DISKRETNE STRUKTURE
Iskazna logika

II deo

Jelena Ignjatović

Tautologije i kontradikcije

Tautologija i kontradikcija

Iskaznu formulu koja je tačna za sve moguće kombinacije istinitosnih vrednosti iskaznih slova koja se u njoj javljaju nazivamo tautologija.

Iskaznu formulu koja je netačna za sve moguće kombinacije istinitosnih vrednosti iskaznih slova koja se u njoj javljaju nazivamo kontradikcija.

Da li je P tautologija ili kontradikcija? Provera

1. Formira se istinitosna tablica za formulu P.
2. Proverava se kolona te tablice koja odgovara formuli P.
   2.1. Ako su sve vrednosti u toj koloni jednake 1, onda je P tautologija.
   2.2. Ako su sve vrednosti u toj koloni jednake 0, onda je P kontradikcija.

Tautologije i kontradikcije (cont.)

16. Primer– Zakon isključenja trećeg $p \vee \neg p$

Formula $p \vee \neg p$ je tautologija, što se vidi iz njene istinitosne tablice

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

17. Primer

Formula $p \wedge \neg p$ je kontradikcija.

Ovo se može proveriti formiranjem istinitosne tablice za $p \wedge \neg p$, ali se može zaključiti i iz toga što, prema De Morganovim zakonima i Zakonu dvojne negacije, važi

$$p \wedge \neg p \equiv \neg(p \vee \neg p).$$

Tautologije i kontradikcije (cont.)

18. Primer

Neka je t proizvoljna tautologija, c proizvoljna kontradikcija i p iskazno slovo. Tada važi

$$\mathsf{p} \wedge \mathsf{t} \equiv \mathsf{p}, \qquad \mathsf{p} \vee \mathsf{t} \equiv \mathsf{t}, \qquad \mathsf{p} \wedge \mathsf{c} \equiv \mathsf{c}, \qquad \mathsf{p} \vee \mathsf{c} \equiv \mathsf{p}.$$

Zaista, to se vidi iz sledeće istinitosne tablice

p	t	c	$\mathsf{p} \wedge \mathsf{t}$	$\mathsf{p} \vee \mathsf{t}$	$\mathsf{p} \wedge \mathsf{c}$	$\mathsf{p} \vee \mathsf{c}$
1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0

Ako iskazna formula P jeste tautologija, onda to simbolički označavamo sa $\models \mathsf{P}$.

Teorema 1.

Neka su p, q i r iskazne promenljive, t je tautologija i c je kontradikcija.
Tada važe sledeće logičke ekvivalencije:

Logički zakoni

Teorema 1.

1. Zakoni komutativnosti:

   $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\qquad$ $p \vee q \equiv q \vee p$
2. Zakoni asocijativnosti:

   $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $\qquad$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Zakoni distributivnosti:

   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\qquad$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Zakoni identiteta (jedinice):

   $p \wedge t \equiv p$ $\qquad$ $p \vee c \equiv p$
5. Zakoni negacije:

   $p \vee \neg p \equiv t$ $\qquad$ $p \wedge \neg p \equiv c$
6. Zakon dvostruke negacije:

   $\neg(\neg p) \equiv p$

Logički zakoni (cont.)

Teorema 1.

7. Zakoni idempotentnosti:

$$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p$$

8. Zakoni univerzalne granice:

$$p \vee t \equiv t \qquad p \wedge c \equiv c$$

9. De Morganovi zakoni:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

10. Zakoni apsorpcije:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

11. Negacije od t i c:

$$\neg t \equiv c \qquad \neg c \equiv t$$

Uprošćavanje izraza

19. Primer

Aritmetički izrazi se mogu transformisati jedni u druge u skladu sa izvesnim algebarskim zakonima kakvi su

$$\begin{aligned} &\text{zakon komutativnosti} - && x + y = y + x, \\ &\text{zakon distributivnosti} - && x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \end{aligned}$$

i drugi. Na primer, izraz $(x+y)^2$ može se transformisati u $x^2 + 2xy + y^2$, na sledeći način:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= (x+y) \cdot (x+y) && \text{(definicija stepena za } \cdot) \\ &= \big((x+y) \cdot x\big) + \big((x+y) \cdot y\big) && \text{(zakon distributivnosti)} \\ &= (x \cdot x + y \cdot x) + (x \cdot y + y \cdot y) && \text{(zakon distributivnosti)} \\ &= x \cdot x + y \cdot x + x \cdot y + y \cdot y && \text{(zakon asocijativnosti za } +) \\ &= x \cdot x + x \cdot y + x \cdot y + y \cdot y && \text{(zakon komutativnosti za } \cdot) \\ &= x^2 + 2xy + y^2 && \text{(definicije stepena za } \cdot \text{ i } +) \end{aligned}$$

Uprošćavanje izraza (cont.)

Komentar

Slične transformacije se mogu vršiti i sa logičkim izrazima, ali se ovde umesto algebarskih zakona koriste logičke ekvivalencije.

20. Primer

Dokazaćemo da je $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

Zaista,

$$\begin{aligned}
\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) &\equiv (\neg(\neg p) \vee \neg q) \wedge (p \vee q) && \text{(De Morganov zakon)}\\
&\equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) && \text{(Zakon dvojne negacije)}\\
&\equiv p \vee (\neg q \wedge q) && \text{(Zakon distributivnosti)}\\
&\equiv p \vee (q \wedge \neg q) && \text{(Zakon komutativnosti)}\\
&\equiv p \vee c && \text{(Zakon negacije)}\\
&\equiv p && \text{(Zakon identiteta)}
\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$.

Logička ekvivalencija

Napomena

Prikazani zakoni mogu se koristiti za dokazivanje logičke ekvivalentnosti iskaznih formula, onako kako je to učin jeno i u prethodnom primeru.

Međutim, ovi zakoni se ne mogu upotrebiti kada dokazujemo da dve formule nisu logički ekvivalentne.

Nasuprot tome, istinitosne tablice se mogu koristiti i u jednu i u drugu svrhu.

Međutim, tablice se mogu koristiti samo kada je broj promenljivih mali (2, 3 ili 4).

Za veći broj promenljivih istinitosne tablice bi se mogle formirati pomoću računara, ali i tu se javlja problem, jer broj vrsta eksponencijalno raste (za n promenljivih imamo 2^n vrsta), pa formiranje istinitosnih tablica za veliki broj promenljivih može da zahteva prilično vremena.

Implikacija

Implikacija

Implikacija iskaza p i q je iskaz ako p onda q, u oznaci $p \Rightarrow q$.

Ovaj iskaz je neistinit jedino u slučaju kada je p tačan, a q netačan iskaz. U svim ostalim slučajevima ovaj iskaz je tačan.

Uslovni iskaz

Istinitosne vrednosti implikacije zadate su sledećom tablicom:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Iskaz oblika "ako p onda q" naziva se još i uslovni iskaz.

Implikacija (cont.)

$p \Rightarrow q$

U implikaciji $p \Rightarrow q$

- Iskaz p se naziva premisa, pretpostavka ili antecedent.
- Iskaz q se naziva zaključak ili konsekvent.

Izraz $p \Rightarrow q$ čita se još i kao

iz p sledi q;	q ako p;
p povlači (implicira) q;	p je dovoljno za q;
p samo ako q;	q je potrebno za p.

Komentar

Konvencija o redosledu operacija dopunjujemo tako da se najpre primenjuje $\neg$, potom $\wedge$ i $\vee$, i tek na kraju $\Rightarrow$.

Primeri implikacije

1. Primer

Neka su iskazi p i q zadati sa:

p : "Broj n je deljiv sa 21"

q : "Broj n je deljiv sa 7"

Implikacija $p \Rightarrow q$ je tačan iskaz, bilo koji prirodan broj n da smo izabrali, čak i u slučaju da je, na primer, $n = 5$.

Prema definiciji implikacije, ako je iskaz p netačan, onda je iskaz $p \Rightarrow q$ tačan, nezavisno od tačnosti iskaza q.

Drugim rečima, iz netačne pretpostavke može da sledi bilo koji iskaz.

2. Primer

Neka su iskazi p i q zadati sa:

p : "Boca sadrži kiselinu"

q : "Boca nosi oznaku za opasnost".

Implikacija $p \Rightarrow q$ odgovara složenom iskazu

"Ako boca sadrži kiselinu, onda boca nosi oznaku za opasnost"

Šta se dešava ako boca ne sadrži kiselinu, tj. iskaz p je netačan?

Matematičko shvatanje implikacije

2. Primer

Može se desiti da boca nosi oznaku za opasnost jer ne sadrži kiselinu već jak otrov, i tada je q tačan iskaz.

Može se desiti i da boca ne sadrži oznaku jer sadrži sok od narandže, i tada je q netačan iskaz.

U oba slučaja, tačnost iskaza $p \Rightarrow q$ nije dovedena u pitanje.

Matematičko shvatanje implikacije

Ovakvo matematičko shvatanje implikacije odudara od upotrebe veznika "ako ... onda ..." u svakodnevnom životu.

Naime, bilo je rasprava oko toga da li implikacija $p \Rightarrow q$ uopšte ima smisla ako između iskaza p i q nema neke suštinske veze.

Na primer, neka je

$$p : \text{voda mrzne na } 100^\circ C$$

$$q : \text{Bombaj je glavni grad Argentine}$$

Sa matematičke tačke gledišta, $p \Rightarrow q$ je istinit iskaz.

Međutim, implikacija $p \Rightarrow q$ u suštini nema smisla, jer između iskaza p i q ne postoji nikakva veza.

Matematičko shvatanje implikacije (cont.)

Napomena

Matematička tačka gledišta je pobedila iz dva razloga:

(1) Zato što matematičku logiku ne interesuje značenje iskaza p i q, već samo njihova istinitost.

Preciznije, matematičku logiku interesuju samo uslovi pod kojima istinitost iskaza p povlači istinitost iskaza q.

(2) Drugi razlog što je prihvaćena ovakva implikacija je to što se ovakvo gledište pokazalo veoma korisnim za primenu u nauci.

Naime, u nauci se često srećemo sa nekim hipotezama koje je nemoguće eksperimentalno proveriti, ali bi se mogle proveriti neke posledice koje se mogu izvući iz tih hipoteza.

Ovakvo gledište dozvoljava da iz tih hipoteza izvode posledice bez obzira na to što ne znamo da li su te hipoteze istinite ili ne.

Ovo se naziva hipotetički karakter naučnih teorija.

Komentar

U svakodnevnom životu veznik "ako . . . onda . . . " ima još jednu primenu koja je drugačija od one u matematici- često se koristi da naznači da ne verujemo da premisa može da bude istinita.

Logičke ekvivalencije sa implikacijom

3. *Primer*

Zamena implikacije disjunkcijom: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Logičku ekvivalentnost ovih formula dokazujemo formirajući istinitosnu tablicu:

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$		$\neg p \vee q$
1	1	0	1	=	1
1	0	0	0	=	0
0	1	1	1	=	1
0	0	1	1	=	1

4. *Primer- Primena logičke ekvivalencije* $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Vi ćete dolaziti na vreme na posao ili ćete biti otpušteni.

Neka $\neg p$ bude iskaz "Vi ćete dolaziti na vreme na posao",
a neka q bude iskaz "Bićete otpušteni". Tada gornji iskaz postaje $\neg p \vee q$.
Ako sada iskoristimo logičku ekvivalenciju $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, dolazimo do ekvivalentnog iskaza

Ako ne dolazite na vreme na posao, onda će te biti otpušteni.

Negacija implikacije

5. Primer- Negacija implikacije $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \land \neg q$

I ovu ekvivalenciju možemo dokazati istinitosnom tablicom, ali ovo ćemo uraditi transformacijom izraza:

Naime, imamo da važi sledeće:

$$\begin{aligned}\neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \lor q) && \text{(jer je } p \Rightarrow q \equiv \neg p \lor q\text{)}\\ &\equiv \neg(\neg p) \land (\neg q) && \text{(na osnovu De Morganovih zakona)}\\ &\equiv p \land \neg q && \text{(na osnovu Zakona dvojne negacije)}\end{aligned}$$

Prema tome, dokazali smo da je $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \land \neg q$.

6. Primer- Primena negacije implikacije

Napisati negacije sledećih iskaza:

(a) Ako je moj automobil kod automehaničara, onda neću moći da dođem na čas.

(b) Ako Sara boravi u Atini, onda ona boravi u Grčkoj.

Negacije:

(a) Moj automobil je kod automehaničara i moći ću da dođem na čas.

(b) Sara boravi u Atini i ne boravi u Grčkoj.

Kontrapozicija

Kontrapozicija

Kontrapozicija iskaza "ako p onda q" je iskaz "ako nije q, onda nije p".
Simbolički izraženo, kontrapozicija od $p \Rightarrow q$ je $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Teorema 2.

Svaki uslovni iskaz je logički ekvivalentan svojoj kontrapoziciji, odnosno $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

Dokaz:

Teoremu dokazujemo sledećim nizom ekvivalencija:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &\equiv \neg p \vee q && \text{(na osnovu } p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q\text{)} \\ &\equiv q \vee \neg p && \text{(na osnovu Zakona komutativnosti)} \\ &\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p && \text{(na osnovu Zakona dvojne negacije)} \\ &\equiv \neg q \Rightarrow \neg p && \text{(na osnovu } \neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q\text{)} \end{aligned}$$

Zakon kontrapozicije

Ekvivalenciju $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ nazivamo Zakon kontrapozicije.

Kontrapozicija (cont.)

7. *Primer*

Odrediti kontrapoziciju sledećih iskaza:

(a) Ako Petar može da prepliva jezero, onda Petar može da dopliva do ostrva.

(b) Ako je danas Uskrs, onda je sutra ponedeljak.

Rešenje:

(a) Ako Petar ne može da dopliva do ostrva, onda Petar ne može da prepliva jezero.

(b) Ako sutra nije ponedeljak, onda danas nije Uskrs.

8. *Primer*

U situaciji kada dokazujemo iskaz oblika $p \Rightarrow q$, često se dešava da je jednostavnije dokazati njegovu kontrapoziciju $\neg q \Rightarrow \neg p$, nego sam taj iskaz.

Ako treba dokazati implikaciju

$$xy \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0$$

onda je jednostavnije dokazati njenu kontrapoziciju

$$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$$

Konverzija i inverzija

Konverzija

Konverzija iskaza zadatog formulom $p \Rightarrow q$ je iskaz zadat sa $q \Rightarrow p$.

Inverzija

Inverzija iskaza zadatog formulom $p \Rightarrow q$ je iskaz zadat sa $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Komentar

Za razliku od kontrapozicije od $p \Rightarrow q$, za koju smo dokazali da je ekvivalentna sa $p \Rightarrow q$, konverzija i inverzija od $p \Rightarrow q$ nisu ekvivalentne sa $p \Rightarrow q$.

Tablica istinitosnih vrednosti

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \Rightarrow p$		$p \Rightarrow q$		$\neg p \Rightarrow \neg q$
1	1	0	0	1	$=$	1	$=$	1
1	0	0	1	1	$\neq$	0	$\neq$	1
0	1	1	0	0	$\neq$	1	$\neq$	0
0	0	1	1	1	$=$	1	$=$	1

Konverzija i inverzija (cont.)

Napomena

Iz prethodne tablice se takođe vidi da su konverzija i inverzija od $p \Rightarrow q$ međusobno logički ekvivalentne.

To je jasno, jer inverzija od $p \Rightarrow q$ (odnosno $\neg p \Rightarrow \neg q$) zapravo jeste kontrapozicija konverzije od $p \Rightarrow q$ (odnosno od $q \Rightarrow p$).

PAŽNJA!!!

Jedna od čestih grešaka u rezonovanju je zamena implikacije njenom konverzijom ili inverzijom, zbog pogrešnog shvatanja da su konverzija i inverzija logički ekvivalentne sa tom implikacijom.

Kao što smo to ovde videli, TO SE SME ČINITI SAMO KONTRAPOZICIJOM.

9. Primer- Odrediti konverziju i inverziju iskaza iz 7. Primera

(a) Ako Petar može da prepliva jezero, onda Petar može da dopliva do ostrva.
(b) Ako je danas Uskrs, onda je sutra ponedeljak.

Ekvivalencija

9. Primer- Odrediti konverziju i inverziju iskaza iz 7. Primera

Rešenje:

(a) Konverzija: Ako Petar može da dopliva do ostrva, onda Petar može da prepliva jezero.
Inverzija: Ako Petar ne može da prepliva jezero, onda Petar ne može da dopliva do ostrva.

(b) Konverzija: Ako je sutra ponedeljak, onda je danas Uskrs.
Inverzija: Ako danas nije Uskrs, onda sutra nije ponedeljak.

Ekvivalencija

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz "p ako i samo ako q", u oznaci $p \Leftrightarrow q$.

Ekvivalencija je tačan iskaz ako su p i q ili oba tačna ili oba netačna.

U preostalim slučajevima ekvivalencija je netačan iskaz.

Isključiva disjunkcija

Istinitosna tablica za ekvivalenciju

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ekvivalencija

Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ po istinitosti odgovara iskazu
"ako p onda q i ako q onda p",
odnosno iskazu

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ se formuliše i kao
"p je ekvivalentno sa q".
Iskaz $p \Leftrightarrow q$ formuliše se i na sledeći način:
"p je potrebno i dovoljno za q".

Primeri

10. Primer- Rečenice

"Trouglovi $\mathscr{T}_1$ i $\mathscr{T}_2$ su podudarni"

"Trouglovi $\mathscr{T}_1$ i $\mathscr{T}_2$ imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćen ugao"

Ove rečenice predstavljaju ekvivalentne iskaze i ta činjenica se formuliše i kao jedan od opštih stavova o podudarnosti trouglova:

"Dva trougla su podudarna ako i samo ako imaju podudarne po dve stranice i njima zahvaćeni ugao"

Napomena

Ekvivalencijom se u matematici često definišu novi termini, polazeći od već poznatih.

"Prirodan broj različit od jedinice je prost ako i samo ako je deljiv samo sa sobom i sa jedinicom."

Ovom rečenicom definisan je prost broj poznatim pojmovima koji čine sadržaj drugog iskaza u ekvivalenciji.

Dakle, iako ova rečenica ima formu iskaza, njome nije zadat iskaz, već definicija.

Kada je jasno da je u pitanju definicija, u odgovarajućoj rečenici se često izostavlja deo "samo ako", iako se podrazumeva da i taj pravac važi.

Ekvivalencija i implikacija

11. Primer- Zamena ekvivalencije konjunkcijom implikacija

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$		$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	=	1
1	0	0	1	0	=	0
0	1	1	0	0	=	0
0	0	1	1	1	=	1

Napomena

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

je logička ekvivalencija se veoma često koristi u svakodnevnoj matematičkoj praksi. Kada dokazujemo neko tvrđenje oblika $p \Leftrightarrow q$, mi veoma često to dokazujemo na taj način što ponaosob dokazujemo svaku od implikacija $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$.

Iskazne formule – formalna definicija

Podsećanje

Cilj iskazne logike je da se upotrebom matematičke simbolike prevaziđu problemi koji mogu da nastanu

- zbog nemogućnosti da na zadovoljavajući način definišemo pojam iskaza;
- zbog nepreciznosti i višesmislenosti koje se mogu javiti ako se u logici koristi prirodni jezik.

To znači da složeni iskazi, u kojima se javlja više jednostavnijih iskaza i više veznika, treba da se formiraju prema jasno i precizno utvrđenim pravilima.

Zbog toga, iako je ranije data neformalna definicija iskazne formule, treba da damo i sasvim preciznu, formalnu definiciju.

Jezik iskazne logike

Pri utvrđivanju tih pravila najpre se određuje jezik koji čine

simboli $p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots$ kojima se označavaju iskazi.
Kao što smo rekli, oni se zovu iskazna slova;
simboli $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ kojima se označavaju logički veznici.
Sećamo se da se oni zovu znaci logičkih operacija;
znaci (i) (zagrade), koje nazivamo pomoćni znaci.

Iskazne formule – formalna definicija (cont.)

Logičke operacije

Znak $\neg$ je unaran, a ostali znaci logičkih operacija su binarni znaci.

Iskazne formule

Uz pomoć iskaznih slova, veznika i pomoćnih znaka mogu se obrazovati izrazi koji predstavljaju konačne nizove tih simbola.

Neke od tih izraza, koje smatramo pravilno formiranim, nazivamo iskaznim formulama.

Iskazne formule definišu se induktivno, pomoću sledećih pravila:

1. Iskazna slova su iskazne formule.
2. Ako su P i Q iskazne formule, onda su iskazne formule i izrazi $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow Q)$, $(P \Leftrightarrow Q)$.
3. Iskazne formule su samo oni izrazi koji se mogu formirati primenom pravila 1. i 2. konačan broj puta.

Primer

$$p,\ \ \neg\neg r,\ \ (p \wedge q),\ \ (\neg p \Rightarrow q),\ \ ((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge \neg p)) -- \text{iskazne formule;}$$

$$(p\wedge),\ \ (\Rightarrow p \Rightarrow) -- \text{nisu iskazne formule}$$

Iskazne formule – formalna definicija (cont.)

Podformula

Svaku podreč, odnosno podniz, iskazne formule koji je i sam iskazna formula nazivamo njenom podformulom

$\neg r$ i $(p \Rightarrow \neg q)$ – podformule iskazne formule

$$((p \wedge \neg r) \vee \neg(p \Rightarrow \neg q)).$$

Konvencija o brisanju zagrada

Prema definiciji, izraz oblika $P \Rightarrow Q$, gde su P i Q formule, nije formula, jer nema spoljnih zagrada oko tog iskaza.

Međutim, uvodimo konvenciju o brisanju zagrada koja obezbeđuje da i takvi izrazi budu formule i olakšava nam rad sa formulama.

Konvenciju o brisanju zagrada čine sledeća pravila:

1. Izostavljaju se spoljne zagrade, kao na primer u izrazima

   $(p \wedge q)$, $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$

2. Uklanjaju se zagrada zbog asocijativnosti: Ako se u iskaznoj formuli javlja samo konjunkcija, ili samo disjunkcija, onda možemo izbrisati sve zagrade, jer nije bitan redosled kojim ćemo primenjivati te veznike.

Na primer, ako su P, Q, i R bilo koje iskazne formule, umesto $(P \wedge Q) \wedge R$ i $P \wedge (Q \wedge R)$ pišemo jednostavno $P \wedge Q \wedge R$.

Iskazne formule – formalna definicija (cont.)

9. Primer

Slično, $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ se zamenjuje bilo kojim od izraza

$$((p_1 \underset{(1)}{\wedge} p_2) \underset{(2)}{\wedge} p_3) \underset{(3)}{\wedge} p_4, \quad (p_1 \underset{(1)}{\wedge} p_2) \underset{(3)}{\wedge} (p_3 \underset{(2)}{\wedge} p_4),$$

$$(p_1 \underset{(2)}{\wedge} (p_2 \underset{(1)}{\wedge} p_3)) \underset{(3)}{\wedge} p_4, \quad (p_1 \underset{(2)}{\wedge} p_2) \underset{(3)}{\wedge} (p_3 \underset{(1)}{\wedge} p_4),$$

$$p_1 \underset{(3)}{\wedge} ((p_2 \underset{(1)}{\wedge} p_3) \underset{(2)}{\wedge} p_4), \quad p_1 \underset{(3)}{\wedge} (p_2 \underset{(2)}{\wedge} (p_3 \underset{(1)}{\wedge} p_4))$$

Isto važi i za disjunkciju.

Konvencija o brisanju zagrada

3. Dogovor o redosledu veznika:

1. $\neg$	Najpre primenjujemo negaciju.
2. $\wedge, \vee$	Drugo, primenjujemo konjunkciju i disjunkciju. Ako su obe prisutne, mogu biti neophodne zagrade.
3. $\Rightarrow, \Leftrightarrow$	Treće, primenjujemo implikaciju i ekvivalenciju. Ako su obe prisutne, mogu biti neophodne zagrade.

Iskazne formule – formalna definicija (cont.)

Konvencija o brisanju zagrada

Na primer,

umesto	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	pišemo	$p \Rightarrow q \wedge r$
umesto	$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee r)$	pišemo	$p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg p \vee r$

Kaže se još i da veznici $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ "jače razdvajaju" od veznika $\wedge$ i $\vee$.

Napomena

Definicija podformule odnosi se samo na iskaznu formulu kod koje nisu uklonjene zagrade.

Na primer, $p \Rightarrow q$ nije podformula formule $p \Rightarrow q \wedge r$, jer je to samo uprošteni zapis formule $p \Rightarrow (q \wedge r)$

Istinitosna vrednost formule

Podsećanje

Istinitost nekog iskaza zavisi od istinitosti jednostavnijih iskaza koji ga čine.

Istinitosna vrednost iskazne formule trebala da zavisi od istinitosnih vrednosti iskaznih slova koja se u njoj javljaju.

Zato određivanje istinitosne vrednosti iskazne formule P treba početi dodeljivanjem izvesnih istinitosnih vrednosti svim iskaznim slovima koja se u njoj javljaju.

Potom se te istinitosne vrednosti sa slova prenose na celu formulu P.

Interpretacija iskaznih formula

Neka je dat konačan niz iskaznih formula $P_1, P_2, \ldots, P_n$ i neka su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sva iskazna slova koja se javljaju u tim formulama.

Interpretacija iskaznih formula $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se definiše kao funkcija

$$v : \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \to \{1, 0\}$$

koja svakom iskaznom slovu p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, pridružuje izvesnu vrednost $v(p_i) \in \{1, 0\}$.

Vrednost $v(p_i)$ naziva se istinitosna vrednost iskaznog slova p_i.

Dakle, interpretacija je dodeljivanje istinitosnih vrednosti svim iskaznim slovima koja se javljaju u formulama $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Istinitosna vrednost formule (cont.)

Istinitosna vrednost formule

Istinitosna vrednost formule P u interpretaciji v definiše se induktivno, po složenosti formule P:

1. Ako formula P jeste iskazno slovo p, onda je
$$v(P) \stackrel{\text{def}}{=} v(p).$$
2. Ako je $P = \neg Q$ i poznata je vrednost $v(Q)$, onda je
$$v(P) \stackrel{\text{def}}{=} \neg v(Q).$$
3. Ako je $P = Q * R$, gde je $*$ jedan od logičkih veznika $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$, i poznate su vrednosti $v(Q)$ i $v(R)$, onda je
$$v(P) \stackrel{\text{def}}{=} v(Q) * v(R).$$

Istinitosna vrednost formule

Drugim rečima,

$$v(Q \wedge R) \stackrel{\text{def}}{=} v(Q) \wedge v(R), \qquad v(Q \vee R) \stackrel{\text{def}}{=} v(Q) \vee v(R),$$

$$v(Q \Rightarrow R) \stackrel{\text{def}}{=} v(Q) \Rightarrow v(R), \qquad v(Q \Leftrightarrow R) \stackrel{\text{def}}{=} v(Q) \Leftrightarrow v(R).$$

Istinitosna vrednost formule (cont.)

Komentar

Uočimo još jednom da vrednost formule zavisi od interpretacije u kojoj se posmatra – u različitim interpretacijama ona može imati različite vrednosti.

Istinitosna vrednost složenih formula određuje se tako što se najpre odrede istinitosne vrednosti jednostavnijih formula koje je grade, polazeći od iskaznih slova.

Ako u nekoj interpretaciji vrednost formule jednaka 1, onda kažemo da je formula tačna u toj interpretaciji.

Ako je vrednost formule u toj interpretaciji jednaka 0, kažemo da je formula netačna u toj interpretaciji.

12. Primer- iskazna formula $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$

Iskazna slova koja se u njoj javljaju su p, q i r. Dodelimo im redom vrednosti $1, 0, 0$. To je jedna intepretacija date formule. Tada je

$$\begin{aligned} v(p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)) &= v(p) \wedge (v(q) \Leftrightarrow \neg v(r)) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow \neg 0) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow 1) = \\ &= 1 \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, u ovoj interpretaciji ova formula je netačna.

Za neke druge vrednosti iskaznih slova p, q i r, tj. za neku drugu interpretaciju, trebalo bi, razume se, ponovo odrediti vrednost formule, i može se desiti da tada formula bude i tačna.

Istinitosna vrednost formule (cont.)

Komentar

Uočimo još jednom da vrednost formule zavisi od interpretacije u kojoj se posmatra – u različitim interpretacijama ona može imati različite vrednosti.

Istinitosna vrednost složenih formula određuje se tako što se najpre odrede istinitosne vrednosti jednostavnijih formula koje je grade, polazeći od iskaznih slova.

Ako u nekoj interpretaciji vrednost formule jednaka 1, onda kažemo da je formula tačna u toj interpretaciji.

Ako je vrednost formule u toj interpretaciji jednaka 0, kažemo da je formula netačna u toj interpretaciji.

12. Primer- iskazna formula $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$

Iskazna slova koja se u njoj javljaju su p, q i r. Dodelimo im redom vrednosti $1, 0, 0$. To je jedna intepretacija date formule. Tada je

$$\begin{aligned} v(p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)) &= v(p) \wedge (v(q) \Leftrightarrow \neg v(r)) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow \neg 0) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow 1) = \\ &= 1 \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, u ovoj interpretaciji ova formula je netačna.

Za neke druge vrednosti iskaznih slova p, q i r, tj. za neku drugu interpretaciju, trebalo bi, razume se, ponovo odrediti vrednost formule, i može se desiti da tada formula bude i tačna.

Istinitosna vrednost formule (cont.)

Komentar

Uočimo još jednom da vrednost formule zavisi od interpretacije u kojoj se posmatra – u različitim interpretacijama ona može imati različite vrednosti.

Istinitosna vrednost složenih formula određuje se tako što se najpre odrede istinitosne vrednosti jednostavnijih formula koje je grade, polazeći od iskaznih slova.

Ako u nekoj interpretaciji vrednost formule jednaka 1, onda kažemo da je formula tačna u toj interpretaciji.

Ako je vrednost formule u toj interpretaciji jednaka 0, kažemo da je formula netačna u toj interpretaciji.

12. Primer- iskazna formula $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$

Iskazna slova koja se u njoj javljaju su p, q i r. Dodelimo im redom vrednosti $1, 0, 0$. To je jedna intepretacija date formule. Tada je

$$\begin{aligned} v(p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)) &= v(p) \wedge (v(q) \Leftrightarrow \neg v(r)) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow \neg 0) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow 1) = \\ &= 1 \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, u ovoj interpretaciji ova formula je netačna.

Za neke druge vrednosti iskaznih slova p, q i r, tj. za neku drugu interpretaciju, trebalo bi, razume se, ponovo odrediti vrednost formule, i može se desiti da tada formula bude i tačna.

Istinitosna vrednost formule (cont.)

Komentar

Uočimo još jednom da vrednost formule zavisi od interpretacije u kojoj se posmatra – u različitim interpretacijama ona može imati različite vrednosti.

Istinitosna vrednost složenih formula određuje se tako što se najpre odrede istinitosne vrednosti jednostavnijih formula koje je grade, polazeći od iskaznih slova.

Ako u nekoj interpretaciji vrednost formule jednaka 1, onda kažemo da je formula tačna u toj interpretaciji.

Ako je vrednost formule u toj interpretaciji jednaka 0, kažemo da je formula netačna u toj interpretaciji.

12. Primer- iskazna formula $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$

Iskazna slova koja se u njoj javljaju su p, q i r. Dodelimo im redom vrednosti $1, 0, 0$. To je jedna intepretacija date formule. Tada je

$$\begin{aligned} v(p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)) &= v(p) \wedge (v(q) \Leftrightarrow \neg v(r)) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow \neg 0) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow 1) = \\ &= 1 \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, u ovoj interpretaciji ova formula je netačna.

Za neke druge vrednosti iskaznih slova p, q i r, tj. za neku drugu interpretaciju, trebalo bi, razume se, ponovo odrediti vrednost formule, i može se desiti da tada formula bude i tačna.

Istinitosna vrednost formule (cont.)

Komentar

Uočimo još jednom da vrednost formule zavisi od interpretacije u kojoj se posmatra – u različitim interpretacijama ona može imati različite vrednosti.

Istinitosna vrednost složenih formula određuje se tako što se najpre odrede istinitosne vrednosti jednostavnijih formula koje je grade, polazeći od iskaznih slova.

Ako u nekoj interpretaciji vrednost formule jednaka 1, onda kažemo da je formula tačna u toj interpretaciji.

Ako je vrednost formule u toj interpretaciji jednaka 0, kažemo da je formula netačna u toj interpretaciji.

12. Primer- iskazna formula $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$

Iskazna slova koja se u njoj javljaju su p, q i r. Dodelimo im redom vrednosti $1, 0, 0$. To je jedna intepretacija date formule. Tada je

$$\begin{aligned} v(p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)) &= v(p) \wedge (v(q) \Leftrightarrow \neg v(r)) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow \neg 0) = \\ &= 1 \wedge (0 \Leftrightarrow 1) = \\ &= 1 \wedge 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, u ovoj interpretaciji ova formula je netačna.

Za neke druge vrednosti iskaznih slova p, q i r, tj. za neku drugu interpretaciju, trebalo bi, razume se, ponovo odrediti vrednost formule, i može se desiti da tada formula bude i tačna.

Istinitosna vrednost formule (cont.)

12. *Primer-* $p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$

Svih interpretacija ove formule ima $2^3 = 8$, i vrednost formule za svaku od tih interpretacija određena je sledećom istinitosnom tablicom:

p	q	r	$\neg r$	$q \Leftrightarrow \neg r$	$p \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0

Ekvivalencija i logička ekvivalencija

Teorema 3.

Iskazne formule P i Q su logički ekvivalentne ako i samo ako je $P \Leftrightarrow Q$ tautologija, odnosno

$$P \equiv Q \ \text{ ako i samo ako } \ \models P \Leftrightarrow Q.$$

Dokaz:

Dokazaćemo najpre da $P \equiv Q$ povlači $\models P \Leftrightarrow Q$, a potom da $\models P \Leftrightarrow Q$ povlači $P \equiv Q$.

Setimo se da $P \equiv Q$ važi ako i samo ako formule P i Q imaju istu istinitosnu vrednost u svakoj svojoj interpretaciji.

Sa druge strane, $\models P \Leftrightarrow Q$ važi ako i samo ako je formula $P \Leftrightarrow Q$ tačna u svakoj svojoj interpretaciji.

1) $P \equiv Q$ povlači $\models P \Leftrightarrow Q$:

Neka je v proizvoljna interpretacija formula P i Q, tj. proizvoljno dodeljivanje istinitosnih vrednosti svim slovima koja se javljaju u formulama P i Q, odnosno u formuli $P \Leftrightarrow Q$.

Prema pretpostavci je $P \equiv Q$, što znači da je $v(P) = v(Q)$, pa je

$$v(P \Leftrightarrow Q) = v(P) \Leftrightarrow v(Q) = 1.$$

Dakle, dokazali smo da je $\models P \Leftrightarrow Q$.

Ekvivalencija i logička ekvivalencija (cont.)

Dokaz:

2) $\models P \Leftrightarrow Q$ povlači $P \equiv Q$:

Da bi dokazali da je $P \equiv Q$, treba dokazati da je $v(P) = v(Q)$, za proizvoljnu interpretaciju v formula P i Q.

Zato, neka je v proizvoljna interpretacija formula P i Q, tj. proizvoljno dodeljivanje istinitosnih vrednosti svim slovima koja se javljaju u formulama P i Q, odnosno u formuli $P \Leftrightarrow Q$.

Prema pretpostavci je $\models P \Leftrightarrow Q$, što znači da je $v(P \Leftrightarrow Q) = 1$, odnosno, $v(P) \Leftrightarrow v(Q) = 1$.

Iz istinitosne tablice za ekvivalenciju vidimo da je to moguće u slučaju kada je $v(P) = 1$ i $v(Q) = 1$, ili u slučaju $v(P) = 0$ i $v(Q) = 0$.

U oba slučaja je $v(P) = v(Q)$, i time smo dokazali da je $P \equiv Q$. $\square$