4. PDJ paraboličnog tipa

Homogena jednačine provodjenja toplote:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty),$$

gde je $a^2 \in \mathbb{R}$ konstanta koja se naziva *koeficijent provodljivosti*. Smenom promenljivih $x = ay$ dobija se PDJ

$$\frac{\partial u}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y,t) \tag{1}$$

Zato je dovoljno posmatrati PDJ (1), odnosno pretpostavićemo u daljem radu da je $a = 1$.

Košijev problem jednačine provodjenja toplote: U oblasti

$$D_T = \{(x,t) \,:\, x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T\}$$

odrediti funkciju $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$ koja je rešenje nehomogene jednačine provodjenja toplote

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x,t) \tag{2}$$

ili homogene jednačine provodjenja toplote

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{3}$$

u D_T i koja zadovoljava početni uslov

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Mešoviti problem jednačine provodjenja toplote: U oblasti

$$Q_T = \{(x,t) \,:\, 0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

odrediti funkciju $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ koja je rešenje PDJ (2) u Q_T, a koja zadovoljava granične uslove

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T\,. \tag{5}$$

i početni uslov (4).

Funkcije $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $t \in [0,T]$ i $\varphi(x)$, $x \in [0,l]$ moraju zadovoljavati *uslove saglasnosti početnih i graničnih uslova*:

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \qquad \mu_2(0) = \varphi(l).$$

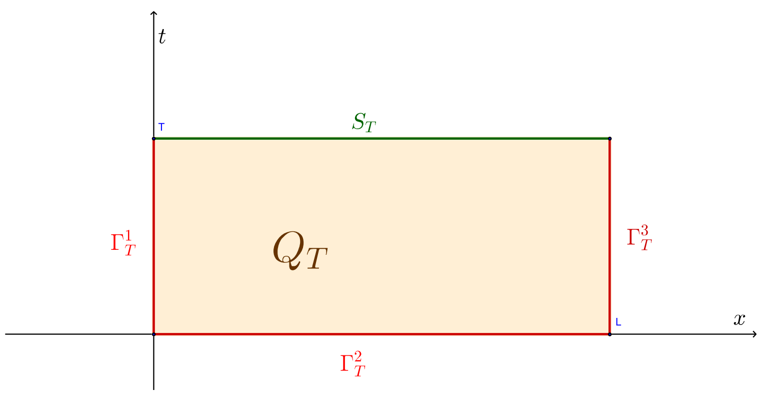
Ako označimo sa

$$\Gamma_T = \{(x,t) \,:\, x = 0,\ 0 \le t \le T\} \cup \{(x,t) \,:\, x = l,\ 0 \le t \le T\} \cup \{(x,t) \,:\, 0 \le x \le l,\ t = 0\}$$

$$S_T = \{(x,t) \,:\, 0 \le x \le l,\ t = T\}$$

granične i početne uslove možemo iskazati kao

$$u(x,t)\Big|_{\Gamma_T} = g(x,t) = \begin{cases} \mu_1(t), & \text{za } x = 0,\ 0 \le t \le T \\ \mu_2(t), & \text{za } x = l,\ 0 \le t \le T \\ \varphi(x), & \text{za } t = 0,\ 0 \le x \le l \end{cases}$$



Ako su $\mu_1(t), \mu_2(t) \in C([0,T])$ i $\varphi(x) \in C([0,l])$, iz uslova saglasnosti početnih i graničnih uslova sledi neprekidnost funkcije $g(x,t)$ na Γ_T. Mešoviti problem jednačine provodjenja toplote može se tada iskazati na sledeći način:

GRANIČNI PROBLEM JEDNAČINE PROVODJENJA TOPLOTE: Odrediti funkciju $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ koja je rešenje PDJ (2) u Q_T, a koja zadovoljava granični uslov

$$u(x,t)\Big|_{\Gamma_T} = g(x,t)\,. \tag{6}$$

4.1. Fundamentalno rešenje jednačine provodjenja toplote

Definicija 1 *Funkcija*

$$K(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

naziva se FUNDAMENTALNO REŠENJE JEDNAČINE PROVODJENJA TOPLOTE.

Lema 1 *1.* $K_t(x,t) - K_{xx}(x,t) = 0$.

2. Za svako $\delta > 0$ *je* $\lim_{t \searrow 0} K(x,t) = 0$ *uniformno na* $\{x \,:\, |x| \ge \delta\}$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dx = 1$.

4. Za svako $\delta > 0$ *je* $\lim_{t \searrow 0} \int_{|x| \ge \delta} K(x,t)dx = 0$.

Dokaz. **(2):** Za $|x| \geq \delta$ je

$$K(x,t) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-\frac{\delta^2}{4t}} \to 0, \quad t \to 0$$

(3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\, t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}dx = \Big|\mu = \frac{x}{2\sqrt{t}}\Big| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}d\mu = 1$$

(4):

$$\int_{|x|\geq\delta} K(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|\mu|\geq\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}d\mu \to 0, \quad t \searrow 0$$

Lema 2 *Neka je $t_0 > 0$. Za svako $(k,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, važi*

$$\Big|\frac{\partial^{m+k}K(x,t)}{\partial x^k \partial t^m}\Big| \leq Ce^{-\frac{x^2}{8t}}, \qquad \text{za svako } (x,t) \in \mathbb{R} \times [t_0,\infty)$$

za neku konstantu C koje zavisi samo od m, k, t_0.

Dokaz. Smenom $s = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ i $y = \dfrac{x}{2\sqrt{t}} = sx$, fundamentalno rešenje postaje

$$K(y,s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, se^{-y^2}, \qquad y \in \mathbb{R},\ 0 < s \leq \frac{1}{2\sqrt{t_0}}\,.$$

Kako je

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = s\frac{\partial K}{\partial y},$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{4t}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\partial K}{\partial s}\right)$$

možemo pisati $\partial_x = s\partial_y$ i $\partial_t = -2s^2(y\partial_y + s\partial_s)$, odnosno

$$\partial_t^m \partial_x^k K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(-2s^2(y\partial_y + s\partial_s)\Big)^m (s\partial_y)^k \Big(se^{-y^2}\Big) = e^{-y^2}P_{km}(y,s)\,,$$

gde je $P_{km}(y,s)$ polinom promenljivih y, s čiji stepeni zavise od k i m. Koristeći da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$|y|^n e^{-y^2/2} \leq 1 \quad \text{za} \quad |y| \leq 1 \qquad \text{i} \qquad |y|^n e^{-y^2/2} \leq 2^n\, n! \quad \text{za} \quad |y| > 1,$$

kao i da je $s \leq 1/\sqrt{4t_0}$, dobija se

$$\Big|\frac{\partial^{m+k}K(x,t)}{\partial x^k \partial t^m}\Big| = \Big|e^{-y^2/2}P_{km}(y,s)e^{-y^2/2}\Big| \leq C(k,m,t_0)e^{-y^2/2}\,. \qquad \square$$

4.2. Košijev problem jednačine provodjenja toplote

Homogena jednačina provodjenja toplote

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
u_t = u_{xx}, & (x,t) \in D = \mathbb{R} \times (0,\infty) \\
 & \\
u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}\,.
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

Tražeći rešenje u obliku $u(x,t) = X(x)T(t)$, razdvajanjem promenljivih dobija se

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad X(x) = c_1(\lambda)\cos\lambda x + c_2(\lambda)\sin\lambda x$$

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}$$

$$u(x,t,\lambda) = e^{-\lambda^2 t}\big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big]$$

Rešenje KP tražimo u obliku

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big]d\lambda. \tag{8}$$

Iz početnog uslova je

$$\varphi(x) = u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big]d\lambda \;\longrightarrow\; \text{Furijeov integral funkcije } \varphi(x)$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi \qquad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi$$

Zamenom u (8) dobija se

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi\right)d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda\right)d\xi
\end{aligned}
$$

Koristeći da je

$$I(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$$

imamo

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)I\big(\sqrt{t},\xi - x\big)d\xi$$

odnosno

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\left(\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}\right)^2}d\xi} \quad \longrightarrow \quad \text{Poasonova formula}$$

Teorema 1 *Neka je $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tj. neka je φ neprekidna, ograničena funkcija na $\mathbb{R}$, odnosno*

$$||\varphi||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| < \infty\,.$$

Tada za funkciju $u(x,t)$ definisanu na D sa

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \tag{9}$$

važi:

(i) $u \in C^\infty(D)$;

(ii) $u(x,t)$ je ograničena na D;

(iii) $u_t = a^2 u_{xx}$ za svako $(x,t) \in D$;

(iv) Za svako $x_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = \varphi(x_0)$.

Dokaz. Neka je $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

(I): Za svako $t_0 > 0$ funkcija $K(x,t)$ je beskonačno puta diferencijabilna po x i po t na $\mathbb{R}\times[t_0,\infty)$. Koristeći Lemu 2 važi

$$\left|\partial_t^m \partial_x^k K(x-\xi,t)\varphi(\xi)\right| \le CM\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{8t}},$$

i kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\xi-x}{\sqrt{8t}}\right)^2} d\xi = \sqrt{8t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\, d\mu = \sqrt{8t\pi}$$

funkcija $e^{-\frac{(\xi-x)^2}{8t}}$ je $\xi-$integrabilna uniformno po (x,t) u nekoj okolini proizvoljne tačke $(x_0,t_0) \in D$. Zbog toga, izraz na desnoj strani u (9) se može diferencirati beskonačno mnogo puta po x i po t pod znakom integrala, $u \in C^\infty(D)$ i

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \tag{10}$$

(II): Prema Lemi 1-(3)

$$|u(x,t)| \le M\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)d\xi = M, \quad (x,t)\in D\,.$$

(III): Koristeći (10) i Lemu 1-(1) dobijamo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_t(x-\xi,t) - K_{xx}(x-\xi,t)\right]\varphi(\xi)d\xi = 0$$

(IV): Da bi pokazali (iv), neka je $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Funkcija $\varphi(x)$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, pa postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da je za svako $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi - x_0| < \delta$ imamo $|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| < \varepsilon/2$. Kako je prema Lemi 1-(3)

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_0)\int_{\xi\in\mathbb{R}} K(x-\xi,t)d\xi \quad \text{i} \quad u(x,t) = \int_{\xi\in\mathbb{R}} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi,$$

imamo

$$\begin{aligned} u(x,t)-\varphi(x_0) &= \int_{\xi\in\mathbb{R}} K(x-\xi,t)(\varphi(\xi)-\varphi(x_0))d\xi \\ &= \int_{|\xi-x_0|\le\delta} K(x-\xi,t)(\varphi(\xi)-\varphi(x_0))d\xi + \int_{|\xi-x_0|>\delta} K(x-\xi,t)(\varphi(\xi)-\varphi(x_0))d\xi\,. \end{aligned}$$

(a) Za $|\xi - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} \int_{|\xi-x_0|\le\delta} K(x-\xi,t)\,|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{|\xi-x_0|\le\delta} K(x-\xi,t)d\xi \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{\xi\in\mathbb{R}} K(x-\xi,t)d\xi = \frac{\varepsilon}{2}\,; \end{aligned}$$

(b) Za $|\xi - x_0| > \delta$: Uzevši $x \in \mathbb{R}$ takvo da je $|x - x_0| < \delta/2$ imamo da je

$$|\xi-x_0| < |\xi-x| + |x-x_0| < |\xi-x| + \delta/2 \le |\xi-x| + \frac{1}{2}|\xi-x_0| \quad\Rightarrow\quad \frac{|\xi-x_0|}{2} < |\xi-x|$$

Tada je

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi-x_0|>\delta} K(x-\xi,t)\,|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi \\ &\qquad\le 2M\int_{|\xi-x_0|>\delta} K(x-\xi,t)d\xi = \frac{M}{\sqrt{\pi\,t}}\int_{|\xi-x_0|>\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi \\ &\qquad\le \frac{M}{\sqrt{\pi\,t}}\int_{|\xi-x_0|>\delta} e^{-\frac{1}{4t}\cdot\left(\frac{\xi-x_0}{2}\right)^2}d\xi \\ &\qquad= \frac{2M}{\sqrt{\pi\,t}}\int_{|\mu|>\delta/2}^{\infty} e^{-\frac{\mu^2}{4t}}d\mu = 4M\int_{|\mu|>\delta/2}^{\infty} K(\mu,t)d\mu\,, \end{aligned}$$

i primenom Leme 1-(4) zaključujemo da

$$\int_{|\xi-x_0|>\delta} K(x-\xi,t)\,|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi \to 0, \quad t\to 0+,$$

pa sledi da postoji $t^\star > 0$ tako da je

$$\int_{|\xi-x_0|>\delta} K(x-\xi,t)\,|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi < \frac{\varepsilon}{2}$$

za svako $t \in (0, t^\star)$ i za svako $x \in \mathbb{R}$ takvo da je $|x - x_0| < \delta/2$.

Prema tome, za svako $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ i $t \in (0, t^\star)$ je $|u(x,t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, odnosno

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = \varphi(x_0). \qquad \square$$

Napomena 2.1 Odredimo integral

$$J(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda.$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
J'(\beta) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\lambda \sin\beta\lambda d\lambda = \frac{e^{-\alpha^2\lambda^2}}{2\alpha^2}\sin\beta\lambda\Big|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} - \frac{\beta}{2\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda \\
&= -\frac{\beta}{2\alpha^2}J(\beta),
\end{aligned}
$$

rešavanjem dobijene DJ dobija se

$$
J(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}
$$

Kako je $J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}d\lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$, konstanta $C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$, tako da je

$$
J(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}\,.
$$

Furijeova transformacija

$$
f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty
$$

Za funkciju $f \in L^1(\mathbb{R})$ Furijeova transformacija se definiše kao funkcija $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data sa

$$
\mathcal{F}[f](y) = \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx,
$$

dok je inverzna Furijeova transformacija funkcije f data sa

$$
\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{ixy}dy\,.
$$

Ako je $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ i ako za svako $x \in \mathbb{R}$ funkcija f ima konačne jednostrane izvode, onda postoje $\mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}^{-1}[f]$, $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]]$, $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ i važi

$$
\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f
$$

Lema 3 *Ako je $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, tada važi*

$$
\mathcal{F}[f'](y) = iy\mathcal{F}[f](y)\,.
$$

Dokaz. Kako je

$$
f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt
$$

i postoji $\lim_{x\to\pm\infty}\int_0^x f'(t)dt$, zaključujemo da postoji i $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Pokažimo da je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Zaita, ako je $L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, $L > 0$, iz činjenice da je $f(x) > L/2$ za dovolno veliko x, integracijom na $[0, \infty)$, dolazimo do kontradikcije sa $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Sada, parcijalnom integracijom se dobija

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(y)=\mathcal{F}[f'](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{\infty}+iy\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx\right]\\ &= iy\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx\right)=iy\mathcal{F}[f](y)=iy\widehat{f}(y)\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Nehomogena jednačina provodjenja toplote

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+F(x,t), & (x,t)\in D=\mathbb{R}\times(0,\infty)\\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\,.\end{cases} \tag{11}$$

Primenom Furijeove transformacije na nehomogenu jednačinu provodjenja toplote dobija se $\widehat{u_t}(\xi,t)=\widehat{u_{\xi\xi}}(\xi,t)+\widehat{F}(\xi,t)$. Primenom Leme 3 na prvi sabirak na desnoj strani prethodne jednakosti ($\widehat{u_{\xi\xi}}(\xi,t)=(i\xi)^2\widehat{u}(\xi,t)$), uzevši u obzir početni uslov, dobija se Košijev problem linearne diferencijalne jednačine prvog reda

$$\frac{d\widehat{u}(\xi,t)}{dt}+\xi^2\widehat{u}(\xi,t)=\widehat{F}(\xi,t), \qquad \widehat{u}(\xi,0)=0\,.$$

čije je rešenje

$$\widehat{u}(\xi,t)=\int_0^t e^{-\xi^2(t-s)}\widehat{F}(\xi,s)ds\,.$$

Rešenje KP (11) dobijamo primenom inverzne Furijeove transformacije

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(\xi,t)e^{ix\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\xi^2(t-s)}\widehat{F}(\xi,s)ds\right)e^{ix\xi}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-\xi^2(t-s)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(y,s)e^{-i\xi y}dy\right)ds\right)e^{ix\xi}d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2(t-s)}e^{i\xi(x-y)}d\xi\right)F(y,s)\,dy\,ds\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2(t-s)}e^{i\xi(x-y)}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2(t-s)}\left[\cos\xi(x-y)+i\sin\xi(x-y)\right]d\xi$$

i zbor neparnosti podintegralne funkcije je $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2(t-s)}\sin\xi(x-y)d\xi=0$, imamo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2(t-s)}e^{i\xi(x-y)}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2(t-s)}\cos\xi(x-y)d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t-s}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} \tag{13}$$

Iz (12) i (13) dobija se konačno

$$\boxed{u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(y,s)}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}}\,dy\,ds}$$

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t-s)F(y,s)\,dy\,ds$$

Definicija 2 *Nosač neprekidne funkcije* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je zatvorenje skupa tačaka u kojima je funkcija različita od nule, odnosno*

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega \,:\, \varphi(x) \neq 0\}}$$

Teorema 2 *Neka je* $F \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ *sa kompaktnim nosačem. Tada za funkciju* $u(x,t)$ *definisanu na* D *sa*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t-s)F(y,s)dyds \tag{14}$$

važi:

(i) $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,\infty))$*;*

(ii) $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + F(x,t)$ *za svako* $(x,t) \in D = \mathbb{R} \times (0,\infty)$*;*

(iii) Za svako $x_0 \in \mathbb{R}$ *je* $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = 0$.

Dokaz. **(I)**: Da bi opravdati diferenciranje pod znakom integrala u (14), uvodimo najpre smenu $Y = x - y$, $S = t - s$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t-s)F(y,s)\,dy\,ds = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(Y,S)F(x-Y,t-S)\,dY\,dS$$

Kako je $F \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ sa kompaktnim nosačem

$$\sup_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} |\partial_x F| = F_1 < \infty, \qquad \sup_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} |\partial_{xx} F| = F_{11} < \infty, \qquad \sup_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} |\partial_t F| = F_2 < \infty,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x\Big(K(y,s)F(x-y,t-s)\Big)\right| &\leq F_1 K(y,s)\\
\left|\partial_{xx}\Big(K(y,s)F(x-y,t-s)\Big)\right| &\leq F_{11} K(y,s)\\
\left|\partial_t\Big(K(y,s)F(x-y,t-s)\Big)\right| &\leq F_2 K(y,s),
\end{aligned}$$

pri čemu je prema Lemi 1-(3)

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)dyds = \int_0^t ds = t.$$

Zato se može diferencirati pod znakom integrala u (14) jednom po t i dva puta po x:

$$\partial_{xx} u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)\partial^2_{xx} F(x-y,t-s)dyds,$$

$$\partial_t u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)\partial_t F(x-y,t-s)dyds + \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)F(x-y,0)dy\,.$$

Dakle, $u \in C^{2,1}(D)$.

(II): Sada je

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_{xx} u &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)(\partial_t - \partial_{xx})F(x-y,t-s)dyds + \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)F(x-y,0)dy \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)(-\partial_s - \partial_{yy})F(x-y,t-s)dyds + \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)F(x-y,0)dy \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Da bi primenili parcijalnu integraciju na prvi integral u (15), kako $K(y,s)$ ima singularitet za $s=0$, interval integracije $[0,t]$ moramo podeliti na intervale $[0,\varepsilon]$ i $[\varepsilon,t]$

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_{xx} u &= \int_0^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)(-\partial_s - \partial_{yy})F(x-y,t-s)dyds \\
&\quad + \int_{\varepsilon}^t \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)(-\partial_s - \partial_{yy})F(x-y,t-s)dyds + \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)F(x-y,0)dy \\
&= J_\varepsilon + I_\varepsilon + \Gamma
\end{aligned}
$$

Najpre, za integral J_ε imamo

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_0^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)(-\partial_s - \partial_{yy})F(x-y,t-s)dyds \right| \\
&\quad \leq \big(F_2 + F_{11}\big) \int_0^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)dyds \leq \big(F_2 + F_{11}\big)\, \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)dy = \big(F_2 + F_{11}\big)\, \varepsilon \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Dalje, za integral I_ε parcijalnom integracijom se dobija

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^t K(y,s)\partial_s F(x-y,t-s)ds \\
&\qquad = K(y,t)F(x-y,0) - K(y,\varepsilon)F(x-y,t-\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^t \partial_s K(y,s)F(x-y,t-s)ds
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)\partial_{yy}F(x-y,t-s)dy \\
&\qquad = K(y,t)\partial_y F(x-y,t-s)\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_y K(y,s)\partial_y F(x-y,t-s)dy \\
&\qquad = -\partial_y K(y,t)F(x-y,t-s)\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{yy} K(y,s)F(x-y,t-s)dy \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{yy} K(y,s)F(x-y,t-s)dy,
\end{aligned}
$$

jer je $\lim_{y\to\pm\infty} F(y,s) = \lim_{y\to\pm\infty} \partial_y F(y,s) = 0$. Dakle,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^t \int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)(-\partial_s - \partial_{yy})F(x-y,t-s)dyds \\
&\qquad = \int_{\varepsilon}^t \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_s - \partial_{yy})K(y,s)F(x-y,t-s)dyds - \int_{-\infty}^{\infty} K(y,t)F(x-y,0)dy \\
&\qquad\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} K(y,\varepsilon)F(x-y,t-\varepsilon)dy \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} K(y,\varepsilon)F(x-y,t-\varepsilon)dy - \Gamma
\end{aligned}
$$

jer je $(\partial_s - \partial_{yy})K(y,s) = 0$. Prema tome,

$$I_\varepsilon + \Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} K(y,\varepsilon)F(x-y,t-\varepsilon)dy\,. \tag{17}$$

Iz (15), (16) i (17) imamo

$$\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_{xx} u &= \lim_{\varepsilon\to 0+}[J_\varepsilon + I_\varepsilon + \Gamma] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} K(y,\varepsilon)F(x-y,t-\varepsilon)dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\varepsilon)F(y,t-\varepsilon)dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\varepsilon)[F(y,t-\varepsilon)-F(y,t)]dy + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\varepsilon)F(y,t)dy. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Kako je prema Teoremi 1-(iv) za svako $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi,$$

istim postupkom može se pokazati da je za svako $x \in \mathbb{R}$ i svako $t \geq 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\varepsilon)F(y,t)dy = F(x,t)\,. \tag{19}$$

Pored toga, prema Lagaranžeovoj teoremi o srednjoj vrednosti je

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\varepsilon)\big|F(y,t-\varepsilon)-F(y,t)\big|dy &\leq \sup_{\mathbb{R}\times[0,\infty)}|\partial_t F|\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\varepsilon)\,\varepsilon dy \\
&= F_2\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\ . \qquad (20)
\end{aligned}$$

Dakle, iz (18), (19) i (20), konačno se dobija $\partial_t u - \partial_{xx} u = F(x,t)$, što je i trebalo pokazati.

(III): Da bi pokazali da za svako $x \in \mathbb{R}$ rešenje $u(x,t)$ teži nuli kada $t \to 0+$ imamo

$$\begin{aligned}
||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq ||F||_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,t^*])}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} K(y,s)dyds \\
&= C\int_0^t ds = Ct \to 0, \quad t\to 0+ \quad \Rightarrow \quad u(x,t)\to 0, \quad t \to 0+\ . \quad \square
\end{aligned}$$

Rešenje KP nehomogene jednačine provodjenja toplote sa nehomogenim početnim uslovom

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t), & (x,t) \in D = \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{21}$$

je oblika $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, gde je $v(x,t)$ rešenje KP homogene jednačine provodjenja toplote (7), a $w(x,y)$ je rešenje KP (11) nehomogene jednačine provodjenja toplote sa homogenim početnim uslovom. Dobija se

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\eta,t-s)F(\eta,s)\,d\eta\,ds$$

4.3. Jedinstvenost i stabilnost rešenja mešovitog problema nehomogene jednačine provodjenja toplote

4.3.1. Princip maksimuma za ograničenu oblast

Teorema 3 *Neka je* $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$.

(i) Ako je $u_t - u_{xx} \leq 0$ *na* $Q_T \cup S_T$*, tada je* $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \max\limits_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t)$.

(ii) Ako je $u_t - u_{xx} \geq 0$ *na* $Q_T \cup S_T$*, tada je* $\min\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \min\limits_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t)$.

Dokaz. **(I):** Neka je $u_t - u_{xx} \leq 0$ na $Q_T \cup S_T$ i

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t), \qquad m = \max_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t).$$

Pretpostavimo suprotno da je $m < M$. Tada funkcija $u(x,t)$ dostiže svoj maksimum na $\overline{Q_T}$ u tački $(x_0,t_0) \in Q_T \cup S_T$. Posmatrajmo funkciju

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{4l^2}(x-x_0)^2\,.$$

Pre svega, tada je

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{M-m}{2l^2}\right)\\ &\leq -\frac{M-m}{2l^2} < 0, \quad \text{za svako } (x,t)\in Q_T\cup S_T \end{aligned} \tag{22}$$

Osim toga, kako je $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M$, imamo da je $\max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} v(x,t) \geq M$. Pored toga, za $(x,t) \in \Gamma_T$ je

$$v(x,t) \leq \max_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t) + \frac{M-m}{4l^2}\,l^2 \leq m + \frac{M-m}{4} = \frac{3m}{4} + \frac{M}{4} < \frac{3M}{4} + \frac{M}{4} = M,$$

pa je $v(x,t)\Big|_{\Gamma_T} < M$. Dakle, funkcija $v(x,t)$ ne dostiže svoju maksimalnu vrednost u $\overline{Q_T}$ na Γ_T, već u tački $(x_1,t_1) \in Q_T \cup S_T$. Tada je

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1,t_1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1,t_1) \geq 0,$$

što je u kontradikciji sa (22). Prema tome, $m = M$. □

Teorema 4 (Princip maksimuma za ograničenu oblast) *Neka je* $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ *rešenje homogene jednačine provodjenja toplote (3). Tada je*

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t), \qquad \min_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \min_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t)\,.$$

Posledica 1 *Ako su $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ rešenja jednačine (2) na $Q_T \cup S_T$ i ako je $u \le v$ na Γ_T, onda je $u \le v$ na $\overline{Q_T}$.*

Dokaz. Funkcija $u - v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ je rešenja jednačine (3) na $Q_T \cup S_T$. Prema Teoremi 4 je

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q_T}}(u(x,t) - v(x,t)) = \max_{(x,t)\in\Gamma_T}(u(x,t) - v(x,t)) \le 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) - v(x,t) \le 0 \text{ na } \overline{Q_T}. \quad \square$$

4.3.2. Jedinstvenost i stabilnost rešenja mešovitog problema (23)

Teorema 5 (Teorema jedinstvenosti rešenja) *Neka je $F \in C(\overline{Q_T})$, $g \in C(\Gamma_T)$. Tada granični problem*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t), & (x,t) \in \overline{Q_T} \cup S_T \\ u(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in \Gamma_T\,. \end{cases} \tag{23}$$

ne može imati više od jednog rešenja u klasi funkcija $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da postoje dva rešenja $u_1, u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ graničnog problema (23). Tada je $u = u_1 - u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ rešenje homogene jednačine provodjenja toplote (3) koje zadovoljava granični uslov $u(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0$. Tada prema Teoremi 3 je

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t) = 0, \qquad \min_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \min_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t) = 0$$

odakle je $u(x,t) \equiv 0$ na $\overline{Q_T}$, odnosno $u_1 \equiv u_2$ na $\overline{Q_T}$. $\square$

Teorema 6 (Teorema stabilnosti rešenja) *Neka je $F \in C(\overline{Q_T})$, g_1, $g_2 \in C(\Gamma_T)$ i neka su $u_1, u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ rešenja jednačine (2) koja zadovoljavaju granični uslov $u_i(x,t)\big|_{\Gamma_T} = g_i(x,t)$, $i = 1, 2$. Ako je*

$$|g_1(x,t) - g_2(x,t)| < \varepsilon, \quad (x,t) \in \Gamma_T$$

onda je

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{Q_T}.$$

Dokaz. Funkcija $v = u_1 - u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ je rešenje homogene jednačine provodjenja toplote (3) koje zadovoljava granični uslov $v(x,t)\big|_{\Gamma_T} = g_1(x,t) - g_2(x,t)$. Kako je funkcija $w(x,t) = \varepsilon$, $(x,t) \in \overline{Q_T}$ očigledno rešenje jednačine (3) i

$$|v(x,t)| = |g_1(x,t) - g_2(x,t)| < \varepsilon = w(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T,$$

prema Posledici 1 je

$$|v(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon \text{ na } \overline{Q_T}. \quad \square$$

4.4. Jedinstvenost rešenja Košijevog problema nehomogene jednačine provodjenja toplote

4.4.1. Princip maksimuma za neograničenu oblast

Teorema 7 *Neka je $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$ ograničeno rešenje homogene jednačine provodjenja toplote (3). Tada je*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} u(x,0)\,. \tag{24}$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, $M = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{D_T}} u(x,t)$ i $m = \sup_{x\in\mathbb{R}} u(x,0)$. Pretpostavimo suprotno, da je $m < M$. Definišimo na $\overline{D_T}$ funkciju

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(x^2 + 2t)$$

Kako je $v_t = u_t - 2\varepsilon$, $v_{xx} = u_{xx} - 2\varepsilon$, funkciju $v(x,t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$ je rešenje jednačine (3) na D_T. Oblast $\overline{D_T}$ se može razbiti na dve disjunktne podoblasti

$$D_T^1 = \left\{(x,t)\ :\ x^2 \geq \frac{M-m}{\varepsilon},\ 0 \leq t \leq T\right\}, \quad D_T^2 = \left\{(x,t)\ :\ x^2 < \frac{M-m}{\varepsilon},\ 0 \leq t \leq T\right\}$$

(i) Za svako $(x,t) \in D_T^1$ je

$$v(x,t) \leq M - \varepsilon\, x^2 \leq M - \varepsilon\,\frac{M-m}{\varepsilon} = m\,.$$

(ii) Za $(x,t) \in D_T^2$, kako je D_T^2 ograničena oblast može se primeniti Teorema 3, pa je

$$\max_{(x,t)\in\overline{D_T^2}} v(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_T^2} v(x,t)\,, \tag{25}$$

gde je

$$\Gamma_T^2 = \left\{(x,t)\ :\ x = -\sqrt{\frac{M-m}{\varepsilon}},\ 0 \leq t \leq T\right\} \cup \left\{(x,t)\ :\ x = \sqrt{\frac{M-m}{\varepsilon}},\ 0 \leq t \leq T\right\}$$
$$\cup \left\{(x,t)\ :\ |x| \leq \sqrt{\frac{M-m}{\varepsilon}},\ t = 0\right\}.$$

Za svako $x \in \mathbb{R}$ je

$$v(x,0) = u(x,0) - \varepsilon\, x^2 \leq u(x,0) \leq m\,,$$

pa vrednost funkcije $v(x,t)$ na $x-$osi nije veća od m, te je takva i na segmentu $\left[-\sqrt{\frac{M-m}{\varepsilon}}, \sqrt{\frac{M-m}{\varepsilon}}\right]$.
Za $x = \pm\sqrt{\frac{M-m}{\varepsilon}}$, $t \in [0,T]$ imamo

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\,\frac{M-m}{\varepsilon} - 2\varepsilon\, t^2 \leq M - M + m = m\,.$$

Dakle, $\max_{(x,t)\in\Gamma_T^2} v(x,t) \le m$, odnosno prema (25) je $\max_{(x,t)\in\overline{D_T^2}} v(x,t) \le m$.

Prema tome, $\max_{(x,t)\in\overline{D_T}} v(x,t) \le m$, odakle je

$$u(x,t) = v(x,t) + \varepsilon(x^2+2t) \le m + \varepsilon(x^2+2t), \quad (x,t) \in \overline{D_T}.$$

Kada $\varepsilon \to 0$ imamo da je $u(x,t) \le m$ na $\overline{D_T}$, što je suprotno pretpostavci da je $m < M = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{D_T}} u(x,t)$. $\square$

Uslov ograničenosti rešenja na D_T je previše strog sa stanovišta primena. Može se pokazati princip maksimuma za neograničenu oblast pod opštijim uslovom.

Teorema 8 *Neka je $u \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$ rešenje homogene jednačine provodjenja toplote (3) takvo da postoje pozitivne konstante C, α da je*

$$u(x,t) \le Ce^{\alpha x^2}, \quad (x,t) \in \overline{D_T}\,. \tag{26}$$

Tada važi (24).

Dokaz. Bez gubitka opštosti može se pretpostaviti da je $4\alpha T < 1$, jer ako to ne važi, segment $[0,T]$ može se podeliti na podsegmente dužine $\tau < 1/4\alpha$, a zatim dokazati tvrdjenje da je

$$|u(x,t)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} u(x,k\tau) \le \sup_{x\in\mathbb{R}} u(x,0), \quad \text{za } k\tau \le t \le (k+1)\tau,\ k = 0,1,\ldots,\frac{T}{\tau}$$

Pretpostavljajući da je $4\alpha T < 1$, postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $4\alpha(T+\varepsilon) < 1$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ fiksirano i $\mu > 0$. Definišimo funkciju

$$V_\mu(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{2\sqrt{\pi(T+\varepsilon-t)}} e^{\frac{(x-x_0)^2}{4(T+\varepsilon-t)}}\,.$$

Tada je

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 V_\mu}{\partial x^2}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,T]\,.$$

Za $\rho > 0$ neka je

$$D_{T,\rho} = \{(x,t)\,:\,|x-x_0| < \rho,\ 0 < t \le T\}\,.$$

Primenom Teoreme 4 za ograničenu oblast $D_{T,\rho}$, zaključujemo da je

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}_{T,\rho}} V_\mu(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_{T,\rho}} V_\mu(x,t)\,, \tag{27}$$

Pokazaćemo da je $\max_{(x,t)\in\Gamma_{T,\rho}} V_\mu(x,t) \le m = \sup_{x\in\mathbb{R}} u(x,0)$.

(i) Za $t = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je

$$V_\mu(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{2\sqrt{\pi(T+\varepsilon)}} e^{\frac{(x-x_0)^2}{4(T+\varepsilon)}} \le u(x,0) \le m\,.$$

(ii) Za $x = x_0 \pm \rho$, $t \in [0,T]$ imamo

$$V_\mu(x,t) \le Ce^{\alpha x^2} - \frac{\mu}{2\sqrt{\pi(T+\varepsilon-t)}} e^{\frac{\rho^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \le Ce^{\alpha(x_0\pm\rho)^2} - \frac{\mu}{2\sqrt{\pi(T+\varepsilon)}} e^{\frac{\rho^2}{4(T+\varepsilon)}}\,.$$

Kako je $4\alpha(T+\varepsilon)<1$, biće $\frac{1}{4(T+\varepsilon)}=\alpha+\beta$ za neko $\beta>0$. Prema tome, kako funkcija $e^{(\alpha+\beta)\rho^2}$ raste brže od funkcije $e^{\alpha\,(x_0\pm\rho)^2}$ biće

$$V_\mu(x,t)\le Ce^{\alpha\,(x_0\pm\rho)^2}-\mu\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\pi}}e^{(\alpha+\beta)\rho^2}<0\le m,$$

za svako $\rho>\rho_0(\mu)$, $\rho_0(\mu)$ dovoljno veliko.

Dakle, $V_\mu(x,t)\le m=\sup_{x\in\mathbb{R}}u(x,0)$, za $(x,t)\in\Gamma_{T,\rho}$, odnosno prema (27) je $V_\mu(x,t)\le m$ za svako $(x,t)\in\overline{D}_{T,\rho}$. Tada je za svako $x_0\in\mathbb{R}$

$$u(x_0,t)-\frac{\mu}{2\sqrt{\pi(T+\varepsilon-t)}}=V_\mu(x_0,t)\le m=\sup_{x\in\mathbb{R}}u(x,0)\,.$$

Kada $\mu\to 0$, dobija se $u(x_0,t)\le m$ za svako $x_0\in\mathbb{R}$ i $t\in[0,T]$ sve dok $T<1/(4\alpha)$. $\square$

4.4.2. Jedinstvenost rešenja Košijevog problema

Analogno teoremi jedinstvenosti rešenja mešovitog problema, koristeći Princip maksimuma za neograničenu oblast (Teorema 7) može se pokazati:

Teorema 9 (Teorema jedinstvenosti rešenja) *Neka je $F\in C(\overline{Q_T})$, $\varphi\in C(\mathbb{R})$. Tada granični problem*

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t=u_{xx}+F(x,t), & (x,t)\in D_T=\mathbb{R}\times(0,T)\\[2ex] u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\,. \end{array}\right. \tag{28}$$

ne može imati više od jednog rešenja u klasi ograničenih funkcija $u\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q_T})$.

Koristeći Teoremu 8) može se pokazati i jači rezultat, odnosno jedinstvenost rešenja za širu klasu funkcija.

Teorema 10 (Teorema jedinstvenosti rešenja) *Neka je $F\in C(\overline{D_T})$, $\varphi\in C(\mathbb{R})$. Tada Košijev problem (28) ne može imati više od jednog rešenja u klasi funkcija $u\in C^{2,1}(D_T)\cap C(\overline{D_T})$ koje zadovoljavaju uslov (26).*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da postoje dva rešenja $u_1,u_2\in C^{2,1}(D_T)\cap C(\overline{D_T})$ Košijevog problema (28) koje zadovoljava uslov

$$|u_i(x,t)|\le C_ie^{\alpha_i\,x^2},\quad (x,t)\in\overline{D_T},\ i=1,2.$$

Tada je $u=u_1-u_2\in C^{2,1}(D_T)\cap C(\overline{D_T})$ rešenje homogene jednačine provodjenja toplote (3) koje zadovoljava početni uslov $u(x,0)=0$ i

$$|u(x,t)|\le|u_1(x,t)|+|u_2(x,t)|\le 2Ce^{\alpha\,x^2},\quad (x,t)\in\overline{D_T},$$

gde je $C=\max(C_1,C_2)$ i $\alpha=\max(\alpha_1,\alpha_2)$. Tada prema Teoremi 8 je

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]}u(x,t)=\sup_{x\in\mathbb{R}}u(x,0)=0$$

odakle je $u(x,t)=0$ na $\mathbb{R}\times[0,T]$, odnosno $u_1=u_2$ na $\mathbb{R}\times[0,T]$. $\square$