ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА - ИНФОРМАТИКА

Први колоквијум - 20.12.2014.

1. Дата су три вектора: $\overrightarrow{a} = (-1, 0, 3)$, $\overrightarrow{b} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{c} = (2, 3, -1)$ из простора $\mathbb{R}^3$.
а) [2] Да ли се вектор $(1, 2, 3)$ може изразити као линеарна комбинација вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$?
б) [3] Да ли је систем вектора $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ потпун у простору $\mathbb{R}^3$?

2. [5] У простору $\mathbb{R}^5$ уочен је скуп $P = \{(x, y, z, a, b) \ : \ x + y + z = 0, \ a + b = 0\}$. Доказати да скуп P одређује подпростор простора $\mathbb{R}^5$ и одредити му базу и једну димензију.

3. [5] Дати су: матрица A, линеарно пресликавање $f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5)$ и базе $a : \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ за $\mathbb{R}^3$ и $b : \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_4}, \overrightarrow{b_5}$ за $\mathbb{R}^5$, како следи:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\overrightarrow{a_1} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (5, 1, 7)$, $\overrightarrow{b_1} = (1, -1, 0, 0, 1)$, $\overrightarrow{b_2} = (0, 1, -1, 0, 1)$, $\overrightarrow{b_3} = (2, 1, 1, 0, -1)$, $\overrightarrow{b_4} = (-1, 0, 0, 0, 1)$, $\overrightarrow{b_5} = (0, 1, 2, 3, 0)$, $M_{a,b}(f) = A$. Наћи једну базу за $Im(f)$.

4. [5] Обележимо са $V(x, y; a, b) = xb - ay$. У равни су дате четири различите тачке својим координатама: $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$. Важи:

$$V(x_B - x_A, y_B - y_A; x_C - x_A, y_C - y_A) \cdot V(x_B - x_A, y_B - y_A; x_D - x_A, y_D - y_A) < 0,$$

$$V(x_D - x_C, y_D - y_C; x_A - x_C, y_A - y_C) \cdot V(x_D - x_C, y_D - y_C; x_B - x_C, y_B - y_C) < 0.$$

Образложити због чега из тога следи да дужи AB и CD имају непразан пресек.

5. [5] Нека је f ендоморфизам коначно - димензионалног векторског простора $\mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{R}$, такав да су, за свако $\overrightarrow{x} \in \mathbb{V}$, вектори $f(\overrightarrow{x})$ и $\overrightarrow{x}$ линеарно зависни. Доказати да постоји реалан број k, тако да је $f(\overrightarrow{x}) = k \cdot \overrightarrow{x}$, за свако $\overrightarrow{x} \in \mathbb{V}$.

Време за рад 180 минута.
Употреба калкулатора је дозвољена.
Сваки задатак **детаљно образложити!**