5. PDJ eliptičnog tipa

U ovoj glavi mi ćemo se uglavnom baviti rešavanjem, egzistencijom i jedinstvenosti rešenja graničnih problema Laplasove PDJ

$$\Delta u = 0,$$

nepoznate funkcije $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, gde je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

i sa njom povezanom Poasonove PDJ $\Delta u = f$.

Definicija 1 *Funkcija $u \in C^2(D)$ za koju važi $\Delta u = 0$ naziva se* HARMONIJSKA FUNKCIJA. *Funkcija $u \in C^2(D)$ za koju važi $\Delta u \geq 0$ naziva se* **podharmonijska funkcija**. *Funkcija $u \in C^2(D)$ za koju važi $\Delta u \leq 0$ naziva se* **nadharmonijska funkcija**.

U zavisnosti od oblasti definisanosti funkcije u često je pogodnije izraziti Laplasov operator u nekom drugom sistemu koordinata.

Ako funkcija u zavisi samo od rastojanja tačke $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ od koordinatnog početka n-dimenzionalnog Euklidovog prostora, odnosno ako je funkcija $u = u(r) = u\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\big)$, tada je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{du}{dr}\frac{x_i}{r},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{d^2u}{dr^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial x_i}\Big)^2 + \frac{du}{dr}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{x_i}{r}\Big) = \frac{d^2u}{dr^2}\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\Big(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\Big),
\end{aligned}$$

te Laplasov operator dobija jednostavniji oblik

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{x_i^2}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2} + \Big(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\Big)\frac{dy}{dr}\Big] = \frac{d^2u}{dr^2} + (n-1)\frac{du}{dr}. \tag{1}$$

LAPLASOV OPERATOR U POLARNIM KOORDINATAMA: Za izražavanje Laplasovog operatora $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ u sistemu polarnih koordinata r, φ, pri čemu je

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi, \quad 0 < r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

odnosno, $r^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, je

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2},\\
&\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{r}\Big) = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2xy}{r^4}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4},
\end{aligned}$$

tako da je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\\
&= \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi} + \frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \Big(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\Big)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \varphi},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \varphi} + \frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \Big(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\Big)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.
\end{aligned}
$$

Zamenom drugih parcijalnih izvoda izražava se Laplasov operator u polarnim koordinatama

(2)
$$
\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.
$$

U nastavku, ako nije drugačije naznačeno $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ uvek označava ograničen otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Za ograničen otvoren skup $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2)$ ili $(n = 3)$, oznaka $D \in \widetilde{C}^1$ znači da je granica $\Gamma = \partial D$ po delovima glatka (tj. po delovima klase C^1) kriva (za $n = 2$), odnosno površ (za $n = 3$).

5.1. Fundamentalno rešenje Laplasove jednačine

Odredimo rešenje Laplasove jednačine koje zavisi samo od

$$
r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.
$$

Neka je, dakle, $u = u(r)$. Na osnovu relacije (1) dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$
u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = 0.
$$

Ona ima opšte rešenje

$$
u(r) = C_1 \int \frac{dr}{r^{n-1}} + C_2.
$$

Za $C_1 = -\dfrac{1}{\omega_n}$, $C_2 = 0$, gde je ω_n površina jedinične n–dimenzionalne sfere $(n \geq 3)$, odnosno obim jedinične kružnice $(n = 2)$:

$$
\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 2\pi, \ \ \omega_3 = 4\pi\,,
$$

dobijeno partikularno rešenje označimo sa E_n. Prema tome,

(3)
$$
E_n(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ \ln\dfrac{1}{r}, & n = 2\\[2mm] \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases}
$$

E_n se naziva FUNDAMENTALNO REŠENJE Laplasove jednačine.

Za $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, očito je $E_n(|x-y|) = E_n(|y-x|)$, a zbog $\Delta_x E_n(|x|) = 0$, sledi da je

$$
\Delta_x E_n(|x-y|) = \Delta_y E_n(|x-y|) = 0.
$$

Takodje,

(4)
$$
E_n'(r) = -\frac{1}{\omega_n}\frac{1}{r^{n-1}}\,.
$$

5.2. Teorema o divergenciji. Grinova formula.

Sa $\int_D f(x)\,dx$, gde je $dx = dx_1 \dots dx_n$, označen je dvojni (za $n=2$), odnosno trojni (za $n=3$) integral, a sa $\int_\Gamma f(x)\,dS_x$ krivolinijski (za $n=2$), odnosno površinski (za $n=3$) integral prve vrste za funkciju f.

- Za vektorsku funkciju $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, takvu da je $f_i \in C^1(\overline{D})$, $(i = 1, \dots, n)$, DIVERGENCIJA VEKTORSKOG POLJA f je broj:

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)$$

- Za funkciju $g = g(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, takvu da je $g \in C^1(\overline{D})$, $(i = 1, \dots, n)$, GRADIJENT FUNKCIJE g je vektor:

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \right)^T .$$

- Za $u \in C^1(\overline{D})$ definišimo

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x) \cdot n(x)\,,$$

što predstavlja izvod duž spoljašnje normale n u tački $x \in \Gamma$.

Primetimo da je

$$\operatorname{div}\Big(\nabla u(x)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\right) = \Delta u(x)\,.$$

Teorema 1 (TEOREMA O DIVERGENCIJI). *Za vektorsku funkciju $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, takvu da je $f_i \in C^1(\overline{D})$, $(i = 1, \dots, n)$ važi*

$$\int_D \operatorname{div} f(x)\,dx = \int_\Gamma f(x) \cdot n(x)\,dS,$$

gde je $n = n(x)$ jedinična spoljašnja normala u tački $x \in \Gamma$, površi (krive) Γ, dok $f \cdot n$ predstavlja skalarni proizvod vektora f i n.

Teorema 2 (PRVA GRINOVA FORMULA) *Neka je $D \in \widetilde{C}^1$. Za funkcije $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $v \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$ važi*

$$\int_D \Delta u\, v\,dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla v\,dx\,.$$

DOKAZ. Sabiranjem relacija

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v\right) - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n),$$

dobijamo

$$\Delta u v = \mathrm{div}(v \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla v,$$

odakle

$$\int_D \Delta u v \, dx = \int_D \mathrm{div}\,(v \nabla u)\, dx - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \tag{5}$$

Primena teoreme o divergenciji daje

$$\int_D \mathrm{div}\,(v \nabla u)\, dx = \int_\Gamma v \nabla u \cdot n \, dS = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS.$$

pa iz (60) dobijamo prvu Grinovu formulu. ■

Teorema 3 (Druga Grinova formula) *Neka je $D \in \widetilde{C}^1$. Za funkcije $u, v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ važi*

$$\int_D (\Delta u \, v - u \, \Delta v)\, dx = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS\,.$$

Dokaz.

$$\int_D \Delta u \, v \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$\int_D \Delta v \, u \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} u \, dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$\Downarrow$$

$$\int_D (\Delta u \, v - u \, \Delta v)\, dx = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS\,. \quad ■$$

Sledeća teorema je posledica druge Grinove formule.

Teorema 4 (i) *Ako su $u, v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ harmonijske funkcije, tada je*

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = 0, \tag{6}$$

gde je $D \in \widetilde{C}^1$.

(ii) *Ako je $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ harmonijska funkcija, tada je*

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0, \tag{7}$$

gde je $D \in \widetilde{C}^1$.

Napomena 1. (7) se dobija iz (6) za $v \equiv 1$.

5.3. Dirihleov i Nojmanov granični problem

Dirihleov granični problem Laplasove jednačine: Naći funkciju $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ koja za datu funkiju $g \in C(\partial D)$, zadovoljava jednačinu (8) i granični uslov (9):

$$\Delta u = 0 \quad \text{u} \quad D \tag{8}$$
$$u = g \quad \text{na} \quad \partial D, \tag{9}$$

Dirihleov granični problem Poasonove jednačine: Naći funkciju $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ koja za date funkije $G \in C(D)$, $g \in C(\partial D)$, zadovoljava jednačinu (10) i granični uslov (11):

$$\Delta u = G \quad \text{u} \quad D \tag{10}$$
$$u = g \quad \text{na} \quad \partial D. \tag{11}$$

Nojmanov granični problem Laplasove jednačine: Naći funkciju $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ koja za datu funkiju $h \in C^1(\partial D)$, zadovoljava jednačinu (12) i granični uslov (13):

$$\Delta u = 0 \quad \text{u} \quad D \tag{12}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{na} \quad \partial D \tag{13}$$

Nojmanov granični problem Poasonove jednačine: Naći funkciju $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ koja za date funkije $H \in C(D)$, $h \in C^1(\partial D)$, zadovoljava jednačinu (14) i granični uslov (15):

$$\Delta u = H \quad \text{u} \quad D \tag{14}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{na} \quad \partial D. \tag{15}$$

Za Nojmanov granični problem Poasonove jednačine mora važiti **uslov saglasnosti**:

$$\begin{aligned}\int_D H(y)dy &= \int_D \Delta u(y)dy = \int_D \operatorname{div}(\nabla u(y))dy = \int_{\partial D} \nabla u(y)\cdot n(y)\, dS_y \\ &= \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}(y)dS_y = \int_{\partial D} h(y)dS_y\end{aligned}$$

Teorema 5 *Ako postoji rešenje $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ Nojmanovog graničnog problema Poasonove jednačine* (14)-(15)*, onda je*

$$\int_D H(y)dy = \int_{\partial D} h(y)dS_y\,.$$

Ako postoji rešenje $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ Nojmanovog graničnog problema Laplasove jednačine (12)-(13)*, onda je*

$$\int_{\partial D} h(y)\, dS_y = 0.$$

5.3.1. Jedinstvenost rešenja Dirihleovog i Nojmanovog graničnog problema

Teorema 6 *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ povezan, otvoren, ograničen skup takav da $D \in \widetilde{C}^1$ i neka je $G \in C(D)$, $g \in C(\partial D)$. Dirihleov problem za Poasonovu jednačinu* (10)-(11)*, može imati najviše jedno rešenje u klasi funkcija $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.*

Dokaz. Neka su u_1, $u_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ rešenja Dirihleovog problema (10)-(11). Tada je funkcija $v = u_1 - u_2$ rešenje homogenog graničnog problema

$$\begin{aligned} \Delta v = 0 \quad & \text{u} \quad D \\ v = 0 \quad & \text{na} \quad \Gamma = \partial D. \end{aligned}$$

Primenjujući prvu Grinovu formulu (Teorema 2), kako je $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$ na Γ, imamo

$$\int_D v \, \Delta v \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} \, dS - \int_D |\nabla v|^2 \, dx,$$

odakle

$$\int_D |\nabla v|^2 \, dx = 0. \tag{16}$$

Prema tome, sledi da je $\nabla v = 0$ u D, odakle zbog povezanosti skupa D zaključujemo da je $v \equiv C$ u $\overline{D}$. Medjutim, kako je $v = 0$ na ∂D, biće $v \equiv 0$, tj. $u_1 \equiv u_2$ u $\overline{D}$. ■

Napomenimo da će u Poglavlju 5.4.4. (Teorema 16) biti pokazana jedinstvenost rešenja Dirihleovog graničnog problema za širu klasu funkcija $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$.

Teorema 7 *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ povezan, otvoren, ograničen skup takav da $D \in \widetilde{C}^1$ i neka je $H \in C(D)$, $h \in C(\partial D)$. Rešenje Nojmanovog graničnog problem za Poasonovu jednačinu* (14)-(15)*, u klasi funkcija $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, jedinstveno je do na aditivnu konstantu.*

Dokaz. Ako su u_1, u_2 dva rešenja Nojmanovog graničnog problema (14)-(15), tada je $v = u_1 - u_2$ rešenje problema

$$\begin{aligned} \Delta v = 0 \quad & \text{u} \quad D^+ \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad & \text{na} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

Primenjujući prvu Grinovu formulu dobija se (16). Zbog povezanosti skupa D zaključujemo da je $v \equiv C$ u D, tj. $u_1 - u_2 \equiv C$ u $\overline{D}$. ■

5.4. Harmonijske funkcije

5.4.1. Integralna reprezentacija harmonijske funkcije

Lema 1 *Ako je $x \in D$, $y \in \Gamma = \partial D$ i $n(y)$ spoljašnja normala u tački y na Γ, za fundamentalno rešenje važi*

$$\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) = \frac{x-y}{\omega_n |x-y|^n} \cdot n(y). \tag{17}$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) = \nabla_y E_n(|x-y|) \cdot n(y), \tag{18}$$

gde je $\nabla_y f(x,y)$ gradijent fukcije $f(x,y)$ po promenljivoj y

$$\nabla_y f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x,y), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}(x,y) \right)^T.$$

No, $\nabla_y E_n(|x-y|) = E_n'(|x-y|)\nabla_y\big(|x-y|\big)$. Kako je

$$\frac{\partial}{\partial y_i}|x-y| = \frac{y_i - x_i}{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}},$$

to je

$$\nabla_y\big(|x-y|\big) = \frac{1}{|x-y|}(y-x).$$

Iz relacije (4) sledi da je

$$\nabla_y E_n(|x-y|) = -\frac{1}{\omega_n\,|x-y|^{n-1}}\,\frac{1}{|x-y|}(y-x) = \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}(x-y),$$

odakle prema (18) sledi tvrđenje. ■

Sledeća važna teorema pokazuje jednu od osnovnih osobina harmonijskih funkcija, a to je da je vrednost svake harmonijske funkcije u unutrašnjosti oblasti određena njenom vrednošću na granici.

Teorema 8 (Integralna reprezentacija harmonijske funkcije.) *Neka je $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ harmonijska funkcija, gde je $D \in \widetilde{C}^1$. Tada važi integralna reprezentacija*

$$u(x) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|) - u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) \right) dS_y, \quad x \in D. \tag{19}$$

Dokaz. Neka je $x \in D$ proizvoljno. Neka je $\varepsilon > 0$ takvo da $\overline{K(x,\varepsilon)} \subset D$, gde $K(x,\varepsilon)$ označava kuglu (krug) sa centrom u x, poluprečnika ε. Primenom (6) na harmonijske funkcije $u = u(y)$ i $y \mapsto E_n(|x-y|)$ u oblasti $D_\varepsilon = D \setminus \overline{K}(x,\varepsilon)$, imamo

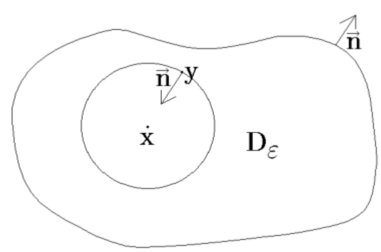
$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|) - u(y) \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) \right) dS_y$$
$$+ \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|) - u(y) \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) \right) dS_y = 0.$$

odnosno

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|) - u(y) \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) \right) dS_y \\ &= \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \left(u(y) \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) - \frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|) \right) dS_y. \end{aligned} \tag{20}$$

Primetimo da je $n(y)$ u drugom integralu zapravo unutrašnja normala na $\partial K(x,\varepsilon)$ u tački y (videti sl. 1), dok oznakom dS_y želimo naglasiti da se integracija vrši po $y \in \Gamma \cup \partial K(x,\varepsilon)$. Primenom teoreme o divergenciji, koristeći relaciju $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, imamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|)\, dS_y &= E_n(\varepsilon) \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y)\, dS_y \\ &= E_n(\varepsilon) \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \nabla u(y) \cdot n(y)\, dS_y = -E_n(\varepsilon) \int_{K(x,\varepsilon)} \operatorname{div}(\nabla u(y))\, dy \\ &= -E_n(\varepsilon) \int_{K(x,\varepsilon)} \Delta u(y)\, dy = 0. \end{aligned} \tag{21}$$



Slika 1: Integralna reprezentacija harmonijske funkcije

Kako je za $y \in \partial K(x,\varepsilon)$, $n(y) = \dfrac{x-y}{|x-y|}$ (unutrašnja normala na kružnicu $\partial K(x,\varepsilon)$), to na osnovu Leme (1) imamo

$$\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x-y|^n}(x-y) \cdot \frac{1}{|x-y|}(x-y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} = \frac{1}{S_n^\varepsilon}.$$

Primetimo da $S_n^\varepsilon = \omega_n \varepsilon^{n-1}$ predstavlja obim kružnice $\partial K(x,\varepsilon)$ za $n = 2$, odnosno površinu sfere $\partial K(x,\varepsilon)$ za $n \geq 3$, tj.

$$S_n^\varepsilon = \begin{cases} 2\varepsilon\pi, & n = 2 \\ 4\varepsilon^2\pi, & n = 3 \end{cases},$$

kao i da je $S_n^\varepsilon = \displaystyle\int_{\partial K(x,\varepsilon)} dS_y$ Dakle,

$$\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\,dS_y = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\,dS_y.$$

Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti integrala sledi da je

$$\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\,dS_y = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\,dS_y = \frac{u(y_\varepsilon)}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}\int_{\partial K(x,\varepsilon)} dS_y = u(y_\varepsilon) \tag{22}$$

za neko $y_\varepsilon \in \partial K(x,\varepsilon)$. Kako $y_\varepsilon \to x$ kad $\varepsilon \to 0+$, zbog neprekidnosti funkcije u sledi da $u(y_\varepsilon) \to u(x)$. Prema tome, kada $\varepsilon \to 0+$ u (22), na osnovu (20) i (21), zaključujemo da je

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)E_n(|x-y|) - u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\right) dS_y - u(x) = 0,$$

što je i trebalo dokazati. ■

Teorema 9 *Neka je $D \in \widetilde{C}^1$.*
(i) Ako za funkciju $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ važi $\Delta u(x) \geq 0$ za svako $x \in D$, tada važi

$$u(x) \leq \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)E_n(|x-y|) - u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\right) dS_y, \quad x \in D. \tag{23}$$

(ii) Ako za funkciju $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ važi $\Delta u(x) \leq 0$ za svako $x \in D$, tada važi

$$u(x) \geq \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)E_n(|x-y|) - u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\right) dS_y, \quad x \in D.$$

Dokaz. Kako je $E_n(\varepsilon) > 0$ za $\varepsilon \in (0,1)$ (videti (3)), prema (21) je

$$\int_{\partial K(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y)E_n(|x-y|)\,dS_y = -E_n(\varepsilon)\int_{K(x,\varepsilon)} \Delta u(y)\,dy \leq 0\,,$$

što zajedno sa (20) i (22), daje

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)E_n(|x-y|) - u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\right) dS_y \geq u(y_\varepsilon)\,, \quad y_\varepsilon \in \partial K(x,\varepsilon)$$

odakle kada $\varepsilon \to 0+$ dobijamo (23). ■

5.4.2. Teorema o srednjoj vrednosti za harmonijske funkcije

Vrlo značajno svojstvo hamonijske funkcije je svojstvo srednje vrednosti, prema kome je srednja vrednost harmonijske funkcije na kružnici (sferi) $\partial K(x,R)$, kao i srednja vrednost harmonijske funkcije na krugu (lopti) $K(x,R)$, jednaka je $u(x)$, tj. njenoj vrednosti u centru kružnice (sfere). Ovo je svojstvo koje karakteriše harmonijske funkcije, naime pokazaćemo da važi i obrat, da ako neka funkcije ima svojstvo srednje vrednosti, onda ona mora biti harmonijska.

Teorema 10 (Teorema o srednjoj vrednosti) *Neka je* $u \in C^2(D)$ *harmonijska funkcija i* $\overline{K(x,R)} \subset D$. *Tada važi*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K(x,R)} u(y)\, dS_y. \tag{24}$$

Dokaz. Kako je $u \in C^2(\overline{K(x,R)})$ harmonijska funkcija, na osnovu prethodne teoreme imamo

$$u(x) = \int_{\partial K(x,R)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|) - u(y) \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) \right) dS_y.$$

Identično kao u dokazu prethodne teoreme, prema (21) je

$$\int_{\partial K(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) E_n(|x-y|)\, dS_y = 0$$

U ovom slučaju spoljašnja normala na $\partial K(x,R)$ je $n(y) = \dfrac{y-x}{|x-y|}$, pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) &= \nabla_y E_n(|x-y|) \cdot n(y) \\ &= \frac{x-y}{\omega_n |x-y|^n} \cdot \frac{y-x}{|x-y|} = -\frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Otuda je

$$u(x) = -\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\, dS_y = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K(x,R)} u(y)\, dS_y\,. \quad \blacksquare$$

Teorema 11 (Teorema o srednjoj vrednosti) *Neka je* $u \in C^2(D)$ *harmonijska funkcija i* $\overline{K(x,R)} \subset D$. *Tada je*

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{K(x,R)} u(y)\, dy\,, \tag{25}$$

odnosno

$$\int_{\partial K(x,R)} u(y)\, dS_y = \frac{n}{R} \int_{K(x,R)} u(y)\, dy \tag{26}$$

Dokaz. Neka $0 < r \le R$. Iz prethodne teoreme, množeći (24) sa r^{n-1} i integracijom po r, dobijamo

$$\int_0^R r^{n-1} u(x) dr = \frac{1}{\omega_n} \int_0^R dr \int_{\partial K(x,r)} u(y)\, dS_y. \tag{27}$$

Primetimo pre svega da je

$$\int_0^R r^{n-1} u(x) dr = \frac{R^n}{n} u(x)$$

tako da iz (27) se dobija

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_0^R dr \int_{\partial K(x,r)} u(y)\, dS_y \,. \tag{28}$$

Za $n = 2$, neka je $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Kako su parametarske jednačine kružnice $\partial K(x, r) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = r^2$

$$\partial K(x,r) : \begin{cases} y_1 = y_1(t) = x_1 + r\cos t, \\ y_2 = y_2(t) = x_2 + r\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

dobija se

$$\begin{aligned} \int_0^R dr \int_{\partial K(x,r)} u(y)\, dS_y &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} u(x_1 + r\cos t, x_2 + r\sin t) \sqrt{(y_1'(t))^2 + (y_2'(t))^2}\, dt \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r\, u(x_1 + r\cos t, x_2 + r\sin t)\, dt\, dr \,. \end{aligned} \tag{29}$$

S druge strane, uvodjenjem polarnih koordinata za krug $K(x, R) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \le R^2$

$$K(x,R) : \begin{cases} y_1 = x_1 + r\cos t, & 0 \le r \le R \\ y_2 = x_2 + r\sin t, & 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

za dvostruki integral imamo

$$\begin{aligned} \int_{K(x,R)} u(y)\, dy &= \int\!\!\int_{K\left((x_1,x_2),R\right)} u(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} u(x_1 + r\cos t, x_2 + r\sin t) \left| \frac{D(y_1, y_2)}{D(r,t)} \right| dt\, dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r\, u(x_1 + r\cos t, x_2 + r\sin t)\, dt\, dr \,. \end{aligned} \tag{30}$$

Iz (28), (29) i (30), dobija se (27).

Analogno, za $n = 3$, koristeći parametarske jednačine sfere $\partial K(x, R) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = R^2$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + R\cos u \cos v, \\ y_2 = x_2 + R\cos u \sin v, \\ y_3 = x_3 + R\sin v, \end{cases} , \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$$

i prelaskom na sferne koordinate u trostrukom integralu po lopti $K(x, R) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \le R^2$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + r\cos u \cos v, & 0 \le r \le R \\ y_2 = x_2 + r\cos u \sin v, & 0 \le u \le 2\pi \\ y_3 = x_3 + r\sin u, & 0 \le v \le \pi \end{cases} , \qquad \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(r, u, v)} = r^2 \sin v$$

može se pokazati (25). ■

Analogno Teoremi 10, koristeći Teoremu 9, može se pokazati i naredna teorema.

Teorema 12 (i) *Neka za funkciju $u \in C^2(D)$ važi $\Delta u \geq 0$ u D. Tada za svaki krug (loptu) $\overline{K(x,R)} \subset D$ važi*

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K(x,R)} u(y)\, dS_y \quad i \quad u(x) \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{K(x,R)} u(y)\, dy\,. \tag{31}$$

(ii) *Neka za funkciju $u \in C^2(D)$ važi $\Delta u \leq 0$ u D. Tada za svaki krug (loptu) $\overline{K(x,R)} \subset D$ važi*

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K(x,R)} u(y)\, dS_y \quad i \quad u(x) \geq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{K(x,R)} u(y)\, dy\,,$$

Pokažimo sada obrat teoreme o srednjoj vrednosti.

Teorema 13 (Obrat teoreme o srednjoj vrednosti) *Neka funkcija $u \in C^2(D)$ ima svojstvo srednje vrednosti, tj. zadovoljava (24) (odnosno (25)) za svako $x \in D$ i svaki krug (loptu) $\overline{K(x,R)} \subset D$. Tada je u harmonijska funkcija u D.*

Dokaz. Fiksirajmo $x \in D$. Za svako $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial D)$ posmatrajmo funkciju

$$h(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K(x,r)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K(0,1)} u(x + rz)\, r^{n-1}\, dS_z\,.$$

Kako po pretpostavci funkcija $u \in C^2(D)$ zadovoljava (24), $h(r) = u(x) \equiv \text{const.}$ za svako $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, odnosno $h'(r) \equiv 0$ za svako $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial D)$.

S druge strane, imamo da je

$$\begin{aligned} h'(r) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K(0,1)} \nabla u(x + rz)\, z\, dS_z = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial K(x,r)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y - x}{r}\right) r^{1-n}\, dS_y \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K(x,r)} \nabla u(y) \cdot n(y)\, dS_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{K(x,r)} \Delta u(y)\, dy\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Pretpostavimo suprotno, da postoji $x_0 \in D$ tako da je $\Delta u(x_0) \neq 0$ i bez gubitka opštosti pretpostavimo da je $\Delta u(x_0) > 0$. Tada postoji $0 < \varrho < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, tako da je $\Delta u(y) > 0$ za svako $y \in K(x_0, \varrho)$. Dakle, prema (32) je $h'(r) > 0$ za svako $r \in (0, \varrho)$, što je kontradikcija. Dakle, u je harmonijska funkcija u D. ■

Napomena 2. Obrat teoreme o srednjoj vrednosti može se pokazati i pod slabijom pretpostavkom da je funkcija $u \in C(D)$ koja zadovoljava (24), za svako $x \in D$ i svaki krug (loptu) $\overline{K(x,R)} \subset D$, harmonijska funkcija. Naime, može se pokazati da za funkciju $u \in C(D)$ koja zadovoljava (24) važi $u \in C^\infty(D)$, što zajedno sa prethodnom teoremom pokazuje da je u harmonijska funkcija na D.

5.4.3. Princip maksimuma za harmonijske funkcije

Teorema 14 (Jaki princip maksimuma.) *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, povezan skup.*

(i) *Ako za funkciju $u \in C^2(D)$ važi $\Delta u \geq 0$ u D i ako postoji $x^\star \in D$ tako da je $u(x^\star) = \sup_D u(x)$, tada je $u(x) = u(x^\star)$ za svako $x \in D$.*

(ii) *Ako za funkciju $u \in C^2(D)$ važi $\Delta u \leq 0$ u D i ako postoji $x^\star \in D$ tako da je $u(x^\star) = \inf_D u(x)$, tada je $u(x) = u(x^\star)$ za svako $x \in D$.*

Dokaz. Dokažimo tvrdjenje (i) (dokaz tvrdjenja (ii) je analogan). Neka je $M = u(x^\star)$ i

$$D_M = \{x \in D \,\big|\, u(x) = u(x^\star) = M\}.$$

Prema pretpostavci je $D_M \neq \emptyset$ neprazan.

Neka je $x_0 \in \overline{D_M}$ i $\{x_k\} \subset D_M$ niz takav da $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Zbog neprekidnosti funkcije u, $u(x_k) \to u(x_0)$, pa sledi da je $u(x_0) = M$, tj. $x_0 \in D_M$, što znači da je D_M zatvoren u D.

Za $x \in D_M$ odaberimo $R > 0$ takav da $\overline{K(x,R)} \subset D$. Kako za $v = u - M$ imamo $\Delta v = \Delta u \geq 0$, primenjujući Teoremu 12, prema (31) je

$$0 = u(x) - M \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{K(x,R)} (u(y) - M)\, dy\,. \tag{33}$$

Kako je $u(y) - M \leq 0$ za svako $y \in D$, (33) povlači da je $M = u(y)$ na $K(x,R)$, odnosno za svako $y \in K(x,R)$ je $M = u(y)$, tj. $y \in D_M$. Dakle, $K(x,R) \subset D_M$, što znači da je D_M otvoren u D.

Kako je D_M otvoren i zatvoren u D, D povezan, mora biti $D = D_M$, odnosno $u(x) = u(x^\star)$ za svako $x \in D$. ■

Dakle, prema jakom principu maksimuma za otvoren, povezan skup $D \subset \mathbb{R}^n$, harmonijska funkcija $u \in C^2(D)$, koja nije konstantna funkcija, svoju najveću i najmanju vrednost ne dostiže u D.

Ako skup $D \subset \mathbb{R}^n$ nije povezan, onda funkcije u ima konstantnu vrednost na komponenti povezanosti unutrašnje tačke skupa D (maksimalni povezan podskup od D koji sadrži tu tačku), u kojoj funkcija u dostiže svoju najveću ili najmanju vrednost.

Teorema 15 (Slabi princip maksimuma.) *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, ograničen skup.*

(i) *Ako za funkciju $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ važi $\Delta u \geq 0$ u D, onda je*

$$\max_{x\in\overline{D}} u(x) = \max_{x\in\partial D} u(x) \tag{34}$$

(ii) *Ako za funkciju $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ važi $\Delta u \leq 0$ u D, onda je*

$$\min_{x\in\overline{D}} u(x) = \min_{x\in\partial D} u(x) \tag{35}$$

Dokaz 1. Kako je $\overline{D}$ kompakt (zatvoren i ograničen), postoji $x^\star \in \overline{D}$ tako da je

$$u(x^\star) = \max_{x\in\overline{D}} u(x).$$

Ako $x^\star \in \partial D$, tvrdjenje je dokazano. Ako $x^\star \in D$, tada prema Teoremi 14, $u(x) = u(x^\star)$ za svako $x \in D(x^\star)$, gde je $D(x^\star)$ komponenta povezanosti tačke $x^\star$ u skupu D (komponenta povezanosti tačke u otvorenom skupu je otvoren skup). Ali, kako je $\partial D(x^\star) \subset \partial D$, $u(x^\star) = \max_{x\in\overline{D}} u(x) \geq \max_{x\in\partial D} u(x)$. ■

Dokaz 2. *Dokaz slabog principa maksimuma može se dati bez korišćenja Teoreme o srednjoj vrednosti.*

Neka za funkciju $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ važi $\Delta u > 0$ u D. Ako ona dostiže maksimum u unutrašnjoj tačku x_0 skupa $D \subseteq \mathbb{R}^2$, onda je $u_{xx}(x_0) \leq 0$ i $u_{yy}(x_0) \leq 0$, odnosno $\Delta u(x_0) \leq 0$, što je kontradikcija. Prema tome, funkcija u dostiže svoj maksimum u $\overline{D}$ na rubu ∂D.

Neka za funkciju $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ važi $\Delta u \geq 0$ u D. Posmatrajmo funkciju

$$v_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$$

Tada, $v_\varepsilon \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ i $\Delta v_\varepsilon = \Delta u + 2\varepsilon > 0$ u D. Prema prethodnom,

$$\max_{(x,y)\in\overline{D}} v_\varepsilon(x, y) = \max_{(x,y)\in\partial D} v_\varepsilon(x, y)$$

Neka je $M = \max_{x\in\partial D} u(x)$, $L = \max_{x\in\partial D}(x^2 + y^2)$. Tada je

$$\begin{aligned} \max_{(x,y)\in\overline{D}} u(x) &\leq \max_{(x,y)\in\overline{D}} v_\varepsilon(x, y) = \max_{(x,y)\in\partial D} v_\varepsilon(x, y) \\ &\leq \max_{(x,y)\in\partial D} u(x, y) + \varepsilon \max_{(x,y)\in\partial D}(x^2 + y^2) = M + L\,\varepsilon \end{aligned}$$

Prelaskom na lim kada $\varepsilon \to 0+$, dobija se (34). □

Posledica 1 *Ako je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, ograničen skup. Tada harmonijska funkcija $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ dostiže svoj maksimum i minimum na rubu ∂D, tj. važi (34) i (35). Prema tome,*

$$\min_{\partial D} u \leq u(x) \leq \max_{\partial D} u \qquad x \in \overline{D}.$$

Slabi princip maksimuma tvrdi da harmonijska funkcija na ovorenom, ograničenom skupu D svoj maksimum i minimum dostiže na rubu ∂D, dok jaki princip maksimuma tvrdi da harmonijska funkcija na otvorenom, povezanom skupu D, različita od konstante, svoj maksimum i minimum dostiže *samo* na rubu ∂D.

Posledica 2 *Ako je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, ograničen skup. Tada za harmonijsku funkciju $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ važi*

$$\max_{\overline{D}} |u| \leq \max_{\partial D} |u|. \tag{36}$$

Dokaz. Prema Posledici 1 je

$$u(x) \leq \max_{\partial D} u \leq \max_{\partial D} |u| \qquad x \in \overline{D}$$

i

$$-u(x) \leq \max_{\partial D}(-u) \leq \max_{\partial D} |u| \qquad x \in \overline{D}$$

odakle sledi (36). ■

Posledica 3 *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, ograničen skup. Ako je funkcija $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ rešenje Dirihleovog graničnog problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & u \quad D, \\ u = 0 & na \quad \partial D. \end{cases} \tag{37}$$

onda je $u \equiv 0$ u D.

5.4.4. Jedinstvenost rešenja Dirihleovog graničnog problema

Teorema 16 *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, ograničen skup, neka je $G \in C(D)$ i $g \in C(\partial D)$. Dirihleov problem za Poasonovu jednačinu* (10)-(11)*, može imati najviše jedno rešenje u klasi funkcija $u \in C^2(D) \cap C(\partial D)$.*

Dokaz. Neka su u_1, $u_2 \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ rešenja Dirihleovog problema (10)-(11). Tada je funkcija $v = u_1 - u_2$, $v \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ rešenje homogenog graničnog problema (37). Na osnovu Posledice 3 principa maksimuma zaključujemo da je $v \equiv 0$ u D, tj. $u_1 \equiv u_2$ u D. ■

Napomena 3. Napominjemo da je u Poglavlju 5.3.1. u Teoremi 6 dokazana jedinstvenost rešenja Dirihleovog problema za Poasonovu jednačinu (10)-(11), u klasi funkcija $u \in C^2(D) \cap C^1(\partial D)$ i to u ograničenom, otvorenom skupu D za koji je $D \in \widetilde{C}^1$, tj. rub $\Gamma = \partial D$ je po delovima glatka kriva (za $n = 2$), odnosno površ (za $n = 3$). Prema tome, Teorema 16 predstavlja poboljšanje Teoreme 6 za širu klasu funkciju i bez pretpostavke o glatkosti ruba ∂D skupa D.

5.5. Grinova funkcija

Teorema 17 (Integralna reprezentacija funkcije Grinovom funkcijom.) *Neka je $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, gde je $D \in \widetilde{C}^1$ i za svako fiksirano $x \in D$ preslikavanje $y \mapsto w(x,y)$ iz klase $C^2(\overline{D})$ harmonijska funkcija. Tada važi integralna reprezentacija*

$$u(x) = -\int_D G(x,y)\Delta u(x)\,dx + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)G(x,y) - u(y)\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y)\right) dS_y, \quad \forall\, x \in D\,, \tag{38}$$

gde je $G(x,y) = E_n(|x-y|) - w(x,y)$.

Dokaz. Fiksirajmo $x \in D$. Neka je $\varepsilon > 0$ takvo da $\overline{K}(x,\varepsilon) \subset D$, gde $K(x,\varepsilon)$ označava sfera (krug) sa centrom u x, poluprečnika ε. Primenom druge Grinove formule (Teorema 3) na funkciju $u = u(y)$ i harmonijsku funkciju $y \mapsto G(x,y) = E_n(|x-y|) - w(x,y)$ u oblasti $D_\varepsilon = D \setminus \overline{K}(x,\varepsilon)$, imamo

$$
\begin{aligned}
-\int_{D_\varepsilon} G(x,y)\Delta u(x)\,dx &= \int_\Gamma \left(u(y)\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial n}(y)G(x,y)\right)\,dS_y \\
&\quad + \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \left(u(y)\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial n}(y)G(x,y)\right)\,dS_y. \\
&= \int_\Gamma \left(u(y)\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial n}(y)G(x,y)\right)\,dS_y \qquad (39)\\
&\quad + \int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\left(\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) - \frac{\partial w}{\partial n(y)}(x,y)\right)\,dS_y \\
&\quad - \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y)\big(E_n(|x-y|) - w(x,y)\big)\,dS_y
\end{aligned}
$$

Neka je

$$
U_0 = \max_{y\in\partial K(x,\varepsilon)} |u(y)|\,, \quad U_1 = \max_{y\in\partial K(x,\varepsilon)} \left|\frac{\partial u}{\partial n}(y)\right|, \quad W = \max_{y\in\partial K(x,\varepsilon)} |w(x,y)|
$$

Kako je

$$
\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|)\,dS_y = \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\,dS_y = \frac{u(y_\varepsilon)}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial K(x,\varepsilon)} dS_y = u(y_\varepsilon)\,,
$$

za $y_\varepsilon \in \partial K(x,\varepsilon)$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(y)\,\frac{\partial w(x,y)}{\partial n(y)}\,dS_y\right| &\le U_0\int_{\partial K(x,\varepsilon)} \nabla_y w(x,y)\cdot n(y)\,dS_y = U_0\int_{K(x,\varepsilon)} \operatorname{div}\big(\nabla_y w(x,y)\big)\,dy \\
&= U_0\int_{K(x,\varepsilon)} \Delta_y w(x,y)\,dS_y = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial K(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y)E_n(|x-y|)\,dS_y\right| &\le U_1\big|E_n(\varepsilon)\big|\int_{\partial K(x,\varepsilon)} dS_y = U_1\big|E_n(\varepsilon)\big|\varepsilon^{n-1}\omega_n \\
&\le \begin{cases} C\varepsilon^2|\ln\varepsilon|, & n=2 \\ C\varepsilon, & n=3 \end{cases} \to 0 \ \text{ kada } \ \varepsilon\to 0+\,,
\end{aligned}
$$

i

$$
\left|\int_{\partial K(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y)w(x,y)\,dS_y\right| \le U_1 W\int_{\partial K(x,\varepsilon)} dS_y = \big|E_n(\varepsilon)\big|\varepsilon^{n-1}\omega_n \to 0 \ \text{ kada } \ \varepsilon\to 0+\,,
$$

kada $\varepsilon \to 0+$ u (39), dobija se (38). ■

Ako je $u \in C^2(D)$ rešenje Dirihleovog problema (8)-(9) Laplasove jednačine ili Dirihleovog problema (10)-(11) Poasonove jednačine, odnosno funkcija za koju je poznata vrednost funkcije na Γ (ali ne i vrednost $\frac{\partial u}{\partial n}$ na Γ) i za koju je $\Delta u(x) = 0$ ili $\Delta u(x) = H(x)$, da bi se iz (38) odredila vrednost $u(x)$ za $x \in D$, funkciju $G(x,y)$ treba izabrati tako da je $G(x,y) = 0$ za svako $y \in \Gamma$ i svako $x \in D$.

Definicija 2 *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast.* GRINOVA FUNKCIJA OBLASTI *D je preslikavanje oblika*

$$
G(x,y) = E_n(|x-y|) - w(x,y), \quad x,y\in D,\ x\ne y
$$

sa sledećim osobinama:

1. $(\forall x \in D)$ *preslikavanje* $y \mapsto w(x,y)$ *je iz klase* $C^2(\overline{D})$;

2. $(\forall x \in D)$ $\Delta_y w(x,y) = 0$ *u* D;

3. $(\forall x \in D)(\forall y \in \Gamma = \partial D)$ $G(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad w(x,y) = E_n(|x-y|)$.

Prema tome iz Definicije 2 i Teoreme 17 imamo naredna tri tvrđenja:

Teorema 18 (Reprezentacija harmonijske funkcije Grinovom funkcijom) *Neka je* $D \in \widetilde{C}^1$. *Za harmonijsku funkciju* $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ *važi reprezentacija*

(40) $$u(x) = -\int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) u(y)\, dS_y, \quad x \in D.$$

Teorema 19 *Neka je* $D \in \widetilde{C}^1$. *Ako je* $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ *rešenje Dirihleovog problema* (8)-(9), *tada važi*

(41) $$u(x) = -\int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) g(y)\, dS_y \quad x \in D.$$

Teorema 20 *Neka je* $D \in \widetilde{C}^1$. *Ako je* $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ *rešenje Dirihleovog problema* (10)-(11), *tada važi*

(42) $$u(x) = -\int_D G(x,y) H(x)\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) g(y)\, dS_y \quad x \in D.$$

Teorema 21 (Simetričnost Grinove funkcije.) *Za svako* $x, y \in D$, $x \neq y$ *je* $G(x,y) = G(y,x)$.

Dokaz. Neka su $x, y \in D$, $x \neq y$ fiksirani i neka je $v(z) = G(x,z)$, $u(z) = G(y,z)$, $z \in D$. Pokazaćemo da je da je $u(x) = v(y)$. Tada je $\Delta v(z) = 0$ za $z \neq x$ i $\Delta u(z) = 0$ za $z \neq y$ i $v\big|_{\partial D} = u\big|_{\partial D} = 0$. Za dovoljno malo $\varepsilon > 0$, primenimo (6) na $D_\varepsilon = D \setminus (K(x,\varepsilon) \cup K(y,\varepsilon))$. Tada je

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(z) v(z) - u(z) \frac{\partial v}{\partial n}(z) \right) dS_z = \int_{\partial D} + \int_{\partial K(x,\varepsilon)} + \int_{\partial K(y,\varepsilon)}.$$

Kako je $v\big|_{\partial D} = u\big|_{\partial D} = 0$,

$$\int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(z) v(z) - u(z) \frac{\partial v}{\partial n}(z) \right) dS_z = 0\,,$$

što povlači da je

(43) $$\int_{\partial K(x,\varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(z) v(z) - u(z) \frac{\partial v}{\partial n}(z) \right) dS_z = \int_{\partial K(y,\varepsilon)} \left(u(z) \frac{\partial v}{\partial n}(z) - \frac{\partial u}{\partial n}(z) v(z) \right) dS_z\,,$$

gde je $n(z)$ unutrašnja jedinična normala u tački z na $\partial K(x,\varepsilon)$, odnosno na $\partial K(y,\varepsilon)$. Kako je $v(z)$ klase C i $u(z)$ klase C^1 za $z \in \partial K(x,\varepsilon)$, postoji

$$\sup_{\partial K(x,\varepsilon)} \left\{ |v(z)|, \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x,z) \right| \right\} = C_1 < \infty$$

odakle je

$$\left| \int_{\partial K(x,\varepsilon)} v(z) \frac{\partial u}{\partial n}(z)\, dS_z \right| \leq C_1 w_n \varepsilon^{n-1} . \tag{44}$$

S druge strane,

$$\int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(z) \frac{\partial v}{\partial n}(z)\, dS_z = \int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(z) \frac{\partial E_n(|x-z|)}{\partial n}(z)\, dS_z - \int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(z) \frac{\partial w(x,z)}{\partial n}(z)\, dS_z . \tag{45}$$

Kako je $u(z)$ klase C i $w(x,z)$ klase C^1 za $z \in \partial K(x,\varepsilon)$, postoji

$$\sup_{\partial K(x,\varepsilon)} \left\{ |u(z)|, \left| \frac{\partial w}{\partial n}(x,z) \right| \right\} = C_2 < \infty$$

odakle je

$$\left| \int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(z) \frac{\partial w}{\partial n}(x,z)\, dS_z \right| \leq C_2 w_n \varepsilon^{n-1} . \tag{46}$$

Kao u dokazu Teoreme 8, na osnovu (22)

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial K(x,\varepsilon)} u(z) \frac{\partial E_n(|x-z|)}{\partial n}(z)\, dS_z = u(x) \tag{47}$$

Iz (44), (45), (46) i (47) je

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial K(x,\varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(z) v(z) - u(z) \frac{\partial v}{\partial n}(z) \right) dS_z = -u(x)$$

i analogno

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial K(y,\varepsilon)} \left(u(z) \frac{\partial v}{\partial n}(z) - \frac{\partial u}{\partial n}(z) v(z) \right) dS_z = -v(y)$$

što iz (43) povlači da je $u(x) = v(y)$, tj. $G(y,x) = G(x,y)$. ■

Napomena 4. Kako je $\Delta_y G(x,y) = 0$ za $y \in D \setminus \{x\}$, prema Teoremi 21 je

$$\Delta_x G(x,y) = \Delta_x G(y,x) = 0, \quad x \in D \setminus \{y\} .$$

Zapravo, preslikavanje $x \mapsto G(x,y)$ je harmonijska funkcija u D za svako $y \in \partial D$.

Ukoliko je moguće pokazati obrat Teoreme 19 i Teoreme 20, odnosno da su funkcije definisane sa (41) i (42) rešenja, redom, Dirihleovog problema (8)-(9), odnosno Dirihleovog problema (10)-(11), određivanje Grinove funkcije za oblast D, omogućava nam dakle da rešimo odgovarajuće

Dirihleove probleme. Grinova funkcija za oblast D za svako fiksirano $x \in D$ je zapravo rešenje Dirihleovog problema

$$(48) \qquad \begin{cases} \Delta_y w(x,y) = 0 & \text{u} \quad D \\ w(x,y) = E_n(|x-y|) & \text{na} \quad \Gamma = \partial D. \end{cases}$$

Za oblast $D \in \widetilde{C}^1$ može se pokazati egzistencija i jedinstvenost rešenja Dirihleovog graničnog problema (48). Međutim, problem efektivnog određivanja Grinove funkcije generalno nije jednostavan. Ipak, u slučaju da oblast D poseduje izvesnu simetriju, Grinova funkcija se često može lako odrediti tzv. *metodom refleksije.* U nastavku, će biti pokazan postupak odredjivanja Grinove funkcije za neke takve oblasti: krug (lopta), poluravan (poluprostor), kvadrant u $\mathbb{R}^2$, polukrug.

5.5.1. Poasonovo jezgro

Preslikavanje $\mathcal{K}$ definisano na $D \times \partial D$ sa

$$\mathcal{K}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y), \quad x \in D, \quad y \in \Gamma = \partial D$$

naziva se POASONOVO JEZGRO OBLASTI D.

Lema 2 *Za Poasonovo jezgro oblasti $D \in \widetilde{C}^1$ važi:*

(i) preslikavanje $x \mapsto \mathcal{K}(x,y)$ je harmonijska funkcija u D za svako $y \in \partial D$;

(ii) $\int_{\partial D} \mathcal{K}(x,y) dS_y = 1$ za sako $x \in D$.

DOKAZ. (i) Koristeći Napomenu 4.

$$-\Delta_x \mathcal{K}(x,y) = \Delta_x \frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) = \Delta_x \Big(\nabla_y G(x,y) \cdot n(y) \Big) = \nabla_y (\Delta_x G(x,y)) \cdot n(y) = 0\,.$$

(ii) Sledi iz (40) za $u(x) \equiv 1$. ■

5.5.2. Grinovu funkciju za krug (loptu)

Neka $x \in K(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ i $y \in \partial K(0,R)$. Sa x^* označimo tačku inverznu tački x u odnosu na $\partial K(0,R)$.

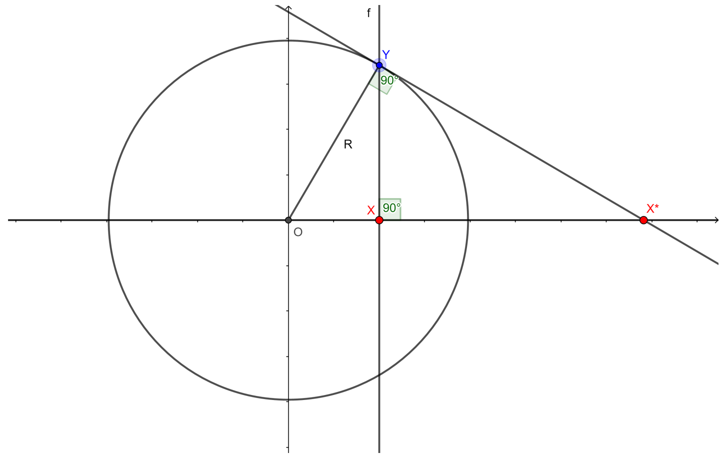
Za $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tačka

$$(49) \qquad x^\star = \frac{R^2}{|x|^2} x$$

naziva se inverzna tačka tačke x u odnosu na kružnicu (sferu) $\partial K(0,R)$.

Kako za tačku x^* inverznu tački x u odnosu na $\partial K(0,R)$ važi

$$\frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|}\,,$$



Slika 2: Grinovu funkciju za krug - tačka $x^\star$ inverzna tački x u odnosu na kružnicu $\partial K(0,R)$

zaključujemo da je $\Delta 0yx^* \sim \Delta 0xy$, odakle sledi da je

$$\frac{|x^*-y|}{|x-y|}=\frac{|x^*|}{R}=\frac{R}{|x|} \quad\Rightarrow\quad |x-y|=\frac{|x|}{R}|x^*-y|, \qquad x\in K(0,R),\ y\in\partial K(0,R)\,. \tag{50}$$

Neka je

$$G(x,y)=E_n(|x-y|)-E_n\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right) \tag{51}$$

i dokažimo da je ovako definisana funkcija **Grinova funkcija za krug**, tj. da

$$w(x,y)=E_n\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right)$$

zadovoljava uslove $1^0, 2^0, 3^0$ Definicije 2. Za $x\in K(0,R)$, $y\in\partial K(0,R)$ preslikavanje $y\mapsto w(x,y)$ je iz klase $C^2(\overline{K(0,R)})$. Poznato je da važi $\Delta_x E_n(|x|)=0$. Otuda je

$$\Delta_y E_n\Big(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\Big)=0,$$

pa je i 2^0 zadovoljeno. 3^0 sledi iz relacija (50) i (51).

5.5.3. Dirihleov granični problem Laplasove jednačine za krug (loptu). Poasonova formula za krug (loptu).

Teorema 22 *Preslikavanje* $\mathcal{K}: K(0,R)\times\partial K(0,R)\mapsto(0,\infty)$ *definisano sa*

$$\mathcal{K}(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n} \tag{52}$$

je Poasonovo jezgro za krug (loptu) $K(0,R)$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da

$$-\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) = \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}\,.$$

Kako je u ovom slučaju $n(y)=\dfrac{y}{|y|}$, na osnovu Leme 1 i činjenice da je $|y|=R$, imamo

$$\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) = \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}(x-y)\cdot\frac{1}{|y|}y = \frac{x\cdot y-R^2}{\omega_n R|x-y|^n}.$$

Koristeći relacije

$$E_n'(r) = -\frac{1}{\omega_n}\frac{1}{r^{n-1}},\quad \nabla_y\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right) = \frac{|x|}{R}\frac{y-x^*}{|x^*-y|}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right) &= \nabla_y E_n\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right)\cdot n(y) = E_n'\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right)\nabla_y\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right)\cdot n(y)\\ &= -\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-1}\frac{1}{|x^*-y|^{n-1}}\frac{|x|}{R}\frac{y-x^*}{|x^*-y|}\cdot\frac{y}{|y|}\\ &= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{1}{|x^*-y|^n}(x^*-y)\cdot\frac{y}{|y|}.\end{aligned}$$

Iz (49) i (50) sledi

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_n}{\partial n(y)}\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right) &= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\left(\frac{|x|}{R}\right)^{n}\frac{1}{|x-y|^n}\left(\frac{R^2}{|x|^2}x-y\right)\cdot\frac{y}{R}\\ &= \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2}\frac{1}{|x-y|^n}\left(\frac{R^2}{|x|^2}x-y\right)\cdot\frac{y}{R}\\ &= \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}\left(x-y\frac{|x|^2}{R^2}\right)\cdot\frac{y}{R}\\ &= \frac{1}{\omega_n R}\frac{1}{|x-y|^n}\left(x\cdot y-\frac{|x|^2}{R^2}|y|^2\right) = \frac{x\cdot y-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}.\end{aligned}$$

Iz prethodnog dobijamo

$$-\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) = \frac{x\cdot y-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n} - \frac{x\cdot y-R^2}{\omega_n R|x-y|^n} = \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}. \quad \blacksquare$$

Iz prethodne teoreme, Teoreme 18 i Teoreme 19, dobija se naredno tvrdjenje.

Teorema 23 *Neka je $\mathcal{K}: K(0,R)\times\partial K(0,R)\mapsto(0,\infty)$ Poasonovo jezgro za krug $K(0,R)$ definisano sa (52). Za harmonijsku funkciju $u\in C^2(\overline{K(0,R)})$ važi:*

(53) $$u(x) = \int_{\partial K(0,R)}\mathcal{K}(x,y)u(y)\,dS_y,\quad x\in K(0,R).$$

Ako je $u \in C^2(\overline{K(0,R)})$ rešenje Dirihleovog graničnog problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad u \quad K(0,R) \\ u = g \quad na \quad \partial K(0,R). \end{cases}$$

važi POASONOVA FORMULA ZA KRUG:

$$(54) \qquad u(x) = \int_{\partial K(0,R)} \mathcal{K}(x,y) g(y)\, dS_y = \int_{\partial K(0,R)} \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x-y|^n} g(y)\, dS_y, \quad x \in K(0,R).$$

POASONOVA FORMULA ZA KRUG (LOPTU) $K(a,R)$. Neka je $x = a + z$, $v(z) = u(a+z)$. Na osnovu (53) sledi

$$v(z) = \int_{\partial K(0,R)} \frac{R^2 - |z|^2}{\omega_n R |z-w|^n} v(w)\, dS_w.$$

Stavljajući $z = x - a$, $y = a + w$, dobijamo

$$u(x) = v(x-a) = \int_{\partial K(a,R)} \frac{R^2 - |x-a|^2}{\omega_n R |x-y|^n} v(y-a)\, dS_y = \int_{\partial K(a,R)} \frac{R^2 - |x-a|^2}{\omega_n R |x-y|^n} u(y)\, dS_y.$$

Prema tome,

$$(55) \qquad u(x) = \int_{\partial K(a,R)} \frac{R^2 - |x-a|^2}{\omega_n R |x-y|^n} u(y)\, dS_y, \quad x \in K(a,R).$$

Preslikavanje $\mathcal{K} : K(a,R) \times \partial K(a,R) \mapsto (0,\infty)$ definisano sa

$$(56) \qquad \mathcal{K}(x,y) = \frac{R^2 - |x-a|^2}{\omega_n R |x-y|^n}$$

naziva se POASONOVO JEZGRO ZA KRUG (LOPTU) $K(a,R)$.

POASONOVA FORMULA ZA KRUG $K(0,R) \in \mathbb{R}^2$ U POLARNIM KOORDINATAMA. U slučaju $n = 2$ dobićemo Poasonovu formulu (53) u polarnim koordinatama. Poasonova formula (54) za $n = 2$ je

$$(57) \qquad u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial K(0,R)} g(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^2}\, dS_y, \quad x \in K(0,R).$$

Neka su polarne koordinate tačke $x = (x_1, x_2) \in K(0,R)$:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi, & 0 \le r \le R \\ x_2 = r\sin\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Neka je $y = (y_1, y_2) \in \partial K(0,R)$ i neka su parametarske jednačine kružnice $\partial K(0,R)\ :\ y_1^2 + y_2^2 = R^2$

$$\partial K(0,R)\ :\ \begin{cases} y_1 = y_1(\psi) = R\cos\psi, \\ y_2 = y_2(\psi) = R\sin\psi, \end{cases} \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$$

Kako je

$$|x|^2 = r^2, \quad |x-y|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2,$$

i

$$dS_y = \sqrt{(y_1'(\psi))^2 + (y_2'(\psi))^2}d\psi = Rd\psi,$$

ako označimo $u(x) = u(x_1, x_2) = u(r, \varphi)$ i $g(y) = g(y_1, y_2) = g(\psi)$, iz (57) se dobija *Poasonova formula u polarnim koordinatama*

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}d\psi. \tag{58}$$

Teorema 24 *Neka je $g \in C(\partial K(0,R))$ i funkcija u definisana sa (54). Tada je $u \in C^2(K(0,R))$ harmonijska funkcija u $K(0,R)$ i za svako $x^\star \in \partial K(0,R)$ zadovoljava*

$$\lim_{x\to x^\star, x\in K(0,R)} u(x) = g(x^\star) \tag{59}$$

Dokaz. Kako je parcijalni izvod funkcije $x \mapsto \mathcal{K}(x,y)$ po x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ prvog i drugog reda neprekidan na kompaktnom skupu $\overline{K(0,R)} \times \partial K(0,R)$, to se

$$\int_{\partial K(0,R)} \mathcal{K}(x,y)g(y)\,dS_y$$

može diferencirati po x_i $i = 1, \ldots, n$, pod znakom integrala dva puta, odnosno za funkciju u definisanu sa (54) je $u \in C^2(K(0,R))$. Prema tome, kako za Poasonovo jezgro $\mathcal{K} : K(0,R) \times \partial K(0,R) \mapsto (0,\infty)$ za krug $K(0,R)$ definisano sa (52), prema Lemi 2 važi $\Delta_x\mathcal{K}(x,y) = 0$, za funkciju u definisanu sa (54) imamo

$$\Delta_x u(x) = \Delta_x\left(\int_{\partial D}\mathcal{K}(x,y)g(y)\,dS_y\right) = \int_{\partial D}\Delta_x\mathcal{K}(x,y)g(y)\,dS_y = 0\,.$$

Neka je $x^\star \in \partial D$, $D = K(0,R)$, $\varepsilon > 0$. Funkcija g je neprekidna na ∂D, pa postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da je

$$|g(y) - g(x^\star)| < \varepsilon/2 \;\text{ za svako } y \in \partial D, \quad |y - x^\star| < \delta \tag{60}$$

Kako je prema Lemi 2-(ii)

$$g(x^\star) = g(x^\star)\int_{\partial D}\mathcal{K}(x,y)dS_y\,,$$

zajedno sa (54), imamo

$$\begin{aligned}
\big|u(x) - g(x^\star)\big| &= \Big|\int_{\partial D}\mathcal{K}(x,y)(g(y) - g(x^\star))dS_y\Big| \le \int_{\partial D}\mathcal{K}(x,y)\big|g(y) - g(x^\star)\big|dS_y \\
&\le \int_{K_\delta\cap\partial D}\mathcal{K}(x,y)\big|g(y) - g(x^\star)\big|dS_y \\
&\qquad + \int_{\partial D\setminus K_\delta}\mathcal{K}(x,y)\big|g(y) - g(x^\star)\big|dS_y \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned} \tag{61}$$

gde je označeno $K_\delta = K(x^\star,\delta)$. Najpre, (60) povlači

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}\int_{K_\delta\cap\partial D}\mathcal{K}(x,y)dS_y \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{\partial D}\mathcal{K}(x,y)dS_y = \frac{\varepsilon}{2} \tag{62}$$

Pokažimo da za svako $x^\star \in \partial D$ i svako $\delta > 0$

$$\lim_{x\to x^\star, x\in D} \int_{\partial D\setminus K_\delta} \mathcal{K}(x,y)dS_y = 0\,. \tag{63}$$

Za $y \in \partial D \setminus K_\delta$ je $|y-x^\star| > \delta$. Uzevši $x \in D$ takvo da je $|x-x^\star| < \delta/2$ imamo da je

$$|y-x^\star| < |y-x| + |x-x^\star| < |y-x| + \delta/2 \le |y-x| + \frac{1}{2}|y-x^\star| \quad \Rightarrow \quad \frac{|y-x^\star|}{2} < |y-x| \tag{64}$$

Tada, kako kada $x \to x^\star \in \partial K(0,R)$, imamo da $|x| \to R$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K(0,R)\setminus K_\delta} \mathcal{K}(x,y)dS_y &= \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\int_{\partial K(0,R)\setminus K(x^\star,\delta)} \frac{dS_y}{|y-x|^n}\\
&\le 2^n\frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\int_{\partial K(0,R)\setminus K(x^\star,\delta)} \frac{dS_y}{|y-x^\star|^n}\\
&\le 2^n\frac{R^2-|x|^2}{R\,\omega_n\delta^n}\int_{\partial K(0,R)\setminus K(x^\star,\delta)} dS_y \le 2^n\frac{R^2-|x|^2}{R\,\omega_n\delta^n}\int_{\partial K(0,R)} dS_y\\
&= \left(\frac{2R}{\delta}\right)^n\cdot\frac{R^2-|x|^2}{R^2} \to 0, \quad \text{kada } x\to x^\star\,.
\end{aligned}$$

Ako označimo sa $M = \max_{y\in\partial K(0,R)} g(y)$, za integral I_2 prema (63), je

$$I_2 = \int_{\partial D\setminus K_\delta} \mathcal{K}(x,y)\,|g(y)-g(x^\star)|\,dS_y \le 2M\int_{\partial D\setminus K_\delta}\mathcal{K}(x,y)dS_y \to 0, \quad x\to x^\star \tag{65}$$

Iz (61), (62), (65), zaključujemo da postoji $\delta^\star \in (0,\delta)$ tako da je

$$\big|u(x)-g(x^\star)\big| < \varepsilon \;\; \text{za } |x-x^\star| < \delta^\star,$$

odnosno

$$\lim_{x\to x^\star} u(x) = g(x^\star). \qquad \blacksquare$$

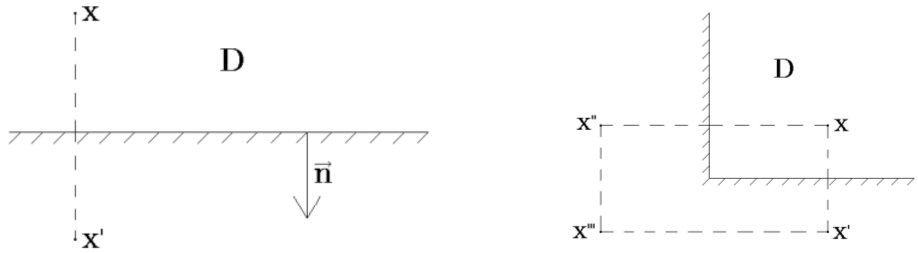
5.5.4. Grinovu funkciju za poluravan, prvi kvadrant i polukrug

Iako poluravan, poluprostor, prvi kvadrant nisu ograničene oblasti, ali su oblasti sa simetrijom, može se odrediti Grinova funkcija. Pri tome, napomenimo da reprezentacija harmonijske funkcije i rešenja Poasonove PDJ Grinovom funkcijom za ove oblasti ne važi (Teorema 18, Teorema 19, Teorema 20), ali se koristeći ideju o reprezentaciji harmonijske funkcije Grinovom funkcijom za krug, može dobiti Poasonova formula za poluravan (poluprostor) i pokazati (videti Teoremu 25) da predstavlja rešenje Dirihleovog problema Laplasove jednačine.

GRINOVA FUNKCIJA ZA POLURAVAN (POLUPROSTOR):

$$D_1 = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_2 > 0\}$$

$$G(x,y) = E_2(|x-y|) - E_2(|x'-y|),$$



Slika 3: Grinovu funkciju za poluravan i I kvadrant

gde je x' tačka simetrična tački x u odnosu na $\Gamma\,:\,x_2=0$.

Grinova funkcija za poluprostor:

$$\Omega=\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,:\,x_n>0\}$$

$$G(x,y)=E_n(|x-y|)-E_n(|x'-y|),$$

gde je $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)$ tačka simetrična tački $x\in\Omega$ u odnosu na $\Gamma\,:\,x_n=0$.

Grinova funkcija za prvi kvadrant:

$$D_2=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,:\,x_1>0,\ x_2>0\}$$

$$\partial D_2=\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\quad \Gamma_1\,:\,x_2=0,\quad \Gamma_2\,:\,x_2=0$$

$$G(x,y)=E_2(|x-y|)-E_2(|x'-y|)-E_2(|x''-y|)+E_2(|x'''-y|)$$

gde je x' tačka simetrična tački x u odnosu na Γ_1, dok je x'' tačka simetrična tački x u odnosu na Γ_1 i x''' tačka takva da je $|x''-x'''|=|x-x'|$ i $|x'-x'''|=|x-x''|$ (videti sl. 3). Tada je za

$$y\in\Gamma_1\,:\,E_2(|x-y|)=E_2(|x'-y|),\quad E_2(|x''-y|)=E_2(|x'''-y|)\quad\Rightarrow\quad G(x,y)=0,\ x\in D_2$$

i za

$$y\in\Gamma_2\,:\,E_2(|x-y|)=E_2(|x''-y|),\quad E_2(|x'-y|)=E_2(|x'''-y|)\quad\Rightarrow\quad G(x,y)=0,\ x\in D_2$$

Dakle, $G(x,y)=0$ za svako $x\in D_2$ i svako $y\in\partial D_2=\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Grinova funkcija za polukrug:

$$D_3=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,:\,x_1^2+x_2^2<R^2,\ x_1>0\}$$

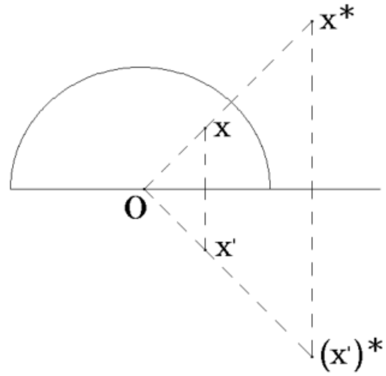
$$\partial D_3=\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\quad \Gamma_1\,:\,x_2=0,\quad \Gamma_2\,:\,x_1^2+x_2^2=R^2,x_2>0$$

$$G(x,y)=E_2(|x-y|)-E_2\left(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\right)-E_2(|x'-y|)+E_2\left(\frac{|x|}{R}|(x')^*-y|\right)$$

gde je x' tačka simetrična tački x u odnosu na Γ_1 i x^* tačka inverzna tački $x\in D_3$ u odnosu na kružnicu $x_1^2+x_2^2=R^2$, dok je $(x')^\star$ tačka simetrična tački x^* u odnosu na Γ_1 (videti sl. 4).

Tada je za $y\in\Gamma_1$

$$|x-y|=|x'-y|,\quad |x^\star-y|=|(x')^\star-y|,$$



Slika 4: Grinova funkcija za polukrug

dok za $y \in \Gamma_2$ prema (50) je

$$|x-y| = \frac{|x|}{R}|x^* - y| \, .$$

Kako je $\triangle Z'OY \sim \triangle YOX'$ (slika 5) (jer je prema (50) $\frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|OZ'|}{|OY|} = \frac{|OY|}{|OX'|}$ i $\sphericalangle Z'OY = \sphericalangle YOX'$), sledi i da je

$$\frac{|Z'Y|}{|OY|} = \frac{|YX'|}{|OX'|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|(x')^\star - y|}{R} = \frac{|x'-y|}{|x|} \quad \Leftrightarrow \quad |x'-y| = \frac{|x|}{R}\,|(x')^\star - y| \, .$$

Dakle,

$$y \in \Gamma_1 \; : \; E_2(|x-y|) = E_2(|x'-y|), \;\; E_2\Big(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\Big) = E_2\Big(\frac{|x|}{R}|(x')^*-y|\Big) \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = 0, \; x \in D_3$$

i za

$$y \in \Gamma_2 \; : \; E_2(|x-y|) = E_2\Big(\frac{|x|}{R}|x^*-y|\Big), \;\; E_2(|x'-y|) = E_2\Big(\frac{|x|}{R}|(x')^*-y|\Big) \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = 0, \; x \in D_3$$

Dakle, $G(x,y) = 0$ za svako $x \in D_3$ i svako $y \in \partial D_3 = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

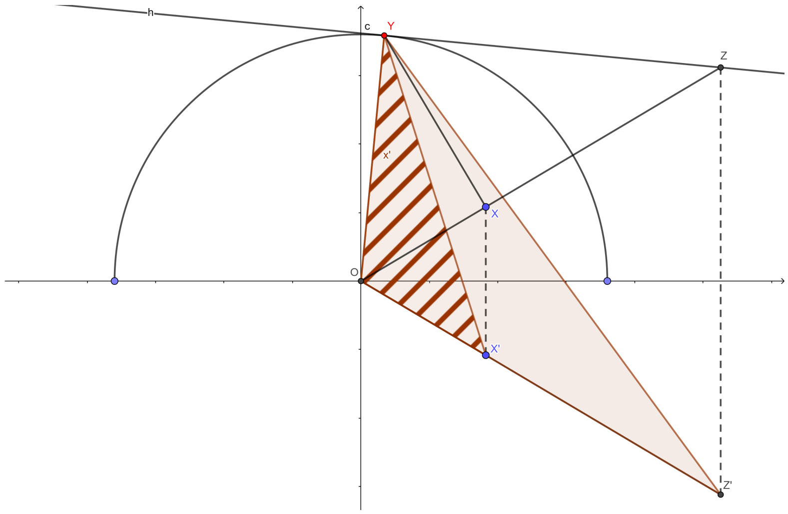
5.5.5. Dirihleov granični problem Laplasove jednačine za poluravan. Poasonova formula za poluravan.

Korišćenjem Leme 1 imamo

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) &= \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x'-y|) - \frac{\partial E_n}{\partial n(y)}(|x-y|) \\ &= \frac{1}{\omega_n |x'-y|^n}(x'-y) \cdot n(y) - \frac{1}{\omega_n |x-y|^n}(x-y) \cdot n(y). \end{aligned}$$

Kako je za $y \in \Gamma$ je $|x-y| = |x'-y|$, pa sledi

$$-\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y) = \frac{1}{\omega_n |x-y|^n}(x'-x) \cdot n(y). \tag{66}$$



Slika 5: Grinova funkcija za polukrug

U slučaju $n = 2$ je $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x_1, -x_2)$ (videti Sliku 3). Za $y \in \Gamma \,:\, x_2 = 0$ je $y = (y_1, 0)$ i $n(y) = (0, -1)$, odakle dobijamo

$$-\frac{\partial G}{\partial n(y)}(x, y) = \frac{x_2}{\pi\big((x_1 - y_1)^2 + x_2^2\big)}$$

Prema tome, preslikavanje $\mathcal{N} : \mathbb{R}^2_+ \times \partial\mathbb{R}^2_+ \mapsto (0, \infty)$ definisano sa

$$\mathcal{N}(x, y) = \frac{x_2}{\pi\big((x_1 - y_1)^2 + x_2^2\big)}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad y = (y_1, 0) \in \partial\mathbb{R}^2_+ \tag{67}$$

naziva se Poasonovo jezgro za poluravan $\mathbb{R}^2_+$, dok je sa

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x, y) g(y_1)\, dy_1, \qquad u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y_1)}{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}\, dy_1 \tag{68}$$

data Poasonova formula za poluravan $\mathbb{R}^2_+$.

Teorema 25 *Neka je $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ i funkcija u definisana sa (68). Tada je $u \in C^\infty(\Omega)$ harmonijska funkcija u Ω i za svako $X^\star = (x_1^\star, 0) \in \partial\Omega$ zadovoljava*

$$\lim_{x \to X^\star, x \in \Omega} u(x) = g(x_1^\star). \tag{69}$$

Dokaz. Pre svega, za Poasonovo jezgro za poluravan $\mathbb{R}^2_+$, tj. preslikavanje $\mathcal{N} : \mathbb{R}^2_+ \times \partial\mathbb{R}^2_+ \mapsto (0, \infty)$ definisano sa (67), lako se pokazuje:

(i) preslikavanje $x \mapsto \mathcal{N}(x, y)$ je harmonijska funkcija u Ω za svako $y \in \partial\Omega$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x, y) dy_1 = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_1 - x_1}{x_2} \Big|_{y_1 = -\infty}^{y_1 = \infty} = 1\,.$$

(iii) preslikavanje $y \mapsto \partial^k_{x_i} \mathcal{N}(x, y) \in L^1(\mathbb{R})$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i $i = 1, 2$, gde je $\partial^k_{x_i} \mathcal{N}(x, y) = \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \mathcal{N}(x, y)$

Označimo sa $M = ||g||_\infty = \sup_{y_1\in\mathbb{R}} |g(y_1)|$. Kako je

$$\left|\partial^k_{x_i}\mathcal{N}(x,y)g(y_1)\right| \le M\left|\partial^k_{x_i}\mathcal{N}(x,y)\right|, \quad x\in\Omega, \quad y_1\in\mathbb{R},$$

prema (iii), integral u (68) može se diferencirati pod znakom integrala proizvoljan broj puta po x_i, $i=1,2$. Dakle, za funkciju u definisanu sa (68), važi $u\in C^\infty(\Omega)$ i prema (ii), za svako $x\in\Omega$ je

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_x\mathcal{N}(x,y)g(y_1)\,dy_1 = 0.$$

Neka je $X^\star = (x_1^\star, 0)\in\partial\Omega$, $\varepsilon>0$. Funkcija g je neprekidna na $\partial\Omega$, pa postoji $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tako da je

$$|g(y_1)-g(x_1^\star)| < \varepsilon/2 \ \text{ za svako } y=(y_1,0)\in\partial\Omega, \quad |y_1-x_1^\star|<\delta \tag{70}$$

Kako je prema (ii)

$$g(x_1^\star) = g(x_1^\star)\int_{\mathbb{R}}\mathcal{N}(x,y)dy_1\,,$$

zajedno sa (68), imamo

$$\begin{aligned}\left|u(x)-g(x_1^\star)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{N}(x,y)(g(y_1)-g(x_1^\star))dy_1\right| \le \int_{\mathbb{R}}\mathcal{N}(x,y)\left|g(y_1)-g(x_1^\star)\right|dy_1\\ &\le \int_{|y_1-x_1^\star|<\delta}\mathcal{N}(x,y)\left|g(y_1)-g(x_1^\star)\right|dy_1 + \int_{|y_1-x_1^\star|\ge\delta}\mathcal{N}(x,y)\left|g(y_1)-g(x_1^\star)\right|dy_1 \qquad (71)\\ &= I_1+I_2\end{aligned}$$

Najpre, (70) zajedno sa (ii) povlači

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{2}\int_{|y_1-x^\star|<\delta}\mathcal{N}(x,y)dy_1 < \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{N}(x,y)dy_1 = \frac{\varepsilon}{2} \tag{72}$$

Uzmimo $x=(x_1,x_2)\in\Omega$ takvo da je $|x-X^\star|<\delta/2$ i pokažimo da za svako $\delta>0$

$$\lim_{x_2\to 0}\int_{|y_1-x_1^\star|\ge\delta}\mathcal{N}(x,y)dy_1 = \lim_{x_2\to 0}\frac{x_2}{\pi}\int_{|y_1-x_1^\star|\ge\delta}\frac{dy_1}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} = 0\,. \tag{73}$$

Za svako $y=(y_1,0)\in\partial\Omega$ imamo da je

$$|y_1-x_1^\star| = |y-X^\star| < |y-x|+|x-X^\star| < |y-x|+\delta/2 \le |y-x|+\frac{1}{2}|y_1-x_1^\star|\,,$$

odakle je

$$\frac{|y_1-x_1^\star|^2}{4} < |y-x|^2 = (x_1-y_1)^2+x_2^2$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int_{|y_1-x_1^\star|\ge\delta}\mathcal{N}(x,y)\,dy_1 &= \frac{x_2}{\pi}\int_{|y_1-x_1^\star|\ge\delta}\frac{dy_1}{(x_1-y_1)^2+x_2^2} < \frac{4x_2}{\pi}\int_{|y_1-x_1^\star|\ge\delta}\frac{dy_1}{|y_1-x_1^\star|^2}\\ &= \frac{4x_2}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{x_1^\star-\delta}\frac{dy_1}{|y_1-x_1^\star|^2}+\int_{x_1^\star+\delta}^{\infty}\frac{dy_1}{|y_1-x_1^\star|^2}\right) = \frac{8x_2}{\delta\pi}\to 0, \quad x_2\to 0\,,\end{aligned}$$

čime je pokazano (73). Prema tome, za integral I_2 je

$$I_2 = \int_{|y_1 - x_1^\star| \geq \delta} \mathcal{N}(x,y)\,|g(y_1) - g(x_1^\star)|\,dy_1 \leq 2M \int_{|y_1 - x_1^\star| \geq \delta} \mathcal{N}(x,y) dy_1 \to 0, \quad x_2 \to 0,$$

odakle zaključujemo da

$$\lim_{x \to X^\star} I_2 = 0 \tag{74}$$

Iz (71), (72) i (74), zaključujemo da postoji $\delta^\star \in (0, \delta)$ tako da je

$$\left|u(x) - g(x_1^\star)\right| < \varepsilon \;\text{ za } |x - X^\star| < \delta^\star,$$

odnosno

$$\lim_{x \to X^\star} u(x) = g(x_1^\star). \qquad \blacksquare$$

5.5.7. Dirihleov granični problem Laplasove jednačine za poluprostor. Poasonova formula za poluprostor.

Neka je

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_n > 0\}$$

Koristeći da je

$$x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$$

i za $y \in \Gamma \,:\, x_n = 0$ je

$$y = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) = (\widehat{y}, 0), \quad \text{i} \quad n(y) = (0, \dots, 0, -1)\,,$$

prema (66), imamo da se preslikavanje $\mathcal{N} : \mathbb{R}^n_+ \times \partial\mathbb{R}^n_+ \mapsto (0, \infty)$ definisano sa

$$\mathcal{N}(x,y) = \frac{2x_n}{\omega_n |y - x|^n} = \frac{2x_n}{\omega_n \big(X_{n-1} + x_n^2\big)^{n/2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n_+,\; \widehat{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+, \quad X_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - y_k)^2$$

naziva POASONOVO JEZGRO ZA POLUPROSTOR $\mathbb{R}^n_+$, dok je sa

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{N}(x,y) g(\widehat{y}) d\widehat{y} = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(\widehat{y})}{|y - x|^n} d\widehat{y}$$

data POASONOVA FORMULA ZA POLUPROSTOR $\mathbb{R}^n_+$.

Za $n = 3$ je

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y_1, y_2)}{\big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2\big)^{3/2}} dy_1 dy_2.$$

5.6. Harnakova teorema

Teorema 26 *Svaka harmonijska funkcija je beskonačno diferencijabilna.*

DOKAZ. Neka je $x' \in D$ proizvoljna tačka i $R > 0$ takvo da $\overline{K(x', R)} \subset D$. Neka je (prema (56))

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{R^2 - |x - x'|^2}{\omega_n R |x - y|^n}$$

Poasonovo jezgro za $K(x', R)$. Za $0 < \varepsilon < R$, očito je $x \mapsto \mathcal{K}(x, y)u(y)$ beskonačno diferencijabilna funkcija na $K(x', \varepsilon)$. Kako je parcijalni izvod funkcije $x \mapsto \mathcal{K}(x, y)$ po x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ proizvoljnog reda neprekidan na kompaktnom skupu $\overline{K(x', \varepsilon)} \times \partial K(x', R)$, to se

$$\int_{\partial K(x', R)} \mathcal{K}(x, y)u(y)\, dS_y$$

može diferencirati po x_i $i = 1, \ldots, n$, pod znakom integrala proizvoljan broj puta. Prema tome, iz reprezentacije (55) zaključujemo da je $u \in C^\infty(K(x', \varepsilon))$ i

$$\Delta u(x) = \int_{\partial K(x', R)} \Delta_x \mathcal{K}(x, y)u(y)\, dS_y$$

Kako je $x' \in D$ proizvoljno, sledi da je $u \in C^\infty(D)$. ■

Teorema 27 (HARNAKOVA TEOREMA) *Neka je D ograničena oblast. Ako niz $u_k \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ harmonijskih funkcija konvergira uniformno na Γ ka u, tada je $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ harmonijska funkcija.*

DOKAZ. Primenom Posledice 2 na harmonijsku funkciju $u_k - u_l$, gde su $k, l \in \mathbb{N}$ proizvoljni, dobijamo

$$\max_{\overline{D}} |u_k - u_l| \leq \max_{\Gamma} |u_k - u_l|,$$

odakle zaključujemo da $u_k \rightrightarrows u$ na $\overline{D}$. Otuda sledi da je $u \in C(\overline{D})$.

Neka je $x' \in D$ i $\varepsilon > 0$ takvo da $\overline{K(x', \varepsilon)} \subset D$. Za svaki $x \in K(x', \varepsilon)$ funkcija $y \mapsto \mathcal{K}(x, y)$ je ograničena na $\partial K(x', \varepsilon)$, odakle sledi da

$$\mathcal{K}(x, y)u_k(y) \rightrightarrows \mathcal{K}(x, y)u(y) \quad \text{na} \quad \partial K(x', \varepsilon). \tag{75}$$

Ali, kako su u_k harmonijske funkcije važi prema (55)

$$u_k(x) = \int_{\partial K(x', \varepsilon)} \mathcal{K}(x, y)u_k(y)\, dS_y,$$

pa uniformna konvergencija (75) daje

$$u(x) = \int_{\partial K(x', \varepsilon)} \mathcal{K}(x, y)u(y)\, dS_y, \quad x \in K(x', \varepsilon).$$

Koristeći Teoremu 26 zaključujemo

$$\Delta u(x) = \int_{\partial K(x',\varepsilon)} \Delta_x \mathcal{K}(x,y) u(y)\, dS_y, \quad x \in K(x',\varepsilon).$$

Iz $\Delta_x \mathcal{K}(x,y) = 0$ (Lema 2-(ii)) sledi da $\Delta u = 0$ u $K(x',\varepsilon)$. Kako je $x' \in D$ proizvoljno, sledi da $\Delta u = 0$ na D. ■

5.7. Furijeov metod za Dirihleov i Nojmanov granični problemi Laplasove jednačine za krug

(I) Dirihleovi granični problemi Laplasove jednačine za krug. Rešavamo unutrašnji i spoljašnji Dirihleov granični problemi Laplasove jednačine za krug

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u = 0 & \text{u} & K(0,a)^+ \\ u = g & \text{na} & \partial K(0,a) \end{array} \right. \tag{76}$$

i

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u = 0 & \text{u} & K(0,a)^- \\ u = g & \text{na} & \partial K(0,a) \end{array} \right. \tag{77}$$

gde je

$$K(0,a)^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < a\}, \quad K(0,a)^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| > a\}$$

Prirodno je, budući da je u pitanju krug, preći na polarne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Laplasova jednačina u polarnim koordinatama, prema (2), glasi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 < \rho \le a. \tag{78}$$

Rešenje ove jednačine potražimo u obliku $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Iz jednačine (78) dobijamo

$$R''(\rho)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}\,R'(\rho)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\,R(\rho)\,\Phi''(\varphi) = 0,$$

tj.

$$\left(R''(\rho) + \frac{1}{\rho}\,R'(\rho)\right)\Phi(\varphi) = -\frac{1}{\rho^2}\,R(\rho)\,\Phi''(\varphi),$$

ili, nakon razdvajanja promenljivih

$$\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Kako je je g definisana na kružnici, iz uslova $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$, sledi da je Φ rešenje problema

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0\,, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \tag{79}$$

a funkcija R rešenje Ojlerove jednačine

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0. \tag{80}$$

Periodičnost funkcije Φ povlači da mora biti $\lambda \geq 0$, tako da problem (79) ima rešenje

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi\ , \quad A, B = \text{const.}$$

Iz $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ sledi $\sqrt{\lambda} = k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, pa su sopstvene vrednosti i odgovarajuće sopstvene funkcije

$$\lambda_k = k^2, \quad \Phi_k(\varphi) = \widetilde{a_k}\cos k\varphi + \widetilde{b_k}\sin k\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Za $\lambda = k^2$ jednačina (80) postaje

$$\rho^2 R_k''(\rho) + \rho R_k'(\rho) - k^2 R_k(\rho) = 0, \quad k \geq 0. \tag{81}$$

Rešenje Ojlerove jednačine potražimo u obliku $R_k(\rho) = \rho^m$. Nakon zamene u jednačinu (81) parametar m se dobija iz jednačine $m(m-1) + m - k^2 = 0$, odakle je $m = \pm k$. Dakle, linearno nezavisna rešenja jednačine (81) su ρ^k i ρ^{-k} za $k > 0$, odnosno 1 i $\ln\rho$ za $k = 0$, pa je njeno opšte rešenje

$$R_k(\rho) = \begin{cases} \alpha_k\rho^k + \beta_k\rho^{-k}, & k \geq 1 \\ \alpha_0 + \beta_0\ln\rho, & k = 0 \end{cases}$$

U slučaju unutrašnjeg Dirihleovog problema funkcija u mora biti harmonijska u $K(0,a)^+$, tj. za $\rho < a$, dakle i neprekidna, odakle sledi da je $R_k(\rho) = \alpha_k\rho^k$, $k \geq 0$. Slično, u slučaju spoljašnjeg Dirihleovog problema, iz zahteva da rešenje bude ograničeno u oblasti $K(0,a)^-$, tj. za $\rho > a$, sledi da je $R_k(\rho) = \beta_k\rho^{-k}$, $k \geq 0$. Prema tome, rešenja jednačine (78) su

$$u_k(\rho,\varphi) = \begin{cases} \rho^{-k}(\widehat{a_k}\cos k\varphi + \widehat{b_k}\sin k\varphi), & \rho > a \\ \rho^{k}(\widehat{a_k}\cos k\varphi + \widehat{b_k}\sin k\varphi), & \rho < a \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Rešenja postavljenih Dirihleovih problema koja zadovoljavaju dati granični problem tražimo u obliku beskonačne sume

$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k (a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi), \quad \rho \leq a\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \tag{82}$$

odnosno

$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^k (a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi), \quad \rho \geq a,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \tag{83}$$

Iz graničnog uslova se dobija

$$g(\varphi) = u(a,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

što predstavlja Furijeov trigonometrijski razvoj funkcije g na $[0,2\pi]$. Pri tome su a_k i b_k Furijeovi koeficijenti tog razvoja, tj.

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \qquad k=0,1,2,\ldots\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi, \qquad k=1,2,\ldots .
\end{aligned}
\right.
\tag{84}
$$

Prema tome, sa (82), odnosno (83) izraženo je formalno rešenje Dirihleovog unutrašnjeg odnosno spoljašnjeg problema za krug, pri čemu su koeficijenti a_k i b_k dati sa (84).

Primenom Vajerštrasovog kriterijuma za uniformnu konvergenciju redova nije teško dokazati da ako je $g \in C^2([0,2\pi])$ i ima deo po deo neprekidan treći izvod, pri čemu je $g(0)=g(2\pi)$, tada redovi (82), (83) predstavljaju, respektivno, klasična rešenja Dirihleovog unutrašenjeg problema (76), odnosno spoljašnjeg problema (77) za krug, i mogu se diferencirati član po član po ρ i ϕ dva puta, pri čemu dobijeni redovi i redovi (82), (83) apsolutno i uniformno konvergiraju u oblasti $\overline{D}$.

Teorema 28 *Ako je $g \in C^2([0,2\pi])$ i ima deo po deo neprekidan treći izvod, pri čemu je $g(0) = g(2\pi)$, tada je funkcija $u = u(\rho,\varphi)$, definisana redom (83), predstavlja klasično rešenje spoljašnjeg Dirihleovog problema (77).*

Međutim, uz pomoć sledeće leme mi ćemo dokazati jedan jači rezultat u slučaju Dirihleovog unutrašnjeg problema za Laplasovu jednačinu.

Lema 3 *Neka je $g \in C([0,2\pi])$, $g(0) = g(2\pi)$ i g je po delovima klase C^1 na $[0,2\pi]$. Tada Furijeov red funcije g*

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)
\tag{85}
$$

konvergira apsolutno i uniformno na $[0,2\pi]$ ka funkciji g.

Dokaz. Lako se proverava da za neprekidne, po delovima glatke funcije važi formula parcijalne integracije. Imajući to u vidu imamo

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi = \frac{1}{k\pi}\,g(\varphi)\sin k\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} g'(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{k}b_k',\\
b_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{k\pi}\,g(\varphi)\cos k\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} g'(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi = \frac{1}{k}a_k',
\end{aligned}
$$

gde su a_k' i b_k' Furijeovi koeficijenti funkcije g'. Zbog

$$
\begin{aligned}
|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k\cos k\varphi| + |b_k\sin k\varphi| \le& |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| + |b_k|\\
=& |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|a_k'| + |b_k'|)\\
\le& |a_0| + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k'| + |b_k'|\big)^2}\\
\le& |a_0| + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}2\big(|a_k'|^2 + |b_k'|^2\big)},
\end{aligned}
$$

imajući u vidu da redovi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}(|a'_k|^2+|b'_k|^2)$$

konvergiraju, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma zaključujemo da red (85) konvergira apsolutno i uniformno na $[0,2\pi]$. Da je suma ovog reda upravo g, poznato je iz opšte teorije Furijeovih redova. ■

Teorema 29 *Neka je g neprekidna funkcija, po delovima klase C^1 na segmentu $[0,2\pi]$ i neka je $g(0)=g(2\pi)$. Tada funkcija $u=u(\rho,\varphi)$, definisana redom (82), predstavlja klasično rešenje unutrašnjeg Dirihleovog problema (76).*

Dokaz. Po prethodnoj lemi sledi da red (82) konvergira uniformno na $\partial K(0,a)^+$, odnosno da niz harmonijskih funkcija

$$S_n(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)$$

konvergira uniformno na $\partial K(0,a)^+$. Kako $\lim_{n\to\infty}S_n(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi)$, zaključak neposredno sledi iz Harnakove teoreme (Teorema 27). ■

Poasonova formula za krug $K(0,R)\subset\mathbb{R}^2$ u polarnim koordinatama. U poglavlju 5.5.3 smo pomoću Grinove funkcije izveli Poasonovu formulu za krug. Pokažimo sada da se do iste formule može doći polazeći od prethodno opisane Furijeove metode razdvajanja promenljivih.

Neka je $\rho<a$. Koristeći izraze (84) za Furijeove koeficijente, iz (82), dobija se

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\psi)\,d\psi+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\int_0^{2\pi}g(\psi)\cos k(\varphi-\psi)\,d\psi.\end{aligned}$$

Zbog uniformne konvergencije reda (82) suma i integral mogu zameniti mesta, tako da je

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\psi)\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos k(\varphi-\psi)\right)d\psi.$$

Nakon uvođenja smena $\dfrac{\rho}{a}=t,\ \ \varphi-\psi=\omega$, pri čemu je $t<1$, sledi

$$\begin{aligned}1+2\sum_{k=1}^{+\infty}t^k\cos k\omega&=1+2\sum_{k=1}^{\infty}t^k\frac{e^{ik\omega}+e^{-ik\omega}}{2}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(te^{i\omega}\right)^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(te^{-i\omega}\right)^k\\&=1+\frac{te^{i\omega}}{1-te^{i\omega}}+\frac{te^{-i\omega}}{1-te^{-i\omega}}\\&=\frac{1-t^2}{1+t^2-2t\cos\omega}=\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)}.\end{aligned}$$

Na taj način dobijamo *Poasonovu formulu Dirihleovog unutrašnjeg graničnog problema za krug u polarnim koordinatama* (58) iz Poglavlja 5.5.3,

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\,\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}\,d\psi, \quad \rho < a.$$

Analogno, polazeći od (83), dobija se i *Poasonova formula Dirihleovog spoljašnjeg graničnog problema za krug u polarnim koordinatama:*

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\psi)\,\frac{\rho^2-a^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2}\,d\psi, \quad \rho > a.$$

(II) Nojmanovi granični problemi Laplasove jednačine za krug. Analogno se Furijeova metoda može primeniti i na rešavanje Nojmanovih problema za Laplasovu jednačinu:

$$\text{(86)} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{u} \quad K(0,a)^+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{na} \quad \partial K(0,a) \end{cases}$$

i

$$\text{(87)} \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{u} \quad K(0,a)^- \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = h & \text{na} \quad \partial K(0,a) \end{cases}$$

Pri tome je po Teoremi 5 neophodno da funkcija h zadovoljava uslov

$$\int_0^{2\pi} h(\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Kao kod unutrašnjeg Dirihleovog problema, rešenje GP (86) potražimo u obliku

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k\left(A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi\right), \quad \rho < a.$$

Konstante A_k, B_k se određuju iz graničnog uslova $h(\varphi) = \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=a} = \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a}$, odakle je

$$h(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1}\left(A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi\right),$$

tj. konstante A_k, B_k, $k \geq 1$ se dobijaju iz Furijeovog razvoja funkcije h:

$$\text{(88)} \quad a_k = k a^{k-1}A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi, \quad b_k = k a^{k-1}B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi\,, \quad k \geq 1.$$

Prema tome, formalno rešenje je

$$\text{(89)} \qquad u(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k (a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi), \quad \rho < a.$$

Analogno Dirihleovom problemu, i ovde se može zaključiti da ako je h po delovima klase C^1 na $[0, 2\pi]$ i $h(0) = h(2\pi)$, onda je sa (89) dato klasično rešenje unutrašnjeg Nojmanovog problema za krug (86).

Takođe, analogno se dobija da je rešenje spoljašnjeg Nojmanovog problema

$$u(\rho,\varphi) = A_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{k}\left(\frac{a}{\rho}\right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad \rho > a. \tag{90}$$

Naravno, u formulama (89) i (90) je A_0 proizvoljno, jer je rešenje Nojmanovog problema, u klasi funkcija $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, jedinstveno određeno samo do na aditivnu konstantu (videti Teoremu 7).

I u ovom slučaju možemo dobiti integralnu reprezentaciju rešenja. Neka je $\rho < a$. Zamenom u (89) izraza za a_k i b_k iz (88) i koristeći identitet

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1,$$

imamo

$$\begin{aligned}
u(\rho,\varphi) &= A_0 + \frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k \int_0^{2\pi} h(\xi)\cos k(\varphi-\xi)\, d\xi \\
&= A_0 + \frac{a}{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k \int_0^{2\pi} h(\xi)\frac{e^{i\,k(\varphi-\xi)} + e^{-i\,k(\varphi-\xi)}}{2}\, d\xi \\
&= A_0 + \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\xi)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left[\left(\frac{\rho}{a}e^{i(\varphi-\xi)}\right)^k + \left(\frac{\rho}{a}e^{-i(\varphi-\xi)}\right)^k\right] d\xi \\
&= A_0 - \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\xi)\left[\ln\left(1-\frac{\rho}{a}e^{i(\varphi-\xi)}\right) + \ln\left(1-\frac{\rho}{a}e^{-i(\varphi-\xi)}\right)\right] d\xi.
\end{aligned}$$

Nakon sređivanja izraza pod integralom dobijamo tzv. *Dinijevu formulu Nojmanovog unutrašnjeg graničnog problema za krug*:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 - \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\xi)\,\ln\left(a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\xi)\right)\, d\xi, \quad \rho < a.$$

Slično, koristeći (90), dobija se *Dinijeva formula Nojmanovog spoljašnjeg graničnog problema za krug*:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\xi)\,\ln\left(a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\xi)\right)\, d\xi, \quad \rho > a.$$