DISKRETNE STRUKTURE I
Iskazna logika

I deo

Jelena Ignjatović

LITERATURA:

- S. Suzan Epp, Discrete Mathematics with Applications, Thomson - Brooks/Cole, 2004.
- K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, Mc Graw Hill, 2003.
- James A. Anderson, Diskretna matematika sa kombinatorikom, Računarski fakultet, Beograd, i CET, Beograd,2005
- Branimir Šešelja i Andreja Tepavčević, Algebra I, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2000

LOGIKA

Logika

Logika predstavlja veštinu i metodu pravilnog mišljenja.

Ona je "logija" ili metoda svake nauke, svakog učenja i svake umetnosti.

Definiše se kao nauka zato što se proces pravilnog mišljenja može, kao kod fizike i matematike, svesti na zakone.

Ona je veština zato što vežbanjem čovek stiče sigurnost u svoje mišljenje.

Matematička logika

Matematička ili moderna logika je grana matematike i logike koja se bavi prikazom tradicionalne logike simbolima (još se naziva i simboličkom logikom).

Matematičkom logikom je sve potpuno definisano i nema mogućnosti različitog shvatanja, kao što je to često u tradicionalnoj logici.

Paradoksi

Zenonovi paradoksi su paradoksi koje je navodio starogrčki filozof Zenon iz Eleje (490 oko 430. g.p.n.e) i oni ”dokazuju” nemogućnost kretanja.

Zenonovi paradoksi su zbunjivali, izazivali i inspirisali filozofe, matematičare i fizičare preko dve hiljade godina.

Dihotomija: Kretanje je nemoguće jer ”ono što je u pokretu mora prvo preći pola puta pre nego što stigne do cilja”.

Ahil i kornjača: ”U utrci, najbrži trkač nikada ne može prestići najsporijeg, zato što gonitelj prvo mora da dođe do tačke odakle je gonjeni pošao, pa, prema tome, najsporiji uvek ima prednost.”

Raselov paradoks

Godine 1901. britanski filozof i matematičar Bertrand Rasel otkrio je mogući paradoks koji je uvodio potrebu za modifikovanjem teorije skupova. Jedna verzija Raselovog paradoksa:

U gradu postoji jedan muški berberin koji svakog dana brije one muškarce koji ne briju sami sebe, i nikog drugog. Ko brije berberina? Da li berberin brije samog sebe?

Komentar

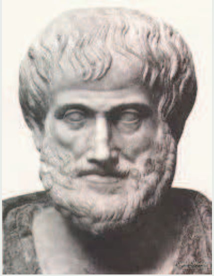
Rasel je shvatio da mora da izmeni teoriju skupova kako bi izbegao ovakvu konfuziju. ZAŠTO???

Neka je dat skup

$$R = \{S \mid S \text{ je skup takav da } S \not\subseteq S\}.$$

Da li skup R sadrži samog sebe?

Istorija



Logika je kao nauka zasnovana u 4. veku p.n.e.
u delu Organon grčkog filozofa **Aristotela**.

To delo predstavlja prvu kolekciju pravila deduktivnog zaključivanja, koja su, po Aristotelu, trebala da budu *oruđe* kojim bi se služile druge nauke.

Aristotel

384–322 BC

Napomena

Naziv "Organon" znači orudje.

Nakon Aristotela, dugo vremena nije bilo nekog značajnog napretka u razvoju logike. Stagnacija logike trajala je više od dve hiljade godina.

Stagnacija

Jedan od onih koji su najviše učinili da se logika izvuče iz stagnacije bio je nemački matematičar i filozof Gotfrid Lajbnic.

Lajbnic je smatrao da osnovni uzrok stagnacije logike leži u jeziku kojim se ona koristi.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

1596–1650

Simbolički jezik

Lajbnic je tvrdio da prirodni jezik nije pogodan za dalji razvoj logike, i da logika treba da se koristi nekim specijalnim ***simboličkim jezikom***, sličnim **jeziku matematike**.

Lajbnic je izmislio univerzalni jezik za logiku i kao mladić počeo da proučava simboličku logiku.

Logika. Matematička logika (cont.)

Simbolički jezik

Od njega potiču prvi pokušaji da se logika formuliše kao aksiomatski sistem.
Prema njemu, logiku bi, po uzoru na aritmetiku, trebalo organizovati u takav sistem, sa takvim pravilima, da funkcioniše kao račun.

Preduzeo prve pokušaje da logiku obrađuje u okviru formalnih računa.

Izraz koji je Lajbnic koristio za simboličku logiku koju je razvio je characteristica universalis, "opšta odlika ili veština označavanja".

Lajbnic je verovao da se ljudsko razmišljanje, rezonovanje može svesti na račun vrsta (klasa) i da takav račun može da razreši mnoga neslaganja i razlike u mišljenjima:

"Jedini način da ispravimo naše mišljenje je da ga učinimo opipljivim, stvarnim poput matematičara, tako da kad otkrijemo našu grešku, i kada postoje sporovi, neslaganja među ljudima mogu se prosto rešiti: IZRAČUNAVANJEM (calculemus)."

Na žalost, Lajbnic nije uspeo da realizuje te svoje ideje.

One čak nisu ni publikovane, i otkrivene su tek 1905. godine, kada je problem već bio rešen, i to upravo na način koji je on predlagao.

Istorija

Neznajući za Lajbnicove ideje, do sličnih ideja je dva veka kasnije došao britanski matematičar **Džordž Bul**.

Simbolička logika

Bul je pokrenuo logiku iz stagnacije tako što je preveo na jezik matematike, odnosno na jezik algebre.

Na taj način je stvorena nova matematička teorija koju danas zovemo **matematička logika** ili **simbolička logika**.

George Boole

1815–1864

Logika-matematička disciplina

Od sredine 19. veka pa do danas, matematička logika se razvila u veoma značajnu matematičku disciplinu, koja obezbeđuje teoretske osnove za mnoge oblasti matematičkih i računarskih nauka.

Računarske nauke

Matematička logika – teoretska osnova

- digitalne logike (koja se bavi dizajnom prekidačkih kola);
- relacionih baza podataka;
- teorije formalnih jezika, automata i izračunljivosti;
- veštačke inteligencije,

Koncept logičke forme

Osnovni koncept deduktivne logike je koncept logičke forme ili forme argumentacije.

Argumentacija

Argumentacija je niz izjava čiji je zadatak da pokaže istinitost nekog tvrđenja.

Poslednja izjava u tom nizu, čija se istinitost dokazuje, naziva se zaključak (posledica, konsekvenca), a sve prethodne izjave u nizu se nazivaju premise (pretpostavke, hipoteze).

Predstavljanje argumentacije:

Premisa
Premisa
. . . .
Premisa
$\therefore$ Zaključak

Znak $\therefore$ čitamo
"prema tome" ("therefore")

1. Primer logičke argumentacije

Razmotrimo sledeći primer logičke argumentacije.

Ako potražnja raste, onda se kompanije šire.
Ako se kompanije šire, onda kompanije zapošljavaju radnike.
$\therefore$ Ako potražnja raste, onda kompanije zapošljavaju radnike.

Da li potražnja zaista raste?

Da li se kompanije zaista šire?

Da li kompanije zaista zapošljavaju radnike?

Logička forma (cont.)

1. Primer logičke argumentacije

Ovo su pitanja za ekonomiste, logika se ne bavi takvim pitanjima.

Logiku zanima forma argumentacije, odnos između premisa i zaključka, a ne njihov sadržaj.

U logici se forma argumentacije razdvaja od njenog sadržaja.

Zadatak logike je da izvrši analizu forme argumentacije da bi se utvrdilo da li istinitost zaključka nužno sledi iz istinitosti premisa.

Drugim rečima, logika treba da utvrdi da li je tačno da ako su premise istinite, onda mora biti istinit i zaključak.

Ispravna i neispravna argumentacija

Argumentacija za koju, iz istinitosti premisa sledi istinitost zaključka, nazivamo se ispravna argumentacija.

U suprotnom, to je neispravna argumentacija.

Logička forma (cont.)

2. Primer logičke argumentacije

Neka je n proizvoljan prirodan broj.

$$\begin{array}{rl} & \text{Ako je } n \text{ deljiv sa 6, onda je } n \text{ deljiv sa 3.} \\ & \text{Ako je } n \text{ deljiv sa 3, onda je zbir cifara od } n \text{ deljiv sa 3.} \\ \therefore & \text{Ako je } n \text{ deljiv sa 6, onda je zbir cifara od } n \text{ deljiv sa 3.} \end{array}$$

Forma argumentacije iz 1. i 2. primera:

$$\begin{array}{rl} & \text{Ako } \underline{\qquad\quad (1) \qquad\quad} \text{ onda } \underline{\qquad\quad (2) \qquad\quad}\,. \\ & \text{Ako } \underline{\qquad\quad (2) \qquad\quad} \text{ onda } \underline{\qquad\quad (3) \qquad\quad}\,. \\ \therefore & \text{Ako } \underline{\qquad\quad (1) \qquad\quad} \text{ onda } \underline{\qquad\quad (3) \qquad\quad}\,. \end{array}$$

Ispravnost ovih argumentacija ne zavisi od značenja, odnosno istinitosti, izjava označenih sa (1), (2) i (3), već proizilazi iz logičke forme tih argumentacija.

Napomena

Iz prethodnih primera argumentacija može se još uočiti da njihove premise i zaključci predstavljaju složene izjave (izjavne rečenice) – sastoje se od nekoliko delova, od kojih svaki za sebe takođe predstavlja izjavu.

Logička forma (cont.)

Primer

	Sve primese istinite	Bar jedna primesa nije istinita	Valjana forma
IA IA	Sve krave su sisari. Belka je krava.	Svi kitovi su ribe. Sve ribe udišu vazduh.	Svi **B** su **C**. Svi **A** su **B**. Svi **A** su **B**. ili Svi **B** su **C**.
IA	Belka je sisar.	Svi kitovi udišu vazduh.	Svi **A** su **C**.
NA NA		Svi kitovi su gmizavci. Svi gmizavci su ptice.	Svi **A** su **B**. Svi **B** su **C**.
NA	Nemoguće.	Svi kitovi su ptice.	Svi **A** su **C**.

Primer- Ispitati istinitost sledećih argumentacija

Svi francuzi su evropljani. Svi holandjani su evropljani.	Svi **A** su **C**. Svi **B** su **C**.	Svi francuzi su gurmani. Svi francuzi su ljubitelji vina.	Svi **A** su **B**. Svi **A** su **C**.
Svi holandjani su francuzi.	Svi **A** su **B**.	Svi ljubitelji vina su gurmani.	Svi **C** su **B**.

Logička forma (cont.)

Komentar

Primer 1: ”potražnja raste” i ”kompanije se šire” su proste izjave povezane veznikom ako . . . onda . . . (engleski if . . . then . . .).

3. Primer logičke argumentacije

Program sadrži ”bug” ili je ulaz pogrešan.
Ulaz nije pogrešan.
$\therefore$ Program sadrži ”bug”.

Komentar

”Program sadrži ”bug” i ”ulaz je pogrešan” – proste izjave povezane veznikom **ili** (**or**).

Napomena

Da bi jasnije videli koja je argumentacija ispravna a koja nije, mi skraćujemo proste izjave zamenivši ih slovima $p, q, r, \ldots$

- Slovo p može označiti izjavu ”potražnja raste”.
- Slovo q može označiti izjavu ”kompanije se šire”.
- Slovo r može označiti izjavu ”kompanije zapošljavaju radnike”.

Argumentacija opšteg oblika iz 1. i 2. primera

Ako p onda q
Ako q onda r
$\therefore$ Ako p onda r

Argumentacija ovakve forme naziva se **HIPOTETIČKI SILOGIZAM**.

Argumentacija opšteg oblika iz 3. primera

p ili q
Nije q
$\therefore p$

Ovakva argumentacija naziva se **DISJUNKTIVNI SILOGIZAM**.

Modus ponens

Ako p onda q
p
$\therefore q$

Ovakva argumentacija naziva se **MODUS PONENS**.

Iskaz- oblik deduktivnog zaključivanja

Iskaz – izjava koja ima samo jedno od dva svojstva, ili je

istinita (tačna) ili

neistinita (netačna).

Iskazi se zadaju rečenicama (izjavnim rečenicama).

Ovakva definicija iskaza je ipak neformalna i nedovoljno operativna.

Primer:

Jedan iskaz je zadat rečenicom –**"3 je delitelj broja 18"**

Primdba

Za datu rečenicu nije uvek lako odrediti da li je njome zadat iskaz ili ne.

"Izjava koju upravo izgovaram je laž"

Ovom izjavom nije zadat iskaz, iako na prvi pogled izgleda suprotno.

Ako je izjava zaista lažna, to znači da smo rekli istinu, i obratno, ako je ta izjava istinita, to znači da smo zaista rekli laž.

Prema tome, ova izjava nema svojstvo da je samo istinita ili samo neistinita.

Iskazne promenljive, istinitosne vrednosti

Napomena

ZATO SE U ISKAZNOJ LOGICI POJAM *ISKAZA* KORISTI KAO OSNOVNI POJAM KOJI SE NE DEFINIŠE.

Iskazna slova

U iskaznoj logici proste iskaze označavamo slovima

$$p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots$$

Ova slova nazivamo iskazna slova ili iskazne promenljive.

Istinitosne vrednosti

Iskaznim slovima mogu se pridružiti istinitosne vrednosti

1 – "tačno"
0 – "netačno"

Oznake

"Tačno" – $\top$;]quad "netačno" – $\bot$

Komentar

Međutim, mi ćemo koristiti oznake 1 i 0, zato što **logika bitova** (binarnih cifara 1 i 0) predstavlja osnovu funkcionisanja današnjih računara.

Logički veznici

Od prostih iskaza grade se složeniji iskazi, upotrebom logičkih veznika, koji se označavaju posebnim simbolima.

logički veznik	oznaka
nije	$\neg$
i	$\wedge$
ili	$\vee$
ako . . . onda . . .	$\Rightarrow$
ako i samo ako	$\Leftrightarrow$

Negacija i konjunkcija

Negacija

Negacija iskaza p je iskaz "nije p".

Ovaj iskaz označava se sa $\neg p$, što se izgovara i "ne p".

Negacija tačnog iskaza je netačan iskaz i obratno, negacija netačnog je tačan iskaz.

Istinitosna vrednost negacije iskaza može se prikazati i takozvanom istinitosnom tablicom:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Konjunkcija

Konjunkcija iskaza p i q je iskaz "p i q", u oznaci $p \wedge q$.

Iskaz $p \wedge q$ je tačan samo u slučaju kada su i p i q tačni iskazi.

U ostalim slučajevima konjunkcija je netačan iskaz.

To se može prikazati sledećom istinitosnom tablicom:

Konjunkcija i disjunkcija

Konjunkcija

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkcija

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz "p ili q", u oznaci $p \vee q$.

Iskaz $p \vee q$ je tačan ako je bar jedan od iskaza p i q tačan, a netačan je samo ako su oba iskaza p i q netačni. To se može prikazati istinit:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Isključiva disjunkcija

Isključiv smisao

U svakodnevnom životu veznik "ili" često ima isključivi smisao – iskaz "p ili q" je tačan ako je tačan iskaz p ili q, i to samo jedan od njih.

Ekskluzivna disjunkcija

Takva disjunkcija se naziva ekskluzivna disjunkcija ili isključiva disjunkcija, i piše se "ili p ili q", u oznaci $p\ XOR\ q$ ili $p \oplus q$.

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4. Primer

Neka su iskazi p i q zadati sa

p : " $\sqrt{2}$ je racionalan broj",

q : " $\sqrt{2}$ je broj koji je veći od nule".

Iskaz $\neg p$ je zadat sa

$\sqrt{2}$ nije racionalan broj

i on je tačan (jer je p netačan iskaz). Iskaz $\neg q$ je zadat sa

$\sqrt{2}$ nije broj koji je veći od nule

i on je netačan (jer je q tačan iskaz).
Prema gornjim definicijama, $p \wedge q$ je netačan, a $p \vee q$ tačan iskaz.

5. Primer

Neke nejednakosti uključuju veznike "i" i "ili".

Na primer, ako su x, a i b realni brojevi, tada

$x \leqslant a$	znači	$x < a$	ili	$x = a$
$a \leqslant x \leqslant b$	znači	$a \leqslant x$	i	$x \leqslant b$.

5. Primer

Dakle, $2 \leqslant x \leqslant 1$ nije zadovoljeno ni za jedan realan broj jer

$$2 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{znači} \qquad 2 \leqslant x \quad \text{i} \quad x \leqslant 1,$$

pa je iskaz $2 \leqslant x \leqslant 1$ neistinit, bez obzira na to koju vrednost uzme realan broj x.

6. Primer

Neka je x realan broj. Sa p, q i r označimo redom iskaze "$0 < x$", "$x < 3$" i "$x = 3$".

Zapisati sledeće nejednakosti kao iskaze:

(a) $x \leqslant 3$

(b) $0 < x < 3$

(c) $0 < x \leqslant 3$

Rešenje:

(a) $q \vee r$

(b) $p \wedge q$

(c) $p \wedge (q \vee r)$

7. Primer

Mnogi pretraživači Interneta omogućavaju korišćenje "and", "or" i "not" operatora da bi se ostvarilo finije pretraživanje.

Na primer, zamislimo da tražimo web strane na kojima se nudi posao u oblasti matematike ili informatike, ali koji nije vezan za finansije ili marketing.

Tada ćemo u polje za pretraživanje ukucati izraz

Job AND (mathematics OR computer science)

AND NOT (finance OR marketing)

Iskazne formule

Višestrukom primenom logičkih veznika dobijamo još složenije iskaze.

Kada te složene iskaze predstavimo simbolički, upotrebom iskaznih slova i logičkih veznika, tada takvo simboličko predstavljanje iskaza nazivamo iskazna formula, ili samo formula, ako se podrazumeva o čemu se radi.

Konvencija o redosledu operacija

U izrazima u kojima se koriste veznici $\neg$, $\wedge$ i $\vee$, prihvatamo konvenciju o redosledu operacija, po kojoj se prvo primenjuje $\neg$, a potom $\wedge$ i $\vee$.

Prema konvenciji o redosledu operacija, konjunkcija i disjunkcija imaju ravnopravan redosled primene.

Primer

Umesto $(\neg p) \wedge q$ možemo pisati $\neg p \wedge q$, jer smo se dogovorili da prvo primenjujemo negaciju, a potom konjunkciju.

Primetimo da u formuli $\neg(p \wedge q)$ nije dozvoljeno obrisati zagrade, jer bi se dobila formula $\neg p \wedge q$, koja ima drugačije logičko značenje.

Tako izraz $p \wedge q \vee r$ ne bi bio iskazna formula, jer je višesmislen.

Da bi taj izraz imao jedinstveno logičko značenje, on mora biti zapisan ili kao $(p \wedge q) \vee r$ ili kao $p \wedge (q \vee r)$.

Negde je moguće pojedine iskazne formule pojednostaviti brisanjem zagrada– tamo gde to brisanje neće poremetiti smisao formule.

Istinitosne tablice

Istinitosna tablica date iskazne formule je tablica kojom je prikazana istinitosna vrednost te formule za sve moguće kombinacije istinitosnih vrednosti iskaznih slova koja se javljaju u toj formuli.

8. Primer

Istinitosna tablica formule $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ gradi se polazeći od iskaznih slova p i q, potom se, redom, grade formule $p \vee q$, $p \wedge q$ i $\neg(p \wedge q)$, i na kraju cela ta formula:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Istinitosne tablice (cont.)

9. Primer

Istinitosna tablica formule $(p \wedge q) \vee \neg r$ je

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$(p \wedge q) \vee \neg r$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Komentar

Primetimo da ako formula sadrži n različitih iskaznih slova, onda svaka kombinacija istinitosnih vrednosti iskaznih slova predstavlja binarni niz (niz nula i jedinica) dužine n.

Kako takvih nizova ima 2^n, to znači da svih mogućih kombinacija ima 2^n, odnosno da istinitosna tablica ima 2^n vrsta.

Napomena

Primetimo da su vrste u istinitosnim tablicama, iz 8. i 9. Primera, pravilno poređane u odnosu na vrednosti iskaznih slova, i to u tzv. leksikografskom poretku(od najveće do najmanje).

Iako to nije neophodno, ipak je uobičajeno da se radi tako. Šta to znači?

U skupu $\{0, 1\}$ važi prirodno uređe $0 < 1$. Uređenje se može proširiti do linearnog uređenja nad nizovima nula i jedinica $\leqslant_l$ – leksikografsko uređenje.

Neka su u i v dva niza iste dužine. Tada je

$$u \leqslant_l v \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} \mathrm{u = pxq,\ v = pyr,\ sa\ x < y,\ x, y \in \{0, 1\},} \\ \mathrm{gde\ su\ p, q, r\ nizovi\ nula\ i\ jedinica} \end{array}$$

Zadatak:

Urediti sve petočlane nizove nula i jedinica leksikografski od najvećeg do najmanjeg.

Logička ekvivalentnost

Napomena

Razmotrimo iskaze

(1) Milan je pobedio i Inter je izgubio.

(2) Inter je izgubio i Milan je pobedio.

Jasno je da su ovo dva različita načina da se iskaže ista stvar.

Logičke forme ova dva iskaza su povezane – ili su oba iskaza istinita, ili su oba neistinita;

To se može jasno videti ako se iskaz ”Milan je pobedio” označi sa p, a iskaz ”Inter je izgubio” sa q, i sačini istinitosna tablica za $p \wedge q$ i $q \wedge p$:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Komentar

Za svaku kombinaciju istinitosnih vrednosti promenljivih p i q, iskazne formule koje odgovaraju iskazima (1) i (2) imaju iste istinitosne vrednosti.

Logička ekvivalentnost (cont.)

Logička ekvivalencija

Za dve iskazne formule P i Q kažemo da su logički ekvivalentne ako za svaku moguću kombinaciju istinitosnih vrednosti iskaznih slova koja se u njima javljaju, formule P i Q imaju iste istinitosne vrednosti.

Ako su iskazne formule P i Q logički ekvivalentne, onda to označavamo sa $P \equiv Q$.

Za dva iskaza kažemo da su logički ekvivalentni ako se mogu predstaviti logički ekvivalentnim iskaznim formulama.

Provera ekvivalentnosti logičkih formula

1. Formira se zajednička istinitosna tablica za formule P i Q.
2. Proverava se vrsta po vrsta te tablice i upoređuju se istinitosne vrednosti za P i Q u tim vrstama.
   - 2.1. Ako u svakoj vrsti P i Q imaju iste vrednosti, onda su te formule logički ekvivalentne.
   - 2.2. Ako u nekoj vrsti P i Q imaju različite vrednosti, onda one nisu logički ekvivalentne.

Logička ekvivalentnost (cont.)

10. Primer (zakon dvojne negacije: $\neg(\neg p) \equiv p$*)*

Iskazne formule $\neg(\neg p)$ i p su logički ekvivalentne, što se vidi iz sledeće istinitosne tablice:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

11. Primer

Dokazati da formule $\neg(p \wedge q)$ i $\neg p \wedge \neg q$ nisu logički ekvivalentne.

Imamo sledeću istinitosnu tablicu:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$		$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	1	0	$=$	0
1	0	0	1	0	1	$\neq$	0
0	1	1	0	0	1	$\neq$	0
0	0	1	1	0	1	$=$	1

Logička ekvivalentnost (cont.)

12. *Primer (De Morganovi zakoni: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$)*

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$		$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	1	0	=	0
1	0	0	1	0	1	=	1
0	1	1	0	0	1	=	1
0	0	1	1	0	1	=	1

Na isti način dokazujemo $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

13. *Primer- Primena De Morganovih zakona*

Odrediti negaciju svakog od sledećih iskaza:

(a) Petar je visok 2 metra i težak 100 kilograma.

(b) Autobus je kasnio ili je Milanov sat kasnio.

Rešenje:

(a) Petar nije visok 2 metra ili nije težak 100 kilograma.

(b) Autobus nije kasnio i Milanov sat nije kasnio.

Logička ekvivalentnost (cont.)

14. Primer- Primena De Morganovih zakona- nejednakosti

Neka su x i y realni brojevi.

Negaciju iskaza $x < y$ označavamo sa $x \nless y$, negaciju iskaza $x \leqslant y$ sa $x \nleqslant y$, negaciju od $x > y$ sa $x \ngtr y$, a negaciju od $x \geqslant y$ sa $x \ngeqslant y$.

Kako su "$x < y$ ili $x \geqslant y$" i "$x > y$ ili $x \leqslant y$" tačni iskazi, to važi

$x \nless y$	je ekvivalentno sa	$x \geqslant y$
$x \ngtr y$	je ekvivalentno sa	$x \leqslant y$
$x \nleqslant y$	je ekvivalentno sa	$x > y$
$x \ngeqslant y$	je ekvivalentno sa	$x < y$

15. Primer- Primena De Morganovih zakona- nejednakosti

Korišćenjem De Morganovih zakona odrediti negaciju iskaza $-1 < x \leqslant 4$.

Logička ekvivalentnost (cont.)

15. Primer- Primena De Morganovih zakona- nejednakosti

Rešenje: Znamo da je ovaj iskaz ekvivalentan sa

$$-1 < x \ \text{ i } \ x \leqslant 4,$$

i prema De Morganovim zakonima, negacija ovog iskaza je

$$-1 \not< x \ \text{ ili } \ x \not\leqslant 4,$$

što je ekvivalentno sa

$$-1 \geqslant x \ \text{ ili } \ x > 4,$$

odnosno

$$x \leqslant -1 \ \text{ ili } \ x > 4.$$

Logička ekvivalentnost (cont.)

Napomena

p: Petar je visok i Petar je mršav.

$\neg p$: Petar nije visok ili Petar nije mršav.

Međutim, u običnom govoru se umesto p najčešće kaže

p': Petar je visok i mršav.

Negacija toga se iskazuje kao

$\neg p'$: Petar nije visok i mršav,

što se čini suprotnim De Morganovim zakonima.

Međutim, to nije problem za logiku, gde veznike ″i″ i ″ili″ smemo da koristimo samo između potpunih iskaza, a ne i između njihovih fragmenata.