi = \frac{3\pi}{2} - x.$$

II način: Kako je

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x),$$

odredićemo $\arccos(\cos x)$ za $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Kako je $0 \leq x - \pi \leq \frac{\pi}{2}$, imamo

$$\begin{aligned} x - \pi = \arccos(\cos(x - \pi)) &= \arccos(\cos(\pi - x)) = \arccos(-\cos x) \\ &= \pi - \arccos(\cos x). \end{aligned}$$

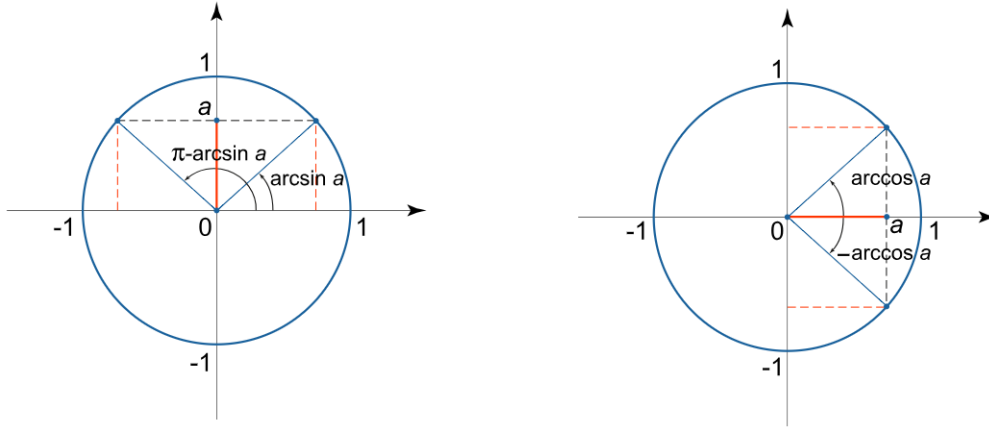
Dakle, $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$ za $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, a konačno

$$S = \arcsin |\cos x| = -\arcsin(\cos x) = \arccos(\cos x) - \frac{\pi}{2} = 2\pi - x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - x. \quad \square$$

TRIGONOMETRIJSKE JEDNAČINE

- Ako je $|a| > 1$, jednačina $\sin x = a$ nema rešenja.
- Ako je $|a| \leq 1$, skup rešenja jednačine $\sin x = a$ je

$$x \in \{\arcsin a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$



Slika 41: (a) rešenja jednačine $\sin x = a$; (b) rešenja jednačine $\cos x = a$;

- Ako je $|a| > 1$, jednačina $\cos x = a$ nema rešenja.
- Ako je $|a| \leq 1$, skup rešenja jednačine $\cos x = a$ je:

$$x \in \{\arccos a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

PRIMER 11.4. Odrediti sva rešenja jednačine $\sin x = -1/3$ na $[-3\pi, -\pi]$.

REŠENJE. Skup rešenja jednačine $\sin x = -1/3$ je

$$\left\{x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\},$$

odnosno

$$\left\{x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Tražimo rešenja koja pripadaju segmentu $[-3\pi, -\pi]$. Kako je prema definiciji $\arcsin(-\frac{1}{3}) \in [-\pi/2, 0]$, jedno traženo rešenje dobijamo iz prvog skupa rešenja za $k = -1$ i to je

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) - 2\pi = -\arcsin\frac{1}{3} - 2\pi \in \left[-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right].$$

S druge strane, kako je prema definiciji $\pi + \arcsin\frac{1}{3} \in [\pi, 3\pi/2]$,

$$\pi + \arcsin\frac{1}{3} - 2\pi \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{i} \quad \pi + \arcsin\frac{1}{3} - 4\pi \in \left[-3\pi, -\frac{5\pi}{2}\right],$$

drugo traženo rešenje dobijamo iz drugog skupa rešenja za $k = -2$ i to je

$$x_2 = \arcsin\frac{1}{3} - 3\pi. \quad \square$$

TEOREMA 11.3. Za realne brojeve $x, y \in [-1, 1]$, je
 $\arcsin x + \arcsin y$

$$= \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{za } xy \leq 0 \text{ ili } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{za } x > 0, y > 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{za } x < 0, y < 0 \text{ i } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

DOKAZ: Neka je $\arcsin x = \alpha$, $\arcsin y = \beta$, $\alpha, \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Tada je $\sin \alpha = x$, $\sin \beta = y$. Pored toga, kako su $\cos \alpha \geq 0$ i $\cos \beta \geq 0$, to je $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$ i $\cos \beta = \sqrt{1-y^2}$. Dakle,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

odakle je

$$\arcsin(\sin(\alpha + \beta)) = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}). \quad (40)$$

Kako je $\alpha + \beta \in [-\pi, \pi]$, može se pokazati da je

$$\arcsin(\sin(\alpha + \beta)) = \begin{cases} \alpha + \beta, & \alpha + \beta \in [-\pi/2, \pi/2]; \\ \pi - (\alpha + \beta), & \alpha + \beta \in [\pi/2, \pi]; \\ -\pi - (\alpha + \beta), & \alpha + \beta \in [-\pi, -\pi/2]. \end{cases} \quad (41)$$

Naime, jasno je da za $\alpha + \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ važi $\arcsin(\sin(\alpha + \beta)) = \alpha + \beta$. Za $\alpha + \beta \in [\pi/2, \pi]$ je $(\alpha + \beta) - \pi \in [-\pi/2, 0]$, tako da je

$$\arcsin(\sin((\alpha + \beta) - \pi)) = (\alpha + \beta) - \pi,$$

dok je sa druge strane

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin((\alpha + \beta) - \pi)) &= \arcsin(-\sin(\pi - (\alpha + \beta))) \\ &= -\arcsin(\sin(\pi - (\alpha + \beta))) = -\arcsin(\sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

Dakle,

$$\arcsin(\sin(\alpha + \beta)) = \pi - (\alpha + \beta), \quad \alpha + \beta \in [\pi/2, \pi].$$

Slično, za $\alpha + \beta \in [-\pi, -\pi/2]$ je $\alpha + \beta + \pi \in [0, \pi/2]$, tako da je

$$\arcsin(\sin(\alpha + \beta + \pi)) = \alpha + \beta + \pi,$$

dok je sa druge strane

$$\arcsin(\sin(\pi + (\alpha + \beta))) = \arcsin(-\sin(\alpha + \beta)) = -\arcsin(\sin(\alpha + \beta)).$$

Dakle,

$$\arcsin(\sin(\alpha + \beta)) = -\pi - (\alpha + \beta), \quad \alpha + \beta \in [-\pi, -\pi/2].$$

Pokazaćemo da je

- ◇ $\alpha + \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ za $xy \leq 0$, ili $x^2 + y^2 \leq 1$;
- ◇ $\alpha + \beta \in (\pi/2, \pi]$ za $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 > 1$;
- ◇ $\alpha + \beta \in [-\pi, -\pi/2)$ za $x < 0$, $y < 0$, $x^2 + y^2 > 1$,

tako da traženo tvrđenje sledi iz (40) i (41). Razlikujemo slučajeve:

$$(i) \ x > 0, y > 0 \rightarrow \begin{cases} (i-1) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 1 \\ (i-2) : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$(ii) \ x \leq 0, y \geq 0$$

$$(iii) \ x < 0, y < 0 \rightarrow \begin{cases} (iii-1) : x < 0, y < 0, x^2 + y^2 \leq 1 \\ (iii-2) : x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$(iv) \ x \geq 0, y \leq 0$$

(ii) Ako je $x \leq 0$, $y \geq 0$, onda je $\alpha \in [-\pi/2, 0]$ i $\beta \in [0, \pi/2]$, odnosno $\alpha + \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dakle, za $xy \leq 0$ je $\alpha + \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(iv) Ako je $x \geq 0$, $y \leq 0$, onda je $\alpha \in [0, \pi/2]$ i $\beta \in [-\pi/2, 0]$, odnosno $\alpha + \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dakle, za $xy \leq 0$ je $\alpha + \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

(i-1) Ako je $x > 0$, $y > 0$ i $x^2 + y^2 \leq 1$, onda je $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\beta \in (0, \pi/2]$ i $\alpha + \beta \in (0, \pi]$. Takodje,

$$\sin^2 \alpha = x^2 \leq 1 - y^2 = \cos^2 \beta \Rightarrow \sin \alpha = |\sin \alpha| \leq |\cos \beta| = \cos \beta,$$

i

$$\sin^2 \beta = y^2 \leq 1 - x^2 = \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin \beta = |\sin \beta| \leq |\cos \alpha| = \cos \alpha,$$

jer su $\alpha, \beta \in (0, \pi/2]$. Kako je $\cos \alpha \geq 0$ i $\sin \alpha > 0$, dobija se

$$\cos \beta \cos \alpha \geq \sin \alpha \cos \alpha \geq \sin \alpha \sin \beta,$$

odnosno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \geq 0.$$

Kako je $\alpha + \beta \in (0, \pi]$ i $\cos(\alpha + \beta) \geq 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in (0, \pi/2]$.

(i-2) Ako je $x > 0$, $y > 0$ i $x^2 + y^2 > 1$, onda je $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\beta \in (0, \pi/2]$ i $\alpha + \beta \in (0, \pi]$. Pored toga, kako je $x^2 + y^2 > 1$, imamo

$$\sin^2 \alpha = x^2 > 1 - y^2 = \cos^2 \beta \Rightarrow \cos \beta = |\cos \beta| < |\sin \alpha| = \sin \alpha,$$

i

$$\sin^2 \beta = y^2 > 1 - x^2 = \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| < |\sin \beta| = \sin \beta.$$

Kako je $\cos \alpha \geq 0$ i $\sin \alpha > 0$, dobija se

$$\cos \beta \cos \alpha \leq \sin \alpha \cos \alpha < \sin \alpha \sin \beta,$$

odnosno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta < 0.$$

Kako je $\alpha + \beta \in (0, \pi]$ i $\cos(\alpha + \beta) < 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in (\pi/2, \pi]$.

(iii-1) Ako je $x < 0$, $y < 0$ i $x^2 + y^2 \leq 1$, onda je $\alpha \in [-\pi/2, 0)$, $\beta \in [-\pi/2, 0)$ i $\alpha + \beta \in [-\pi, 0)$. Također,

$$\sin^2 \alpha = x^2 \leq 1 - y^2 = \cos^2 \beta \Rightarrow -\sin \alpha = |\sin \alpha| \leq |\cos \beta| = \cos \beta,$$

i

$$\sin^2 \beta = y^2 \leq 1 - x^2 = \cos^2 \alpha \Rightarrow -\sin \beta = |\sin \beta| \leq |\cos \alpha| = \cos \alpha,$$

jer su $\alpha, \beta \in (0, \pi/2]$. Kako je $\cos \alpha \geq 0$ i $\sin \alpha < 0$, dobija se

$$\cos \beta \cos \alpha \geq (-\sin \alpha) \cos \alpha \geq (-\sin \alpha)(-\sin \beta),$$

odnosno

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \geq 0.$$

Kako je $\alpha + \beta \in [-\pi, 0)$ i $\cos(\alpha + \beta) \geq 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in [-\pi/2, 0)$.

(iii-2) Ako je $x < 0$, $y < 0$ i $x^2 + y^2 > 1$, onda je $\alpha \in [-\pi/2, 0)$, $\beta \in [-\pi/2, 0)$ i $\alpha + \beta \in [-\pi, 0)$. Kako je $x^2 + y^2 > 1$, imamo

$$\cos \beta = |\cos \beta| < |\sin \alpha| = -\sin \alpha \quad \text{i} \quad \cos \alpha = |\cos \alpha| < |\sin \beta| = -\sin \beta,$$

odakle je, uzevši u obzir da je $\cos \alpha \geq 0$ i $\sin \alpha < 0$

$$\cos \alpha \cos \beta \leq \cos \alpha(-\sin \alpha) < (-\sin \beta)(-\sin \alpha),$$

tj.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta < 0.$$

Kako je $\alpha + \beta \in [-\pi, 0)$ i $\cos(\alpha + \beta) < 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in [-\pi, \pi/2)$. ■

TEOREMA 11.4. Za realne brojeve $x, y \in [-1, 1]$, je
 $\arccos x + \arccos y$

$$= \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}), & \text{za } x + y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}), & \text{za } x + y < 0. \end{cases}$$

DOKAZ: Neka je $\arccos x = \alpha$, $\arccos y = \beta$, $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Tada je $\cos \alpha = x$ i $\cos \beta = y$ i $\alpha + \beta \in [0, 2\pi]$. Pored toga, kako su $\sin \alpha \geq 0$ i $\sin \beta \geq 0$, to je $\sin \alpha = \sqrt{1-x^2}$ i $\sin \beta = \sqrt{1-y^2}$. Dakle,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

odakle je

$$\arccos(\cos(\alpha + \beta)) = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}). \quad (42)$$

Može se pokazati da je

$$\arccos(\cos(\alpha + \beta)) = \begin{cases} \alpha + \beta, & \alpha + \beta \in [0, \pi]; \\ 2\pi - (\alpha + \beta), & \alpha + \beta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (43)$$

Naime, ako je $\alpha + \beta \in [0, \pi]$, prema definiciji je $\arccos(\cos(\alpha + \beta)) = \alpha + \beta$. Ako je $\alpha + \beta \in [\pi, 2\pi]$, biće $(\alpha + \beta) - \pi \in [0, \pi]$, tako da je prema definiciji

$$\arccos(\cos((\alpha + \beta) - \pi)) = (\alpha + \beta) - \pi$$

i

$$\begin{aligned} \arccos(\cos((\alpha + \beta) - \pi)) &= \arccos(\cos(\pi - (\alpha + \beta))) \\ &= \arccos(-\cos(\alpha + \beta)) = \pi - \arccos(\cos(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\arccos(\cos(\alpha + \beta)) = 2\pi - (\alpha + \beta), \quad \alpha + \beta \in [\pi, 2\pi].$$

Pokazaćemo da je

- ◇ $\alpha + \beta \in [0, \pi]$ za $x + y \geq 0$,
- ◇ $\alpha + \beta \in (\pi, 2\pi]$ za $x + y < 0$,

tako da traženo tvrđenje sledi iz (42) i (43).

(i) Neka je $x + y \geq 0$.

(i-1) Ako je $x \geq 0$, $y \geq 0$, onda je $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, pa je $\alpha + \beta \in [0, \pi]$.

(i-2) Ako je $x \geq 0$, $y \leq 0$, onda iz $x \geq -y \geq 0$ sledi $x^2 \geq y^2$. Kako je $\alpha \in [0, \pi/2]$ i $\beta \in [\pi/2, \pi]$, imamo $\alpha + \beta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ i iz $x^2 \geq y^2$ dobijamo

$$\cos^2 \alpha \geq \cos^2 \beta \Rightarrow |\cos \alpha| = \cos \alpha \geq |\cos \beta| = -\cos \beta.$$

$$1 - \sin^2 \alpha \geq 1 - \sin^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha \leq \sin^2 \beta \Rightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha \leq |\sin \beta| = \sin \beta,$$

Koristeći da je $\cos \alpha \geq 0$ i $\sin \alpha \geq 0$, dobija se

$$\sin \beta \cos \alpha \geq \sin \alpha \cos \alpha \geq \sin \alpha (-\cos \beta).$$

Tada je

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \geq 0.$$

Prema tome, iz $\alpha + \beta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ i $\sin(\alpha + \beta) \geq 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in [\pi/2, \pi]$.

(i-3) Ako je $x \leq 0$, $y \geq 0$, onda je $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ i $\beta \in [0, \pi/2]$ i iz $y \geq -x \geq 0$ sledi $y^2 \geq x^2$. Tada je $\alpha + \beta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ i iz $y^2 \geq x^2$ dobijamo

$$|\cos \alpha| = -\cos \alpha \leq |\cos \beta| = \cos \beta \quad \text{i} \quad |\sin \alpha| = \sin \alpha \geq |\sin \beta| = \sin \beta$$

odakle se dobija da je $\cos \beta \sin \alpha \geq (-\cos \alpha) \sin \alpha \geq (-\cos \alpha) \sin \beta$, odnosno $\sin(\alpha + \beta) \geq 0$. Iz $\alpha + \beta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ i $\sin(\alpha + \beta) \geq 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in [\pi/2, \pi]$.

(ii) Ako je $x + y < 0$, onda se posmatrajući slučajeve:

(ii-1) $x < 0, y < 0$,

(ii-2) $x < 0, y > 0, 0 < y < -x$,

(ii-3) $x > 0, y < 0, 0 < x < -y$,

na sličan način može se pokazati da je $\alpha + \beta \in (\pi, 2\pi]$. ■

PRIMER 11.5. Izračunati $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

REŠENJE. Neka je $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\beta = \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Tada je $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, odnosno $\alpha - 2\beta \in [-\pi, \pi/2]$ i $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Dobijamo da je

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \alpha \in [0, \pi/2] \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \cos \beta &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta}, \quad \beta \in [0, \pi/2] \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{3} \\ \cos 2\beta &= \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = -\frac{7}{9}, \quad \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{4\sqrt{2}}{9} \\ &\Downarrow \\ \sin(\alpha - 2\beta) &= \sin \alpha \cos 2\beta - \cos \alpha \sin 2\beta = -\frac{5\sqrt{3}}{9} \end{aligned} \tag{44}$$

odakle je

$$\arcsin(\sin(\alpha - 2\beta)) = \arcsin\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}\right) = -\arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} \tag{45}$$

Da bi odredili $\alpha - 2\beta$ iz (44) ili (45), odredimo najpre kom segmentu pripada taj broj. Kako je $\alpha - 2\beta \in [-\pi, \pi/2]$ i $\sin(\alpha - 2\beta) < 0$, zaključujemo da imamo sledeće dve mogućnosti:

$$(i) \quad \alpha - 2\beta \in [-\pi, -\pi/2] \quad \text{ili} \quad (ii) \quad \alpha - 2\beta \in [-\pi/2, 0].$$

Da bi odredili da li važi (i) ili (ii), odredjujemo da li je $\cos(\alpha - 2\beta) \leq 0$. Kako je

$$\cos(\alpha - 2\beta) = \cos \alpha \cos 2\beta + \sin \alpha \sin 2\beta = -\frac{\sqrt{6}}{9} < 0$$

zaključujemo da važi (i), odnosno da je $\alpha - 2\beta \in [-\pi, -\pi/2]$.

Do vrednosti $\alpha - 2\beta$ možemo doći na dva načina - iz (44) ili iz (45) :

I način: iz (45) određivanjem $\arcsin(\sin(\alpha - 2\beta))$ za $\alpha - 2\beta \in [-\pi, -\pi/2]$. Za $\alpha - 2\beta \in [-\pi, -\pi/2]$, je $\alpha - 2\beta + \pi \in [0, \pi/2]$, tako da je prema definiciji

$$\arcsin(\sin((\alpha - 2\beta) + \pi)) = (\alpha - 2\beta) + \pi$$

i kako je $\sin(\pi + x) = -\sin x$ imamo

$$\arcsin(\sin(\pi + (\alpha - 2\beta))) = \arcsin(-\sin(\alpha - 2\beta)) = -\arcsin(\sin(\alpha - 2\beta))$$

odakle se dobija

$$(\alpha - 2\beta) + \pi = -\arcsin(\sin(\alpha - 2\beta)) \Rightarrow \arcsin(\sin(\alpha - 2\beta)) = -(\alpha - 2\beta) - \pi$$

Dakle,

$$-(\alpha - 2\beta) - \pi = -\arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \alpha - 2\beta = \arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} - \pi.$$

II način: iz (44) tražeći rešenje jednačine $\sin x = -\frac{5\sqrt{3}}{9}$ na segmentu $[-\pi, -\pi/2]$. Primećimo da su sva rešenja jednačine (44):

$$\alpha - 2\beta = \arcsin\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}\right) + 2k\pi \quad \vee$$

$$\alpha - 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}\right) + 2k\pi = \pi + \arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tražimo onu vrednost $\alpha - 2\beta$ koja pripada segmentu $[-\pi, -\pi/2]$. Kako je

$$\arcsin\left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \quad \pi + \arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

traženo rešenje dobijamo iz drugog skupa rešenja jednačine za $k = -1$, jer je

$$\pi + \arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} - 2\pi \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right].$$

Dakle, dobijamo $\alpha - 2\beta = \arcsin \frac{5\sqrt{3}}{9} - \pi$. $\square$

(iii) Arkus tanges. Funkcija

$$h_1 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \operatorname{tg} x,$$

je strogo rastuća (injektivna) i neprekidna na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Kako je

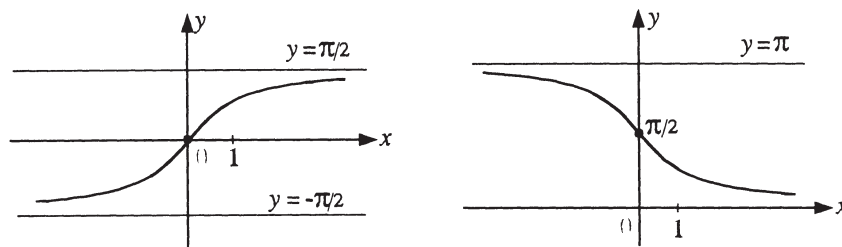
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = \infty,$$

prema Teoremi 1.9. je $h_1\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\infty, +\infty)$, odnosno h_1 je surjekcija. Dakle, h_1 je bijekcija, pa postoji inverzna funkcija

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad H(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

koja je prema Teoremi 1.9. takođe strogo rastuća i neprekidna na $\mathbb{R}$. Važe jednakosti:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Slika 42: Grafici funkcija $y = \arctg x$ i $y = \text{arcctg } x$

Grafik funkcije $H(x) = \arctg x$, prikazan je na Slici 42. Za funkciju $H(x) = \arctg x$ važi:

- funkcija H definisana je za svako $x \in \mathbb{R}$;
- funkcija H je neparna, tj. $\arctg(-x) = -\arctg x$ za svako $x \in \mathbb{R}$;
- funkcija je negativna za $x < 0$, pozitivna za $x > 0$ i nula funkcije je $x = 0$;
- funkcija je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ (prema T.1.6.).

Dokaz neparnosti funkcije H je analogan dokazu Teoreme 11.1.

(iv) **Arkus kotanges.** Funkcija

$$k_1 : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \text{ctg } x,$$

je strogo opadajuća i neprekidna. Kako je

$$\lim_{x \rightarrow +0} \text{ctg } x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} \text{ctg } x = -\infty,$$

prema Teoremi 1.9. je $k_1((0, \pi)) = (-\infty, +\infty)$, odnosno k_1 je surjekcija. Dakle, k_1 je bijekcija, pa postoji inverzna funkcija

$$K : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \quad K(x) = \text{arcctg } x, \quad x \in \mathbb{R}$$

koja je prema Teoremi 1.9. takođe strogo opadajuća i neprekidna na $\mathbb{R}$. Važe jednakosti:

$$\text{arcctg}(\text{ctg } x) = x, \quad x \in (0, \pi), \quad \text{ctg}(\text{arcctg } x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Grafik funkcije $K(x) = \text{arcctg } x$, prikazan je na Slici 42. Za funkciju $y = K(x) = \text{arcctg } x$ važi:

- funkcija K definisana je za svako $x \in \mathbb{R}$;
 - funkcija K nije ni parna ni neparna, već važi
- $$\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg } x;$$
- funkcija K nema nule i pozitivna je za svako $x \in \mathbb{R}$;
 - funkcija je strogo opadajuća (prema T.1.6.).

TEOREMA 11.5. Za svako $x \in \mathbb{R}$ važe jednakosti:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{C})$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = -\operatorname{arcctg} x + \pi. \quad (\text{D})$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x. \quad (\text{E})$$

Dokaz Teoreme 11.5. analogan je dokazu Teoreme 11.1. i Teoreme 11.2.

TEOREMA 11.6. Za realne brojeve $x, y \in \mathbb{R}$, je

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$$

$$= \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right), & \text{za } xy < 1; \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + \pi, & \text{za } x > 0, y > 0 \text{ i } xy > 1; \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) - \pi, & \text{za } x < 0, y < 0 \text{ i } xy > 1. \end{cases}$$

DOKAZ: Neka je $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arctg} y = \beta$, $\alpha, \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Tada je $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$. Dakle,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{x + y}{1 - xy}$$

odakle je

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha + \beta)) = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}. \quad (46)$$

Kako je $\alpha + \beta \in (-\pi, \pi)$, može se pokazati (pokazati !! - videti dokaz Teoreme 11.3.) da je

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha + \beta)) = \begin{cases} \alpha + \beta, & \alpha + \beta \in (-\pi/2, \pi/2); \\ (\alpha + \beta) - \pi, & \alpha + \beta \in (\pi/2, \pi); \\ (\alpha + \beta) + \pi, & \alpha + \beta \in (-\pi, -\pi/2). \end{cases} \quad (47)$$

Pokazaćemo da je

- ◇ $\alpha + \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ za $xy < 1$;
- ◇ $\alpha + \beta \in (\pi/2, \pi)$ za $x > 0$, $y > 0$, $xy > 1$;
- ◇ $\alpha + \beta \in (-\pi, -\pi/2)$ za $x < 0$, $y < 0$, $xy > 1$,

tako da traženo tvrđenje sledi iz (46) i (47). Razlikujemo slučajeve:

- (i) $x > 0$, $y > 0 \rightarrow \begin{cases} \text{(i-1): } x > 0, y > 0, xy < 1 \\ \text{(i-2): } x > 0, y > 0, xy > 1 \end{cases}$
- (ii) $x \leq 0$, $y \geq 0$
- (iii) $x < 0$, $y < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{(iii-1): } x < 0, y < 0, xy < 1 \\ \text{(iii-2): } x < 0, y < 0, xy > 1 \end{cases}$

(iv) $x \geq 0, y \leq 0$

(ii) Ako je $x \leq 0, y \geq 0$, onda je $\alpha \in (-\pi/2, 0]$ i $\beta \in [0, \pi/2)$, odnosno $\alpha + \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dakle, za $xy \leq 0 < 1$ je $\alpha + \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(iv) Ako je $x \leq 0, y \geq 0$, onda je $\alpha \in (-\pi/2, 0]$ i $\beta \in [0, \pi/2)$, odnosno $\alpha + \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dakle, za $xy \leq 0 < 1$ je $\alpha + \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(i-1) Neka je $x > 0, y > 0$ i $xy < 1$. Tada je $\alpha \in (0, \pi/2), \beta \in (0, \pi/2)$, tako da je $\alpha + \beta \in (0, \pi)$. Takođe,

$$xy < 1 \wedge y > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = x < \frac{1}{y} = \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < \frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

Kako su $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, to je $\cos \alpha > 0$ i $\sin \beta > 0$, tako da se dobija

$$\sin \alpha \sin \beta < \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) > 0.$$

Dakle, iz $\alpha + \beta \in (0, \pi)$ i $\cos(\alpha + \beta) > 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in (0, \pi/2)$.

(i-2) Neka je $x > 0, y > 0$ i $xy > 1$. Tada je $\alpha \in (0, \pi/2), \beta \in (0, \pi/2)$ i $\alpha + \beta \in (0, \pi)$. Takođe,

$$xy > 1 \wedge y > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = x > \frac{1}{y} = \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

Kako su $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$, to je $\cos \alpha > 0$ i $\sin \beta > 0$, tako da se dobija

$$\sin \alpha \sin \beta > \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) < 0.$$

Dakle, iz $\alpha + \beta \in (0, \pi)$ i $\cos(\alpha + \beta) < 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in (\pi/2, \pi)$.

(iii-1) Neka je $x < 0, y < 0$ i $xy < 1$. Tada je $\alpha \in (-\pi/2, 0), \beta \in (-\pi/2, 0)$, tako da je $\alpha + \beta \in (-\pi, 0)$. Pored toga, imamo

$$xy < 1 \wedge y < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = x > \frac{1}{y} = \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

Kako su $\alpha, \beta \in (-\pi/2, 0)$, to je $\cos \alpha < 0$ i $\sin \beta > 0$, tako da se dobija

$$\sin \alpha \sin \beta < \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) > 0.$$

Dakle, iz $\alpha + \beta \in (-\pi, 0)$ i $\cos(\alpha + \beta) > 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in (-\pi/2, 0)$.

(iii-2) Neka je $x < 0, y < 0$ i $xy > 1$. Tada je $\alpha \in (-\pi/2, 0), \beta \in (-\pi/2, 0)$ i $\alpha + \beta \in (-\pi, 0)$ i imamo

$$xy > 1 \wedge y < 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = x < \frac{1}{y} = \operatorname{ctg} \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < \frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

Kako su $\alpha, \beta \in (-\pi/2, 0)$, to je $\cos \alpha < 0$ i $\sin \beta > 0$, tako da se dobija se

$$\sin \alpha \sin \beta > \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta) < 0.$$

Dakle, iz $\alpha + \beta \in (-\pi, 0)$ i $\cos(\alpha + \beta) < 0$, zaključujemo da je $\alpha + \beta \in (-\pi, -\pi/2)$. ■

PRIMER 11.6. *Izračunati $\arctg \frac{2}{11} + 2 \arctg \frac{1}{7}$.*

REŠENJE. Neka je $\alpha = \arctg \frac{2}{11}$, $\beta = \arctg \frac{1}{7}$. Tada je $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ i $\tg \alpha = \frac{2}{11}$, $\tg \beta = \frac{1}{7}$. Kako je

$$\tg 2\beta = \frac{2 \tg \beta}{1 - \tg^2 \beta} = \frac{7}{24},$$

dobija se

$$\tg(\alpha + 2\beta) = \frac{\tg \alpha + \tg 2\beta}{1 - \tg \alpha \cdot \tg 2\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \arctg(\tg(\alpha + 2\beta)) = \arctg \frac{1}{2}.$$

Da bi odredili $\arctg(\tg(\alpha + 2\beta))$, odredjujemo interval kome pripada realan broj $\alpha + 2\beta$. Naime, kako je $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi/2$ i $\tg(\alpha + 2\beta) > 0$, zaključujemo da imamo sledeće dve mogućnosti:

$$(i) \ \alpha + 2\beta \in (0, \pi/2) \text{ ili } (ii) \ \alpha + 2\beta \in (\pi, 3\pi/2).$$

Da bi odredili da li važi (i) ili (ii), dovoljno je odrediti da li je $\sin(\alpha + 2\beta) \leq 0$ ili da li je $\cos(\alpha + 2\beta) \leq 0$. Koristeći formule

$$\sin^2 x = \frac{\tg^2 x}{1 + \tg^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tg^2 x}$$

i da je $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ (tako da je $\sin \alpha > 0, \sin \beta > 0, \cos \alpha > 0, \cos \beta > 0$), dobija se

$$\sin \alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + 2\beta) = \cos \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - \sin \alpha (2 \sin \beta \cos \beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

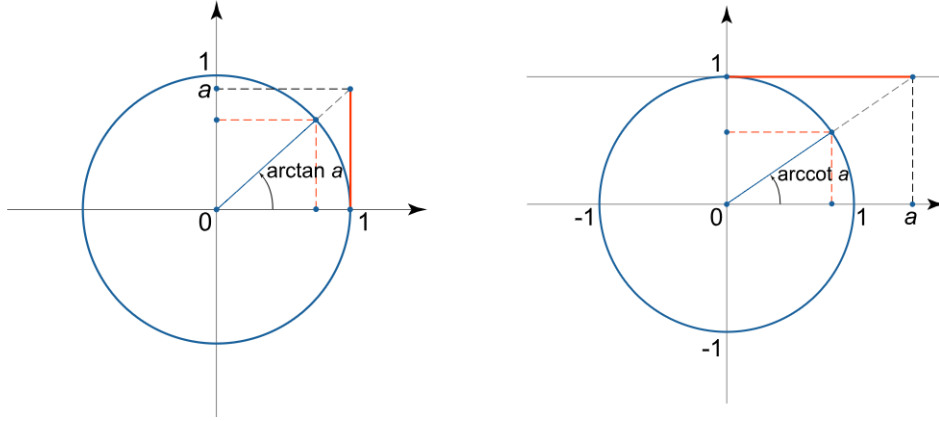
Kako je $\cos(\alpha + 2\beta) > 0$, zaključujemo da važi (i), odnosno da je $0 < \alpha + 2\beta < \pi/2$, odakle je $\arctg(\tg(\alpha + 2\beta)) = \alpha + 2\beta$. Dakle,

$$\alpha + 2\beta = \arctg \frac{2}{11} + 2 \arctg \frac{1}{7} = \arctg \frac{1}{2}. \quad \square$$

TRIGONOMETRIJSKE JEDNAČINE

Skup rešenja jednačine $\tg x = a$, $a \in \mathbb{R}$, je

$$x \in \{\arctg a + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$



Slika 43: (a) rešenja jednačine $\operatorname{tg} x = a$; (b) rešenja jednačine $\operatorname{ctg} x = a$;

Skup rešenja jednačine $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, je

$$x \in \{\operatorname{arccotg} a + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

PRIMER 11.7. Odrediti sva rešenja jednačine $\operatorname{tg} 2x = -1/5$ na $(\pi, 3\pi)$.

REŠENJE. Skup rešenja jednačine $\operatorname{tg} 2x = -1/5$ je

$$\left\{ 2x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{5} \right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\},$$

odnosno

$$\left\{ x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{5} \right) + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tražimo rešenja koja pripadaju segmentu $(\pi, 3\pi)$. Kako je prema definiciji $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{5}) \in (-\pi/2, 0)$, tražena rešenja dobijamo za $k = 3, k = 4, k = 5$ i $k = 6$ i to su

$$x_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{5} \right) + \frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \frac{3\pi}{2} \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right),$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{5} \right) + 2\pi = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + 2\pi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right),$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{5} \right) + \frac{5\pi}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \frac{5\pi}{2} \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2} \right),$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{5} \right) + 3\pi = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + 3\pi \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi \right). \quad \square$$

TEOREMA 11.7. *Važe sledeće veze izmedju invernih trigonometrijskih funkcija:*

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \quad (48)$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (49)$$

$$\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \quad (50)$$

$$\operatorname{arcctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (51)$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty) \quad (52)$$

$$\arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in (0, 1) \quad (53)$$

$$\operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in (0, +\infty) \quad (54)$$

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in (0, 1) \quad (55)$$

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in (0, +\infty) \quad (56)$$

DOKAZ: (48): Jednakost (48) očigledno važi za $x = 0$. Neka je $x \in (0, 1)$. Označimo sa $\arcsin x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\arcsin x$ je $\sin \alpha = x$ i $0 < \alpha < \pi/2$. Onda je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pored toga, kako je $\alpha \in (0, \pi/2)$, biće $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$, odakle sledi (48).

Neka je $x \in (-1, 0)$. Tada je $y = -x \in (0, 1)$, pa prema prethodno dokazanom važi

$$\begin{aligned} \arcsin y = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} &\Rightarrow \arcsin(-x) = \operatorname{arctg} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\Rightarrow -\arcsin x = -\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

odakle sledi da (48) važi i za svako $x \in (-1, 0)$.

(49): Neka je $x \in \mathbb{R}$. Označimo sa $\operatorname{arctg} x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\operatorname{arctg} x$ je $\operatorname{tg} \alpha = x$ i $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Onda je

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \arcsin(\sin \alpha) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pored toga, kako je $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, biće $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$, odakle sledi (49).

(50): Jednakost (50) očigledno važi za $x = 0$. Neka je $x \in (0, 1)$. Označimo sa $\arccos x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\arccos x$ je $\cos \alpha = x$ i $0 < \alpha < \pi/2$. Onda je

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pored toga, kako je $\alpha \in (0, \pi/2)$, biće $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$, odakle sledi (50).

Neka je $x \in (-1, 0)$. Tada je $y = -x \in (0, 1)$, pa prema prethodno dokazanom važi

$$\arccos(-x) = \operatorname{arcctg} \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \pi - \arccos x = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

odakle sledi da (50) važi i za svako $x \in (-1, 0)$.

(51): Neka je $x \in \mathbb{R}$. Označimo sa $\operatorname{arcctg} x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\operatorname{arcctg} x$ je $\operatorname{ctg} \alpha = x$ i $0 < \alpha < \pi$. Onda je

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow \arccos(\cos \alpha) = \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Pored toga, kako je $\alpha \in (0, \pi)$, biće $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$, odakle sledi (51).

(52): Neka je $x \in (0, +\infty)$. Označimo sa $\operatorname{arctg} x = \alpha$. Tada prema definiciji funkcije $\operatorname{arctg} x$ je $\operatorname{tg} \alpha = x$ i $0 < \alpha < \pi/2$. Onda je

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}.$$

Pored toga, kako je $\alpha \in (0, \pi/2)$, biće $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \alpha$, odakle sledi (52).

Iz formula (48) i (52) sledi da važi (53). Iz formula (49) i (52) sledi da važi (54). Iz formula (50) i (52) sledi da važi (55). Iz formula (51) i (52) sledi da važi (56). ■

12. HIPERBOLIČNE FUNKCIJE

Na trigonometrijskoj kružnici (slika 44-(a)) definisane su trigonometrijske funkcije $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ realnog broja α za koji je dužina luka $\widehat{AC}$ jednaka α , kao dužine duži BC , OB , AD , tj.

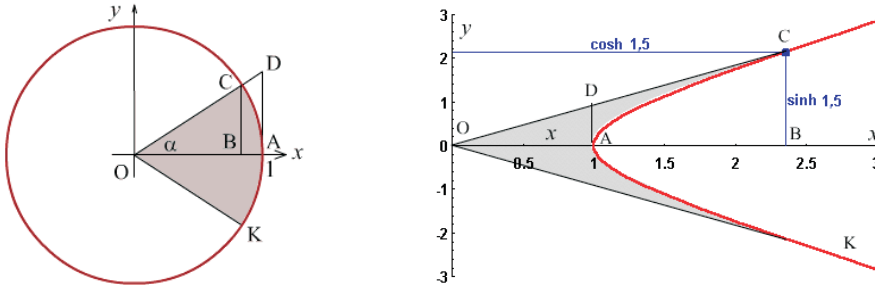
$$|BC| = \sin \alpha, \quad |OB| = \cos \alpha, \quad |AD| = \operatorname{tg} \alpha.$$

Realan broj α možemo iskazati i kao površinu P_k kružnog isečka COK :

$$P_k = \frac{r^2}{2} \cdot 2\alpha = \alpha.$$

Analogno posmatrajući hiperbolu $x^2 - y^2 = 1$, umesto kružnice $x^2 + y^2 = 1$, možemo definisati i hiperbolične funkcije.

Naime, za dati realni broj u , tačku C na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ odredimo tako da je $P_h = |u|/2$ površina sektora COA odredjenog x -osom, hiperbolom i pravom OC (slika 44-(b)).



Slika 44: Definicija trigonometrijskih i hiperboličnih funkcija

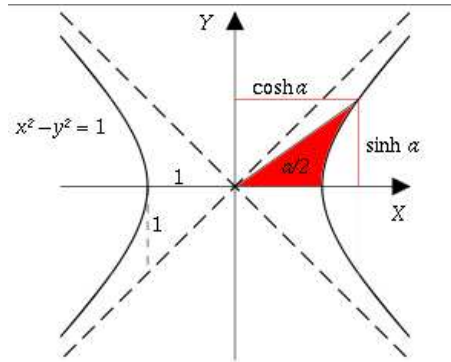
Tada, definišemo hiperbolične funkcije realnog broja u - sinus hiperbolični, kosinus hiperbolični i tangens hiperbolični sa:

$$\text{sh } u = |BC|, \quad \text{ch } u = |OB|, \quad \text{th } u = |AD|.$$

Dakle, ako je tačka $A(1, 0)$ i tačka C tačka hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ takva da je površina oblasti COA jednaka $|\alpha|/2$ (slika 45), onda $\text{sh } \alpha$ definišemo kao ordinatu tačke C , dok $\text{ch } \alpha$ definišemo kao apscisu tačke C , odnosno $C(\text{ch } \alpha, \text{sh } \alpha)$. Ako je D tačka preseka tangente hiperbole u tački A sa pravom OC , onda $\text{th } \alpha$ definišemo kao dužinu duži AD , odnosno $\text{th } u = |AD|$.

Direktno iz definicije zaključujemo da važi elementarno svojstvo - veza između $\text{sh } \alpha$ i $\text{ch } \alpha$:

$$\text{ch}^2 \alpha - \text{sh}^2 \alpha = 1.$$



Slika 45: Definicija hiperboličnih funkcija

Kada površinu P_h izračunamo (npr. primenom određenog integrala ili dvostrukog integrala), dobijamo

$$x = P_h = \ln(|BC| + \sqrt{|BC|^2 + 1}) = \ln(|OB| + \sqrt{|OB|^2 - 1}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |AD|}{1 - |AD|},$$

odakle određujemo dužine duži BC, OB, AD , odnosno za hiperbolične funkcije dobijamo izraze

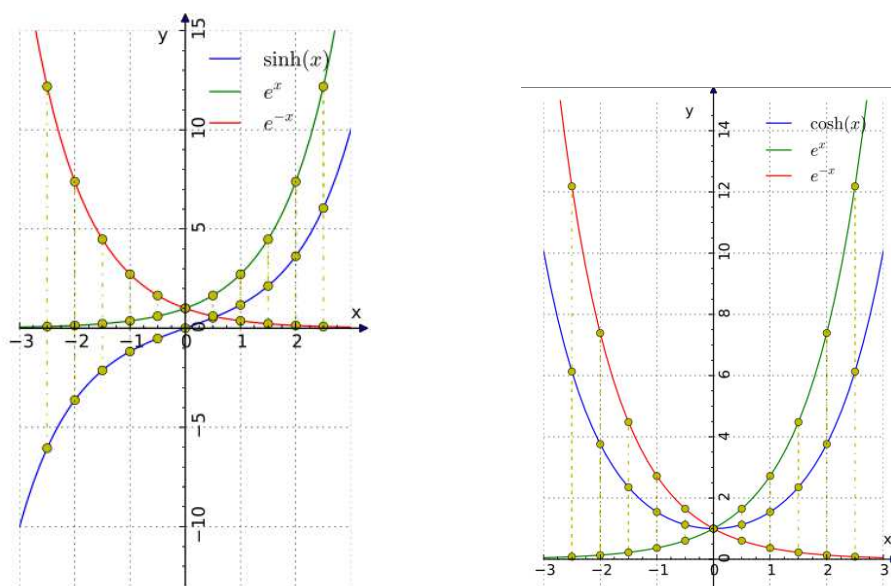
u eksponencijalnom obliku:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x = |BC| &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{ch} x = |OB| &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{th} x = |AD| &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\end{aligned}$$

Iz praktičnih razloga, jednostavnijeg računa, najčešće su funkcije **sinus hiperbolični**, **kosinus hiperbolični** i **tanges hiperbolični** definisane sa

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Koriste se i oznake **sinh** x , **cosh** x i **tanh** x . Grafici ovih funkcija $y = \operatorname{sh} x$ i $y = \operatorname{ch} x$ prikazani su na slici 46.



Slika 46: Grafici funkcija $y = \operatorname{sh} x$ i $y = \operatorname{ch} x$

Po analogiji sa trigonometrijskim funkcijama definiše se i **kotanges hiperbolični**:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Koristi se i oznaka **coth** x .

IZRAČUNAVANJE POVRŠINE P_h : Neka je $C(a, \sqrt{a^2 - 1})$ proizvoljna tačka hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. 1. Primenom određenog integrala površina ABC (Slika 44-(b)) je

$$(1) \quad P_{ABC} = \int_1^a \sqrt{x^2 - 1} \, dx,$$

a tražena površina je

$$(2) \quad \frac{x}{2} = \frac{P_h}{2} = P_{\triangle OBC} - P_{ABC} = \frac{|OB| \cdot |BC|}{2} - P_{ABC}.$$

Parcijalnom integracijom

$$u = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow du = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad dv = dx \Rightarrow v = x,$$

dobija se

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= x\sqrt{x^2 - 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 - 1} - \int \sqrt{x^2 - 1} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

odnosno

$$(3) \quad I = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Kako je $x > 1$ u oblasti ABC smenom $x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in (0, \pi/2)$ dobija se

$$(4) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| + C$$

Koristeći

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}},$$

imamo

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}{2} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

što zajedno sa (4), uzevši u obzir da je $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ za $x > 1$, daje

$$(5) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$$

Dakle, iz (3) i (5) imamo

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$$

Kako je $|OB| = a$, $|BC| = \sqrt{a^2 - 1}$, $|OB|^2 = |BC|^2 + 1$, dobija se prema (1) i (2)

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} = \frac{P_h}{2} &= \frac{|OB| \cdot |BC|}{2} - \left(\frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right) \Big|_1^a \\ &= \frac{|OB| \cdot |BC|}{2} - \left(\frac{|OB| \cdot |BC|}{2} - \frac{1}{2} \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(|OB| + \sqrt{|OB|^2 - 1}) = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{|BC|^2 + 1} + |BC|). \end{aligned}$$

Jednačina prave OC je $y = \frac{|BC|}{|OB|} x$, tako da tačka D sa ove prave je sa koordinatama $(1, |BC|/|OB|)$, odnosno, uzveši u obzir da je $|AD| < 1$ imamo

$$|AD| = \frac{|BC|}{|OB|} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{1 - \sqrt{|AD|^2}}$$

$$\Rightarrow a + \sqrt{a^2 - 1} = \frac{1 + |AD|}{\sqrt{1 - |AD|^2}} = \sqrt{\frac{1 + |AD|}{1 - |AD|}}$$

$$\Rightarrow x = P_h = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |AD|}{1 - |AD|}.$$

Važe sledeće važne jednakosti:

- (1) $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$,
- (2) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,
- (3) $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$,
- (4) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$,

$$(5) \quad \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$(6) \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$(7) \quad \operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}$$

$$(8) \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}$$

$$(9) \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}$$

Jednakost (1) je očigledna. Dokažimo da važe ostale jednakosti.

$$\begin{aligned} (2): \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2 + 2}{4} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3): \quad 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x &= 1 + 2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{2 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x, \end{aligned}$$

$$(4): \quad 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \cdot \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$$

$$\begin{aligned}
(5) : \quad & \text{sh } x \cdot \text{ch } y + \text{ch } x \cdot \text{sh } y \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2(e^{x+y} - e^{-(x+y)})}{4} = \text{sh } (x + y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) : \quad & 2 \text{sh } \frac{x+y}{2} \text{ch } \frac{x-y}{2} = 2 \frac{e^{\frac{x+y}{2}} - e^{-\frac{x+y}{2}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} \\
&= \frac{e^x + e^y - e^{-y} - e^{-x}}{2} = \text{sh } x + \text{sh } y.
\end{aligned}$$

Formule (6), (8) i (9) pokazuju se analogno formulama (5) i (7).

Važe sledeće veze između hiperboličnih funkcija za svako $x \in (0, \infty)$:

$$(10) \quad \text{sh } x = \sqrt{\text{ch}^2 x - 1} = \frac{\text{th } x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\text{cth}^2 x - 1}},$$

$$(11) \quad \text{ch } x = \sqrt{\text{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}} = \frac{\text{cth } x}{\sqrt{\text{cth}^2 x - 1}},$$

$$(12) \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\sqrt{\text{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}}{\text{ch } x} = \frac{1}{\text{cth } x},$$

$$(13) \quad \text{cth } x = \frac{\sqrt{\text{sh}^2 x + 1}}{\text{sh } x} = \frac{\text{ch } x}{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\text{th } x}.$$

TEOREMA 12.1. (Moavrova hiperbolična formula) *Za svako $n \in \mathbb{N}$ važi*

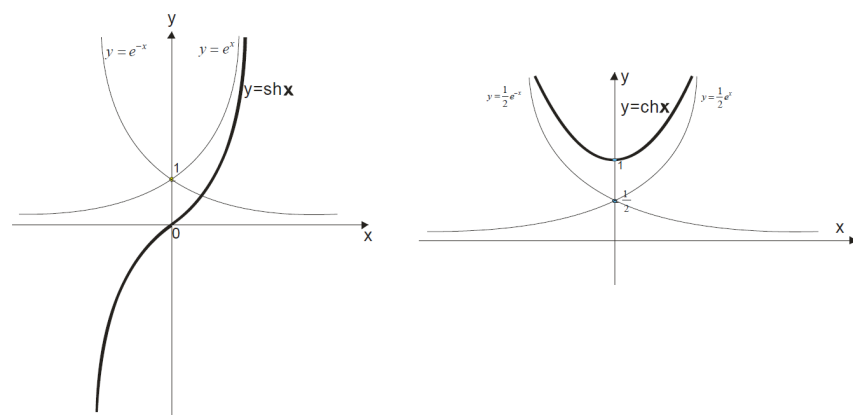
$$(\text{ch } x \pm \text{sh } x)^n = \text{ch } nx \pm \text{sh } nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

DOKAZ. Formulu pokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ formula očigledno važi. Pretpostavimo da važi za $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo da važi i za $n + 1$. Primenom adicijonih formula (5) i (6) imamo da je

$$\begin{aligned}
(\text{ch } x + \text{sh } x)^{n+1} &= (\text{ch } x + \text{sh } x)^n (\text{ch } x + \text{sh } x) = (\text{ch } nx + \text{sh } nx)(\text{ch } x + \text{sh } x) \\
&= \text{ch } nx \cdot \text{ch } x + \text{ch } nx \cdot \text{sh } x + \text{sh } nx \cdot \text{ch } x + \text{sh } nx \cdot \text{sh } x \\
&= \text{ch } (nx + x) + \text{sh } (nx + x) = \text{ch } (n + 1)x + \text{sh } (n + 1)x.
\end{aligned}$$

Dakle, formula važi za svako $n \in \mathbb{N}$. ■

Ističemo najvažnija svojstva hiperboličnih funkcija.

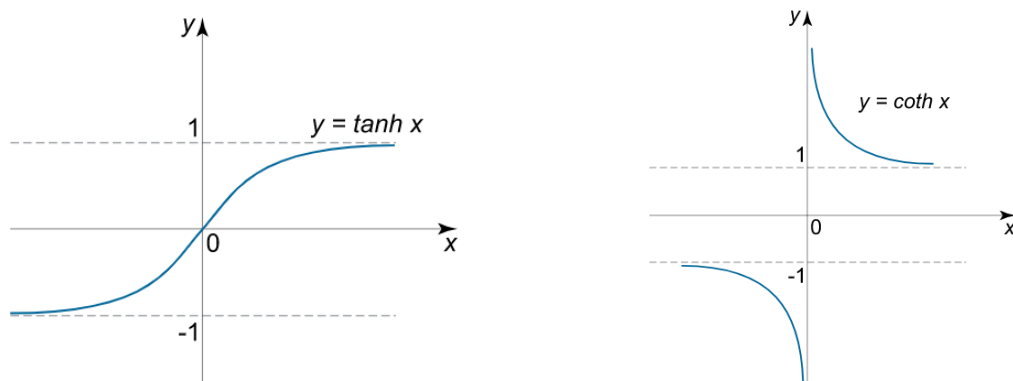
Slika 47: Grafici funkcija $y = \operatorname{sh} x$ i $y = \operatorname{ch} x$

(i) Sinus hiperbolični. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- funkcija f je definisana na $\mathbb{R}$
- funkcija f je neparna
- funkcija f je pozitivna za $x > 0$ i negativna za $x < 0$. $x = 0$ je nula funkcije
- funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$

(ii) Kosinus hiperbolični. $g(x) = \operatorname{ch} x$, $g : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$

- funkcija g je definisana na $\mathbb{R}$
- funkcija g je parna
- funkcija g je pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$
- funkcija g je strogo opadajuća na $(-\infty, 0)$ i strogo rastuća na $(0, +\infty)$

Slika 48: Grafici funkcija $y = \operatorname{th} x$ i $y = \operatorname{cth} x$

(iii) **Tanges hiperbolični.** $h(x) = \operatorname{th} x$, $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$

- funkcija h je definisana na $\mathbb{R}$
- funkcija h je neparna
- funkcija h je pozitivna za $x > 0$ i negativna za $x < 0$. $x = 0$ je nula funkcije
- funkcija h je strogo rastuća na $\mathbb{R}$

(iv) **Kotanges hiperbolični.** $k(x) = \operatorname{cth} x$, $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- funkcija k je definisana na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- funkcija k je neparna
- funkcija k je pozitivna za $x > 0$ i negativna za $x < 0$
- funkcija k je strogo opadajuća na $(-\infty, 0)$ i na $(0, \infty)$

PRIMER 12.1. Ispitati monotonost funkcije $f(x) = 2^{3-\operatorname{sh} x}$ na njenoj oblasti definisanosti.

REŠENJE: Kako su funkcije 2^x i $\operatorname{sh} x$ definisane na $\mathbb{R}$, oblast definisanosti date funkcije je $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Funkcija $\operatorname{sh} x$ je rastuća, pa je za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$

$$x_1 < x_2 \implies \operatorname{sh} x_1 < \operatorname{sh} x_2 \implies 3 - \operatorname{sh} x_1 > 3 - \operatorname{sh} x_2$$

i kako je funkcije 2^t takodje rastuća biće

$$f(x_1) = 2^{3-\operatorname{sh} x_1} > 2^{3-\operatorname{sh} x_2} = f(x_2)$$

za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$, $x_1 < x_2$. Dakle data funkcija je opadajuća na $\mathbb{D}$. $\boxtimes$

PRIMER 12.2. Ispitati monotonost funkcije $f(x) = \arccos(1 - \sqrt{x})^{-1}$ na njenoj oblasti definisanosti.

REŠENJE: Funkcija $(1 - \sqrt{x})^{-1}$ definisana je za $x \geq 0$, $x \neq 1$. Kako je funkcija $\arccos x$ definisana na $[-1, 1]$, data funkcija je definisana za

$$-1 \leq \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \leq 1 \implies x \geq 4 \vee x = 0.$$

Za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{D} = [4, \infty)$, koristeći da je $y = \sqrt{x}$ rastuća, imamo

$$4 \leq x_1 < x_2 \implies 2 \leq \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \implies 1 - \sqrt{x_1} > 1 - \sqrt{x_2} \dots (*)$$

Kako je $1 - \sqrt{x_1} < 0$, $1 - \sqrt{x_2} < 0$ za $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$, biće $(1 - \sqrt{x_1})(1 - \sqrt{x_2}) > 0$. Zato deljenjem nejednakosti (*) sa $(1 - \sqrt{x_1})(1 - \sqrt{x_2}) > 0$ dobija se

$$\frac{1}{1 - \sqrt{x_2}} > \frac{1}{1 - \sqrt{x_1}}.$$

Funkcija $y = \arccos x$ je monotono opadajuća, pa je

$$f(x_1) = \arccos \frac{1}{1 - \sqrt{x_1}} > \arccos \frac{1}{1 - \sqrt{x_2}} = f(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ takve da je $x_1 < x_2$. Dakle data funkcija je opadajuća na $\mathbb{D}$. $\square$

PRIMER 12.3. Ispitati monotonost funkcije $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\arccos x - \frac{\pi}{6})$ na njenoj oblasti definisanosti.

REŠENJE: Funkcija $y = \arccos x$ definisana je za $x \in [-1, 1]$. Kako je funkcija $y = \log_{1/2} x$ definisana za $x > 0$, data funkcija je definisana za $\arccos x > \frac{\pi}{6}$. Koristeći da je funkcija $\cos x$ opadajuća na $[0, \pi]$ zaključujemo

$$\frac{\pi}{6} < \arccos x \leq \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} > \cos(\arccos x) \geq \cos \pi \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > x \geq -1.$$

Dakle, $\mathbb{D} = [-1, \sqrt{3}/2)$.

Za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ kako je $y = \arccos x$ opadajuća biće

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \arccos x_1 - \frac{\pi}{6} > \arccos x_2 - \frac{\pi}{6}$$

i kako je $y = \log_{1/2} x$ opadajuća, imamo da je

$$f(x_1) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\arccos x - \frac{\pi}{6}\right) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\arccos x - \frac{\pi}{6}\right) = f(x_2)$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ takve da je $x_1 < x_2$. Dakle data funkcija je rastuća na $\mathbb{D}$. $\square$

13. INVERZNE HIPERBOLIČNE FUNKCIJE

(I) Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x$ je strogo rastuća i neprekidna na $\mathbb{R}$. Kako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

prema Teoremi 1.9. je $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, odnosno f je surjektivna funkcija. Kako je f strogo rastuća na $\mathbb{R}$, odnosno injektivna, f je bijekcija, pa postoji njena inverzna funkcija

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) = \operatorname{arsh} y$$

(čita se: **area sinus hiperbolični**), koja je prema Teoremi 1.9. takođe strogo rastuća i neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Koristi se takođe i oznaka $F(y) = \operatorname{arcsinh} y$. Dakle, važi

$$\operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ova funkcija može se izraziti preko logaritamske funkcije. Zaista, iz

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

posle množenja sa $2e^x$ dobija se

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

odnosno dobijamo kvadratnu jednačinu po $t = e^x$. Rešavanjem se dobija

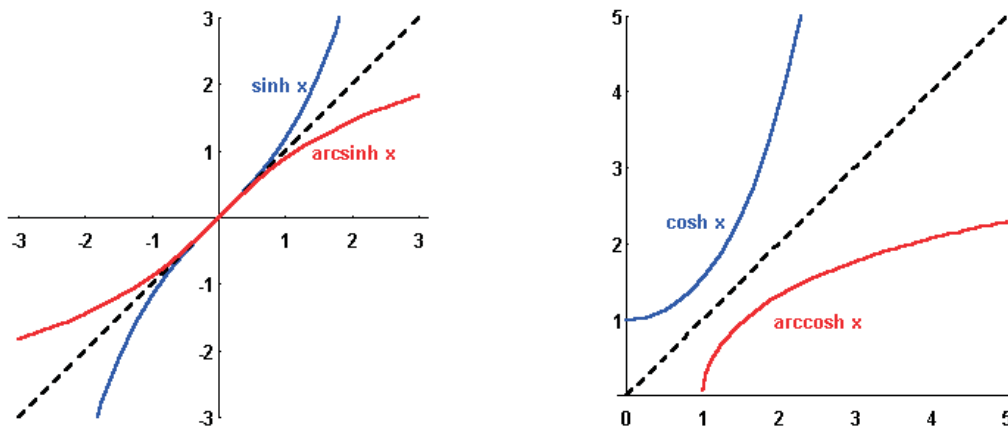
$$(1) \quad e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Kako je za svako $y \in \mathbb{R}$,

$$y^2 < y^2 + 1 \Rightarrow y \leq |y| < \sqrt{y^2 + 1},$$

to je $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$. Prema tome, kako je $e^x > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, očigledno ne postoji realan broj y takav da je $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$, pa iz (1) ostaje da važi samo $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, odakle je $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Dakle,

$$\boxed{\operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad y \in \mathbb{R}}$$



Slika 49: Grafici funkcija $y = \operatorname{arsh} x$ i $y = \operatorname{arch} x$

Grafik funkcije $F(x) = \operatorname{arsh} x$ prikazan je na Slici 49-(a). Osnovna svojstva funkcije $F(x) = \operatorname{arsh} x$, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ su:

- funkcija F je definisana na $\mathbb{R}$
- funkcija F je neparna (prema T.1.4.)
- funkcija F je pozitivna za $x > 0$ i negativna za $x < 0$. $x = 0$ je nula funkcije
- funkcija F je strogo rastuća na $\mathbb{R}$

TEOREMA 13.1. *Funkcija $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(y) = \operatorname{arsh} y$ je neparna funkcija.*

DOKAZ. I način: Da je funkcija F neparna može se zaključiti prema definiciji, jer je za svako $y \in \mathbb{R}$

$$F(-y) = \ln(\sqrt{y^2 + 1} - y) = \ln \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = -\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = -F(y).$$

II način: Da je funkcija F neparna može se pokazati na osnovu svojstva inverzne funkcije i činjenice da je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x$ neparna funkcija

$$\operatorname{arsh}(-y) = \operatorname{arsh}(-\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{arsh}(\operatorname{sh}(-x)) = -x = -\operatorname{arsh}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

(II) Funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, $g(x) = \operatorname{ch} x$ nije injektivna, pa nema inverznu funkciju. Posmatramo restrikciju g_1 te funkcije na interval $[0, +\infty)$, odnosno funkciju

$$g_1 : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty), \quad g_1(x) = \operatorname{ch} x$$

koja je strogo rastuća (injektivna) i neprekidna na ovom intervalu. Kako je $\operatorname{ch} 0 = 1$ i

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$

iz Teoreme 1.10. zaključujemo da je $g_1([0, +\infty)) = [1, +\infty)$, odnosno da je g_1 surjektivna. Dakle, g_1 je bijekcija, pa postoji njena inverzna funkcija

$$G : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad G(y) = \operatorname{arch} y$$

koja je prema Toeremi 1.10. strogo rastuća i neprekidna na $[1, +\infty)$. Koristi se i oznaka $G(x) = \operatorname{arccosh} y$. Dakle, važi

$$\boxed{\operatorname{arch}(\operatorname{ch} x) = x, \quad x \in [0, +\infty), \quad \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = x, \quad x \in [1, +\infty).}$$

Kao i u prethodnom slučaju funkcija se može izraziti preko logaritamske funkcije. Iz

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

dobijamo kvadratnu jednačinu po $t = e^x$:

$$(2) \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

čija su rešenja

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Kako je $x \geq 0$, to je $e^x \geq 1$. S druge strane

$$(3) \quad y - \sqrt{y^2 - 1} < 1 \quad \text{za svako } y > 1$$

Zaista,

$$\begin{aligned} y - 1 < \sqrt{y^2 - 1} \wedge y > 1 &\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1 \wedge y > 1 \\ &\Leftrightarrow 2 < 2y \wedge y > 1 \Leftrightarrow y > 1. \end{aligned}$$

Dakle, prema (3), iz (2) ostaje da važi samo $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$, odnosno

$$\boxed{\operatorname{arch} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad y \geq 1}$$

Grafik funkcije $G(x) = \mathbf{arch} \, x$ prikazan je na Slici 49-(b). Osnovna svojstva funkcije $G(x) = \mathbf{arch} \, x$, $G : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ su:

- funkcija G je definisana na $\mathbb{D} = [1, +\infty)$
- funkcija G nije ni parna ni neparna (ako $x \in \mathbb{D}$, očigledno $-x \notin \mathbb{D}$)
- funkcija G je pozitivna za svako $x \in (1, +\infty)$. $x = 1$ je nula funkcije
- funkcija G je strogo rastuća na $[1, +\infty)$

(III) Funkcija $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $h(x) = \mathbf{th} \, x$ je strogo rastuća (injektivna) i neprekidna na $\mathbb{R}$. Kako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{th} \, x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{th} \, x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

iz Teoreme 1.9. zaključujemo da je $\mathbf{th}(\mathbb{R}) = (-1, 1)$, odnosno da je h surjektivna funkcija. Dakle, h je bijekcija, pa postoji inverzna funkcija

$$H : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(y) = \mathbf{arth} \, y$$

koja je prema Teoremi 1.9. strogo rastuća i neprekidna na $(-1, 1)$. Koristi se i oznaka $H(y) = \mathbf{arctanh} \, y$. Važi

$$\mathbf{arth}(\mathbf{th} \, x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{th}(\mathbf{arth} \, x) = x, \quad x \in (-1, 1).$$

Iz

$$y = \mathbf{th} \, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

imamo da je $y \cdot (e^x + e^{-x}) = e^x - e^{-x}$, odakle se množenjem sa e^x dobija

$$y + 1 = e^{2x} - ye^{2x} \rightarrow e^{2x} = \frac{y + 1}{1 - y}, \quad y \neq 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{y + 1}{1 - y}, \quad y \neq 1$$

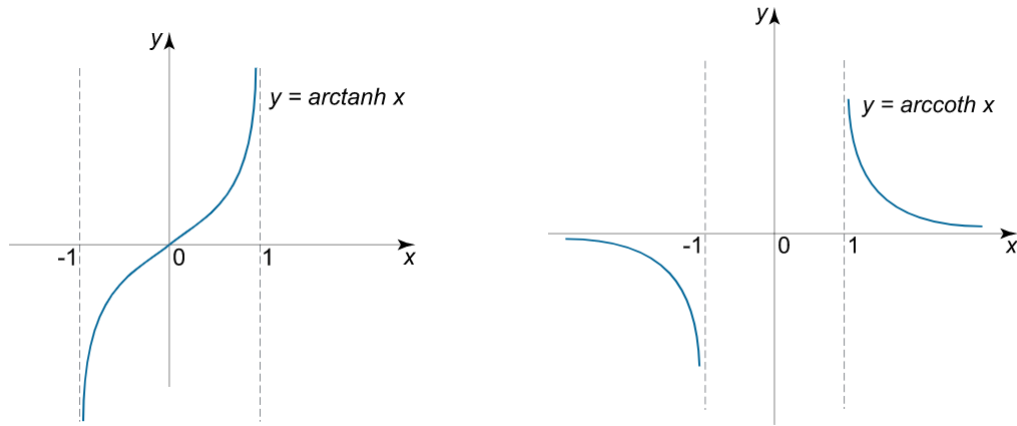
Dakle, važi

$$\mathbf{arth} \, y = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + y}{1 - y}, \quad |y| < 1$$

Grafik funkcije $H(x) = \mathbf{arth} \, x$ prikazan je na Slici 50-(a). Osnovna svojstva funkcije $H(x) = \mathbf{arth} \, x$, $H : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, su:

- funkcija H je definisana na $(-1, 1)$
- funkcija H je neparna (prema T.1.4.)
- funkcija H je pozitivna za $x > 0$ i negativna za $x < 0$. $x = 0$ je nula funkcije
- funkcija H je strogo rastuća na $(-1, 1)$

TEOREMA 13.2. *Funkcija $H : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $H(y) = \mathbf{arth} \, y$ je neparna funkcija.*

Slika 50: Grafici funkcija $y = \operatorname{arth} x$ i $y = \operatorname{arch} x$

DOKAZ. I način: Da je funkcija H neparna može se zaključiti prema definiciji, jer je za svako $y \in (-1, 1)$

$$H(-y) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1-y}{1+y} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1}{\frac{1+y}{1-y}} = -\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+y}{1-y} = -H(y).$$

II način: Da je funkcija H neparna može se pokazati na osnovu svojstva inverzne funkcije i činjenice da je funkcija $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $h(x) = \operatorname{th} x$ neparna funkcija

$$\operatorname{arth}(-y) = \operatorname{arth}(-\operatorname{th}(x)) = \operatorname{arth}(\operatorname{th}(-x)) = -x = -\operatorname{arth}(y), \quad y \in (-1, 1).$$

Da je funkcija H neparna može se zaključiti i prema definiciji, jer je za svako $x \in$

(IV) Funkcija $k : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $k(x) = \operatorname{cth} x$ je neprekidna na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ i strogo je opadajuća na $(-\infty, 0)$, kao i na $(0, +\infty)$. Kako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cth} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\operatorname{th} x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cth} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{th} x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{cth} x = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{cth} x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = +\infty,$$

prema Teoremi 1.9. je $k((-\infty, 0)) = (-\infty, -1)$ i $k((0, +\infty)) = (1, +\infty)$.

TEOREMA 13.3. Funkcija $k : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $k(x) = \operatorname{cth} x$ je injektivna funkcija.

DOKAZ. Neka su $x_1, x_2 \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$. Dokažimo da je $k(x_1) \neq k(x_2)$. Neka je $x_1 < x_2$.

- Ako je $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 < x_2$, kako je k strogo opadajuća na $(-\infty, 0)$, biće $k(x_1) > k(x_2) \Rightarrow k(x_1) \neq k(x_2)$

- Ako je $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$, kako je k strogo opadajuća na $(0, +\infty)$, biće $k(x_1) > k(x_2) \Rightarrow k(x_1) \neq k(x_2)$
- Ako je $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, +\infty)$, tada je $k(x_1) < 0 < k(x_2) \Rightarrow k(x_1) \neq k(x_2)$

Dakle, $k(x_1) \neq k(x_2)$ za svako $x_1, x_2 \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$. ■

Kako $k((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, funkcija k je bijekcija iz skupa $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ NA skup $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, pa postoji inverzna funkcija

$$K(y) = \operatorname{arcth} y, \quad K : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

koja je prema Teoremi 1.9. strogo opadajuća i neprekidna na $(-\infty, -1)$ i strogo opadajuća i neprekidna na $(1, +\infty)$. Koristi se i oznaka $K(y) = \operatorname{arccoth} y$.

Funkcija se može analogno prethodnom slučaju izraziti preko logaritamske funkcije. Iz

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

imamo da je $y \cdot (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x}$, odakle se množenjem sa e^x dobija

$$ye^{2x} - e^{2x} = y + 1 \rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{1-y}, \quad y \neq 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{y+1}{1-y}, \quad y \neq 1$$

Dakle, važi

$$\operatorname{arcth} y = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{y+1}{y-1}, \quad |y| > 1$$

Grafik funkcije $K(x) = \operatorname{arcth} x$ prikazan je na Slici 50-(b). Osnovna svojstva funkcije $K(x) = \operatorname{arcth} x$, $K : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, su:

- funkcija K je definisana na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- funkcija K je neparna (prema T.1.4.)
- funkcija K je pozitivna za $x \in (1, +\infty)$ i negativna za $x \in (-\infty, -1)$.
- funkcija K je strogo opadajuća na $(-\infty, -1)$ i na $(1, +\infty)$

TEOREMA 13.4. *Funkcija $K : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $K(y) = \operatorname{arcth} y$ je neparna funkcija.*

DOKAZ. I način: Da je funkcija K neparna može se zaključiti prema definiciji, jer je za svako $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ i $-y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$K(-y) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1}{\frac{y+1}{y-1}} = -\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{y+1}{y-1} = -K(y).$$

II način: Da je funkcija K neparna može se pokazati na osnovu svojstva inverzne funkcije i činjenice da je funkcija $k : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $k(x) = \operatorname{cth} x$ neparna funkcija. Za svako $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ je

$$\operatorname{arcth}(-y) = \operatorname{arcth}(-\operatorname{cth}(x)) = \operatorname{arcth}(\operatorname{cth}(-x)) = -x = -\operatorname{arcth}(y).$$

S A D R Ź A J

1. OSNOVNI POJMOVI O FUNKCIJAMA	1
2. KVADRATNA FUNKCIJA	12
2.1. ODREDJIVANJE OBLASTI VREDNOSTI FUNKCIJE.....	17
2.2. ODREDJIVANJE INVERZNE FUNKCIJE	18
2.3. RASPORED KORENA KVADRATNE JEDNAČINE U ODNOSU NA DANE BROJEVE....	23
2.4. KVADRATNA FUNKCIJA KONSTANTNOG ZNAKA NA DATOM INTERVALU.....	26
3. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC PRIRODAN BROJ	33
3.1. FUNKCIJA $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	35
4. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC CEO BROJ	36
5. POJAM I SVOJSTVA KORENA.....	39
5.1. FUNKCIJA $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$	43
6. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC RACIONALNI BROJ	45
6.1. FUNKCIJA $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$	46
7. STEPEN ČIJI JE IZLOŽILAC REALAN BROJ	48
8. POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA LOGARITMA	54
8.1. LOGARITAMSKA FUNKCIJA	57
9. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE	59
10. ADICIONE FORMULE	71
11. INVERZNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE	81
12. HIPERBOLIČNE FUNKCIJE	99
13. INVERZNE HIPERBOLIČNE FUNKCIJE	107