Egzistencija i jedinstvenost Košijevog i Gursaovog problema linearne PDJ hiperboličnog tipa

Kanonski oblik linearne PDJ hiperboličnog tipa:

$$L(y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

gde su funkcije $a, b, c, f \in C(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Neka je kriva $\Gamma : \ y = g(x)$, definisana u oblasti $D_\Gamma = \{x \,|\, (x, g(x)) \in \mathbb{D}\}$, pri čemu je $g \in C^1(D_\Gamma)$ i $g'(x) \neq 0$ za $x \in D_\Gamma$. U okolini krive Γ uočimo proizvoljan pravougaonik $\Pi = (x_0, \alpha) \times (y_0, \beta) \subset \mathbb{D}$. Kroz proizvoljnu tačku $N(x,y) \in \Pi$ povucimo prave paralelne sa koordinatnim osama do preseka P i Q sa krivom Γ i označimo sa $\mathbb{G}$ oblast ograničenu krivolinijskim trouglom BCD.

Košijev problem PDJ (1): U oblasti $\mathbb{G}$ odrediti funkciju $u \in C^1(\mathbb{G})$, $u_{xy} \in C(\mathbb{G})$, koja je rešenje PDJ (1) u $\mathbb{G}$ i koja zadovoljava početne uslove na krivoj Γ

$$u(x,y)\Big|_{y=g(x)} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} = \varphi_2(x), \tag{2}$$

Gursaov problem PDJ (1): Odrediti funkciju $u \in C^1(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$, $u_{xy} \in C(\Pi)$, koja zadovoljava PDJ (1) u pravougaoniku Π i ima date vrednosti na njegovim stranama:

$$u|_{x=x_0} = \psi_1(y), \ \ y_0 \le y \le \beta, \qquad u|_{y=y_0} = \psi_2(x), \ \ x_0 \le x \le \alpha, \tag{3}$$

gde funkcije ψ_1, ψ_2 zadovoljavaju **uslov saglasnosti** $\psi_1(y_0) = \psi_2(x_0)$

Iz karakteristične jednačine $dx\, dy = 0$ sledi da PDJ (1) ima dve familije karakteristika,

$$x = C_1, \quad y = C_2, \qquad C_1, C_2 - \text{const.}$$

Pri učinjenim pretpostavkama kriva Γ ima samo jedan presek sa svakom od karakteristika.

Iz početnih uslova (2) sledi

$$\frac{\partial u(x, g(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, g(x))}{\partial y}\, g'(x) = \varphi_0'(x),$$

odnosno,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=g(x)} = \varphi_1'(x) - \varphi_2(x) g'(x) := \varphi_3(x). \tag{4}$$

Teorema 1. (Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema) *Ako važi*

(i) funkcije $a, b, c, f \in C(\mathbb{D})$,

(ii) funkcija $y = g(x)$ *je definisana u oblasti* D_Γ, *pri čemu je* $g \in C^1(D_\Gamma)$ *i* $g'(x) \neq 0$ *za* $x \in D_\Gamma$

(iii) $\varphi_1 \in C^1([x_0, \alpha])$, $\varphi_2 \in C([x_0, \alpha])$

postoji jedinstveno rešenje $u \in C^1(\mathbb{G})$, $u_{xy} \in C(\mathbb{G})$ *Košijevog problema* $(1) - (2)$.

Dokaz:

(I) transformacija PDJ (1) u sistem integralnih jednačina: Uvedimo pomoćne funkcije

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{5}$$

pa pomoću njih i jednačine (1) definišimo sistem PDJ prvog reda

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= f(x, y) - av - bw - cu, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= f(x, y) - av - bw - cu, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= w. \end{aligned} \tag{6}$$

Zbog monotonosti funkcije $y = g(x)$, postoji inverzna funkcija $x = g^{-1}(y) := h(y)$ koja je takodje jednačina krive Γ. Integracijom prve i treće jednačine sistema (5) po duži $NQ : N(x, y), Q(x, g(x))$, a druge po duži $PN : P(h(y), y), N(x, y)$ imajući u vidu početne uslove (2) i relaciju (4), odnosno da je

$$v\Big|_{y=g(x)} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=g(x)} = \varphi_3(x), \quad w\Big|_{y=g(x)} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} = \varphi_2(x) \quad \Rightarrow \quad w(h(y), y) = \varphi_2(h(y)),$$

dobija se sistem integralnih jednačina

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \varphi_3(x) + \int_{g(x)}^{y} [f - av - bw - cu]\, dy \\ w(x, y) &= \varphi_2(h(y)) + \int_{h(y)}^{x} [f - av - bw - cu]\, dx \\ u(x, y) &= \varphi_1(x) + \int_{g(x)}^{y} w\, dy \end{aligned} \tag{7}$$

(II) Košijev problem (1)–(2) i sistem integralnih jednačina (6) ekvivalentni su u smislu rešivosti u klasi funkcija $C(\mathbb{G})$:

Ako je $u(x, y)$ rešenje Košijevog problema (1)–(2), tada (v, w, u) zadovoljava sistem (6).

Obrnuto, ako je (v, w, u) neprekidno rešenje sistema (6), tada se integrali u sistemu (6) mogu diferencirati, pa je zadovoljen sistem PDJ (5). Diferenciranjem po y prve (6)-(a) i poslednje (6)-(c) jednačine sistema i iz (6)-(b) diferenciranjem po x, dobija se

$$\frac{\partial v}{\partial y} = f - av - bw - cu \in C(\mathbb{G})\,. \tag{8}$$

(9) $$\frac{\partial w}{\partial x} = f - av - bw - cu \in C(\mathbb{G})\,.$$

(10) $$\frac{\partial u}{\partial y} = w(x,y) \in C(\mathbb{G})\,.$$

S druge strane, kako je $h(g(x)) = x$, iz (6)-(b) imamo da je

$$w(x,y)\Big|_{y=g(x)} = \varphi_2(x).$$

Iz (10) i (9) zaključujemo da je $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(\mathbb{G})$. Kako je $\dfrac{\partial w}{\partial x} \in C(\mathbb{G})$ i $\varphi_1 \in C^1([x_0, \alpha])$, (6)-(c) se može diferencirati po x i dobija se

(11) $$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi_1'(x) - w(x,y)\Big|_{y=g(x)} g'(x) + \int_{g(x)}^{y} \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\, dy \\ &= \varphi_3(x) + \int_{g(x)}^{y} [f - av - bw - cu]\, dy = v(x,y) \in C(\mathbb{G})\,. \end{aligned}$$

Iz (10) i (11) zaključujemo da je $u \in C^1(\mathbb{G})$, dok iz (8) i (11) sledi da je $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \in C(\mathbb{G})$, pa je $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Dakle, zadovoljene su obe jednačine sistema (4). Kako je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} - cu,$$

funkcija $u(x,y)$ zadovoljava PDJ (1). Pored toga, iz (6) sledi da ona zadovoljava i Košijeve uslove (2), jer je

$$u(x,y)\Big|_{y=g(x)} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)} = w(x,y)\Big|_{y=g(x)} = \varphi_2(x).$$

Prema tome, za dokaz egzistencije rešenja Košijevog problema (1)–(2) dovoljno je dokazati egzistenciju neprekidnog rešenja sistema integralnih jednačina (6).

(III) Dokaz egzistencije neprekidnog rešenja sistema integralnih jednačina (6): Dokaz izvodimo metodom sukcesivnih aproksimacija.

$\surd$ formirati u $\mathbb{G}$ funkcionalne nizovi

$\surd$ pokazati da su formirani nizovi ravnomerno konvergentni na $\mathbb{G}$

$\surd$ pokazati da su granične funkcije neprekidno diferencijabilna rešenja sistema integralnih jednačina (6) u oblasti $\mathbb{G}$

Formiramo u $\mathbb{G}$ funkcionalne nizove $\{v_n(x,y)\}, \{w_n(x,y)\}, \{u_n(x,y)\}$ na sledeći način:

(12) $$\begin{aligned} &v_0(x,y) = \varphi_3(x), \quad v_n(x,y) = \varphi_3(x) + \int_{g(x)}^{y} [f - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]\, dy, \quad n = 1,2,\ldots \\ &w_0(x,y) = \varphi_2(x), \quad w_n(x,y) = \varphi_2(x) + \int_{h(y)}^{x} [f - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1}]\, dx, \quad n = 1,2,\ldots \\ &u_0(x,y) = \varphi_1(x), \quad u_n(x,y) = \varphi_0(x) + \int_{g(x)}^{y} w_{n-1} dy, \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom se lako zaključuje da su funkcije $v_n, w_n, u_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ neprekidne. Dokažimo da funkcionalni nizovi $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\{u_n\}$ uniformno konvergiraju u oblasti $\mathbb{G}$. Kako je

$$v_n = v_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + (v_n - v_{n-1}),$$

dokaz uniformne konvergencije funkcionalnih nizova $\{v_n\}, \{w_n\}, \{u_n\}$ u oblasti $\mathbb{G}$ se zasniva na dokazu uniformne konvergencije funkcionalnih redova

$$v_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n-1}), \quad w_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(w_n - w_{n-1}), \quad u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1}). \tag{13}$$

Označimo sa $M = \max\limits_{\mathbb{G}}\{|a| + |b| + |c|\}$, $K = \max\{1, M\}$. Za $n = 0$ postoji konstanta $A > 0$, tako da je

$$|v_1 - v_0| \leq \int_{g(x)}^{y} \big[\, |f| + |a|\, |\varphi_3| + |b|\, |\varphi_2| + |c|\, |\varphi_1| \,\big]\, dy \leq A\,,$$

$$|w_1 - w_0| \leq \int_{h(y)}^{x} \big[\, |f| + |a|\, |\varphi_3| + |b|\, |\varphi_2| + |c|\, |\varphi_1| \,\big]\, dx \leq A\,,$$

$$|u_1 - u_0| \leq \int_{g(x)}^{y} |\varphi_2|\, dy \leq A.$$

Sada je za $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= -\int_{g(x)}^{y} [a\,(v_n - v_{n-1}) + b\,(w_n - w_{n-1}) + c\,(u_n - u_{n-1})]\, dy,\\
w_{n+1} - w_n &= -\int_{h(y)}^{x} [a\,(v_n - v_{n-1}) + b\,(w_n - w_{n-1}) + c\,(u_n - u_{n-1})]\, dx,\\
u_{n+1} - u_n &= -\int_{g(x)}^{y} (w_n - w_{n-1})\, dy\,.
\end{aligned}$$

Za $n = 1$, kako je

$$x_0 \leq h(y) \leq x \leq \alpha, \quad y_0 \leq g(x) \leq y \leq \beta, \tag{14}$$

imamo

$$\begin{aligned}
|v_2 - v_1| &\leq \int_{g(x)}^{y} \big[\, |a|\, |v_1 - v_0| + |b|\, |w_1 - w_0| + |c|\, |u_1 - u_0| \,\big]\, dy\\
&\leq A \int_{g(x)}^{y} [\, |a| + |b| + |c| \,]\, dy \leq A\, M(y - g(x)) \leq A\, K(x - x_0 + y - y_0),\\
|w_2 - w_1| &\leq \int_{h(y)}^{x} \big[\, |a|\, |v_1 - v_0| + |b|\, |w_1 - w_0| + |c|\, |u_1 - u_0| \,\big]\, dx\\
&\leq A \int_{h(y)}^{x} [\, |a| + |b| + |c| \,]\, dx \leq A\, M(x - h(y)) \leq A\, K(x - x_0 + y - y_0),\\
|u_2 - u_1| &\leq \int_{g(x)}^{y} |w_1 - w_0|\, dy \leq A\,(y - g(x)) \leq A\, K(x - x_0 + y - y_0).
\end{aligned}$$

Za $n = 2$ imamo

$$\begin{aligned}
|v_3 - v_2| &\leq \int_{g(x)}^{y} \big[\, |a|\,|v_2 - v_1| + |b|\,|w_2 - w_1| + |c|\,|u_2 - u_1| \,\big]\, dy \\
&\leq \int_{g(x)}^{y} [\,|a| + |b| + |c|\,]\, A\, K(y - g(x))dy \\
&\leq A\, K\, M\, \frac{(y - g(x))^2}{2} \leq A\, K^2\, \frac{(x - x_0 + y - y_0)^2}{2} \\
|w_3 - w_2| &\leq \int_{h(y)}^{x} \big[\, |a|\,|v_2 - v_1| + |b|\,|w_2 - w_1| + |c|\,|u_2 - u_1| \,\big]\, dx \\
&\leq \int_{h(y)}^{x} [\,|a| + |b| + |c|\,]\, A\, K(x - h(y))dx \leq A\, K^2 \frac{(x - x_0 + y - y_0)^2}{2} \\
|u_3 - u_2| &\leq \int_{g(x)}^{y} |w_2 - w_1|\, dy \leq \int_{g(x)}^{y} A\, K\ (y - g(x))dy \leq A\, K^2 \frac{(x - x_0 + y - y_0)^2}{2}
\end{aligned}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$ važe ocene

$$|v_n - v_{n-1}| \leq \theta_n(x, y), \quad |w_n - w_{n-1}| \leq \theta_n(x, y), \quad |u_n - u_{n-1}| \leq \theta_n(x, y), \tag{15}$$

gde je

$$\theta_n(x, y) = K^{n-1}\, A\, \frac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (x, y) \in \mathbb{G},\ A = \text{const.}$$

Polazeći od induktivne pretpostavke (15) za n, dokažimo da nejednakosti (15) važe za $n + 1$. Dakle,

$$\begin{aligned}
|v_{n+1} - v_n| &\leq \int_{g(x)}^{y} [\,|a|\,|v_n - v_{n-1}| + |b|\,|w_n - w_{n-1}| + |c|\,|u_n - u_{n-1}|\,]\, dy \\
&\leq \int_{g(x)}^{y} [\,|a| + |b| + |c|\,]\, \theta_n(x, y)\, dy \\
&\leq K\, K^{n-1}\, A\, \left[\frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!} - \frac{(x + g(x) - x_0 - y_0)^n}{n!} \right] \\
&\leq K^n\, A\, \frac{(x + y - x_0 - y_0)^n}{n!} = \theta_{n+1}(x, y).
\end{aligned}$$

Analogno se dokazuju druge dve nejednakosti u (15).

Kako je prema (14) i (15), za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$

$$|v_n - v_{n-1}| \leq \eta_n(x, y), \quad |w_n - w_{n-1}| \leq \eta_n(x, y), \quad |u_n - u_{n-1}| \leq \eta_n(x, y),$$

gde je

$$\eta_n(x, y) = K^{n-1}\, A\, \frac{(\alpha + \beta - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (x, y) \in \mathbb{G},\ A = \text{const.}$$

i brojni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{(\alpha + \beta - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!} < \infty$$

sledi prema Vajerštrasovom krterijumu, uniformna i apsolutna konvergencija funkcionalnih redova (13) u oblasti $\mathbb{G}$. Prema tome, postoje funkcije $v(x,y), w(x,y)$, $u(x,y)$, tako da

$$v_n(x,y) \rightrightarrows v(x,y), \quad w_n(x,y) \rightrightarrows w(x,y), \quad u_n(x,y) \rightrightarrows u(x,y), \quad n \to \infty,\ (x,y) \in \mathbb{G}.$$

Kako su funkcije v_n, w_n, u_n neprekidne, zbog uniformne konvergencije funkcionalnih redova (13), sledi da su i granične funkcije neprekidne.

Uzimajući limese leve i desne strane u jednačinama sistema (12), zaključujemo da je (v,w,u) neprekidno rešenje sistema integralnih jednačina (6) u oblasti $\mathbb{G}$, odakle sledi da je funkcija u neprekidno diferencijabilno rešenje Košijevog problema (1)–(2).

(IV) Dokaz jedinstvenosti rešenja Košijevog problema (1)–(2): Dovoljno je dokazati jedinstvenost rešenja sistema integralnih jednačina (6).

Pretpostavimo suprotno, da sistem (6) ima dva rešenja (v,w,u) i (v^*,w^*,u^*). Označimo $(V,W,U) = (v-v^*, w-w^*, u-u^*)$. Tada (V,W,U) zadovoljava homogen sistem integralnih jednačina

$$\begin{aligned}
V(x,y) &= -\int_{g(x)}^{y} [aV + bW + cU]\, dy,\\
W(x,y) &= -\int_{h(y)}^{x} [aV + bW + cU]\, dx,\\
U(x,y) &= \int_{g(x)}^{y} W\, dy.
\end{aligned}$$

Funkcije V, W, U su neprekidne kao razlike neprekidnih funkcija, pa na kompaktu $\mathbb{G}$ dostižu maksimalne vrednosti. Prema tome, postoji konstanta $B = \max\limits_{\mathbb{G}}\{|V|,|W|,|U|\}$ tako da je

$$\begin{aligned}
|V(x,y)| &\le \int_{g(x)}^{y} \big[|a|+|b|+|c|\big]\, B\, dy \le K\, B\, (y - g(x))\\
&\le K\, B\, (y-y_0) \le K\, B\, (x+y-x_0-y_0)\,.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
|V(x,y) &\le \int_{g(x)}^{y} \big[|a|\,|V| + |b|\,|W| + |c|\,|U|\big]\, dy\\
&\le K^2\, B \int_{g(x)}^{y} (x+y-x_0-y_0)\, dy \le K^2\, B\, \frac{(x+y-x_0-y_0)^2}{2!},
\end{aligned}$$

tako da se matematičkom indukcijom lako dokazuje

$$|V(x,y)| \le K^n\, B\, \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} \le K^n\, B\, \frac{(\alpha+\beta-x_0-y_0)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Analogno,

$$|W(x,y)| \le K^n\, B\, \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} \le K^n\, B\, \frac{(\alpha+\beta-x_0-y_0)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots\,,$$

$$|U(x,y)| \le K^n\, B\, \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} \le K^n\, B\, \frac{(\alpha+\beta-x_0-y_0)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\ldots\,. \tag{16}$$

Kako

$$\frac{(\alpha+\beta-x_0-y_0)^n}{n!}=\frac{\lambda^n}{n!}\to 0, \quad n\to\infty$$

kao opšti član konvergentnog reda $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{\lambda}$, iz (16) kada $n\to\infty$ sledi da je $|U(x,y)|\equiv 0$ na $\mathbb{G}$, pa je $u(x,y)\equiv u^*(x,y)$ na $\mathbb{G}$. $\boxtimes$

Teorema 2. (Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja Gursaovog problema) *Ako važi*

(i) funkcije $a,b,c,f\in C(\overline{\Pi})$,

(ii) $\psi_1\in C^1([y_0,\beta])$, $\psi_2\in C^1([x_0,\alpha])$ *i* $\psi_1(y_0)=\psi_2(x_0)$

Gursaov problem $(1)-(3)$ *ima jedinstveno rešenje* $u\in C^1(\overline{\Pi})$, $u_{xy}\in C(\overline{\Pi})$.

Dokaz: Uvodjenjem pomoćnih funkcija (4) formira se sistem PDJ prvog reda (5), odnosno odgovarajući sistem integralnih jednačina

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= v(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}[f-av-bw-cu]\,dy \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=y_0}+\int_{y_0}^{y}[f-av-bw-cu]\,dy=\psi_2'(x)+\int_{y_0}^{y}[f-av-bw-cu]\,dy, \\
w(x,y) &= \psi_1'(y)+\int_{x_0}^{x}[f-av-bw-cu]\,dx, \\
u(x,y) &= \psi_2(x)+\int_{y_0}^{y}w\,dy.
\end{aligned}$$

Dalje je dokaz u potpunosti analogan dokazu Teoreme 1. $\boxtimes$