Šturm-Liuvilov granični problem

Neka su funkcije $p \in C^1[0,l],\ p(x) \neq 0,\ q \in C[0,l]$. Operator $L\ :\ C^2[0,l] \to C[0,l]$, definisan sa

$$L(\varphi) = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\,\frac{d\varphi(x)}{dx}\Big) - q(x)\,\varphi(x)$$

naziva se *samoadjungovan (samokonjugovan) operator* ili *Šturm –Liuvilov operator*.

Za operator L se može postaviti *Šturm-Liuvilov granični problem*: Odrediti netrivijalno rešenje $\varphi \in C^2(0,l) \cap C^1([0,l])$ obične diferencijalne jednačine

$$L(\varphi) + \lambda\, w(x)\,\varphi(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

gde je λ kompleksan parametar, a funkcija $w \in C[0,l]$, koje na krajevima intervala definisanosti zadovoljava granične uslove

$$\begin{cases} \alpha\varphi'(0) - \beta\varphi(0) = 0, & \\ \gamma\varphi'(l) + \delta\varphi(l) = 0, & \alpha^2+\beta^2>0,\ \gamma^2+\delta^2>0. \end{cases} \tag{2}$$

Definicija 1 *Vrednost parametra λ za koju Šturm–Liuvilov granični problem (1)−(2) ima netrivijalno rešenje, naziva se sopstvena (karakteristična) vrednost, a odgovarajuće rešenje sopstvena (karakteristična) funkcija.*

Naredne fundamentalne teoreme daju dovoljne uslove egzistencije sopstvenih vrednosti i odgovarajućih sopstvenih funkcija, kao i predstavljanje nekih funkcija apsolutno i uniformno konvergentnim redom po sopstvenim funkcijama.

Teorema 1 (Regularni Šturm–Liuvilov granični problem) *Neka su u jednačini* (1) *funkcije*

$$\begin{aligned} &p \in C^1[0,l], \quad p(x) > 0 \ \textit{na}\ [0,l],\\ &q \in C[0,l], \quad q(x) \geq 0 \ \textit{na}\ [0,l],\\ &w \in C[0,l], \quad w(x) > 0 \ \textit{na}\ (0,l), \end{aligned}$$

a u graničnim uslovima (2) *konstante*

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta \geq 0, \quad \alpha+\beta>0, \quad \gamma+\delta>0.$$

Tada:

(i) Sopstvene vrednosti Šturm–Liuvilovog graničnog problema $(1)-(2)$ *su nenegativne (ako je* $q(x) \not\equiv 0$ *ili* $\beta+\delta>0$*, tada su sve sopstvene vrednosti pozitivne), jednostruke i čine strogo rastući niz* $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

(ii) Odgovarajuće sopstvene funkcije su w*-ortogonalne, tj.*

$$\int_0^l \varphi_i(x)\varphi_j(x)w(x)\,dx = 0, \quad i \neq j,$$

i čine potpun ortogonalan sistem u prostoru funkcija $L_{2,w}(0,l) = \{\varphi : ||\varphi||_w^2 = \int_0^l \varphi^2(x)w(x)\,dx < \infty\}$.

Teorema 2 *Neka su u jednačini* (1) *funkcije*

$$\begin{aligned} &p \in C^1[0,l], \quad p(x) > 0 \ \ na\ [0,l],\\ &q \in C[0,l], \quad\ \ q(x) \ge 0 \ \ na\ [0,l],\\ &w \in C[0,l], \quad w(x) > 0 \ \ na\ (0,l), \end{aligned}$$

a u graničnim uslovima (2) *konstante*

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta \ge 0, \quad \alpha+\beta>0, \quad \gamma+\delta>0.$$

Tada za svaku funkciju $f \in C^2[0,l]$ *koja zadovoljava granične uslove* (2) *i uslov* $|\,p(x)f'(x) - q(x)f(x)| \le C\sqrt{w(x)}$, $x \in (0,l)$ *(uvek ispunjen ako je* $w(0) > 0$, $w(l) > 0$*), red*

$$\sqrt{w(x)}\,f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{w(x)}\,\varphi_k(x),$$

gde je $a_k = \dfrac{\int_0^l f(x)\varphi_k(x)w(x)\,dx}{\int_0^l \varphi_k^2(x)w(x)\,dx}$, *konvergira apsolutno i uniformno na* $[0,l]$. *Ako je* $w(0) > 0$, $w(l) > 0$, *red* (3) *se svodi na red*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x).$$

Furijeova analiza

1. Furijeovi redovi

Sistem

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

elemenata unitarnog prostora X je ORTOGONALAN ako je norma svakog elementa tog sistema pozitivna i ako su svaka dva elementa tog sistema ortogonalna, tj. ako je $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ za svako $i \neq j$. Ortogonalan sistem je ortonormiran ako su svi njegovi elementi normirani, odn. ako je $\|\varphi_n\| = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo sve realne funkcije koje su integrabilne sa kvadratom u svojstvenom ili nesvojstvenom smislu na segmentu $[a, b]$ realne prave. Za dve funkcije ovog skupa kažemo da su ekvivalentne ako su jednake skoro svuda na segmentu $[a, b]$. Ovako definisana relacija razlaže posmatrani skup na klase ekvivalencije. Označimo taj skup sa $\mathcal{R}^2([a, b])$. Tada je sa

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

definisan skalarni proizvod na prostoru $\mathcal{R}^2([a, b])$.

Definicija 2 *Neka je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonalan sistem unitarnog prostora X i $x \in X$. Skalari λ_i određeni izrazom*

$$\lambda_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}, \quad i = \overline{1}n\,.$$

su FURIJEOVI KOEFICIJENTI *elementa x u odnosu na ortogonalan sistem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$$

je FURIJEOV RED *elementa x u odnosu na ortogonalan sistem $\{e_n\}$.*

BESELOVA NEJEDNAKOST za element x po ortogonalnom sistemu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2\,.$$

Teorema 3 *Neka je red*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

ravnomerno konvergentan na segmentu $[-l, l]$*. Tada je*

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\,, \tag{3}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

odn. a_0*,* a_k *i* b_k*,* $k \in \mathbb{N}$*, su Furijeovi koeficijenti funkcije* f *u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem funkcija.*

U tom slučaju Beselova nejednakost funkcije $f \in \mathcal{R}^2([-l, l])$ glasi

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx\,.$$

Kako je $f \in \mathcal{R}^2([-l, l])$, red $\sum(a_k^2 + b_k^2)$ je konvergentan. No onda je

$$\lim_k (a_k^2 + b_k^2) = 0,$$

odakle sledi da Furijeovi koeficijenti funkcije integrabilne sa kvadratom konvergiraju nuli, odn. važi

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0\,.$$

Definicija 3 *Neka je funkcija* f *apsolutno integrabilna na segmentu* $[-l, l]$*. Trigonometrijski red*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

u kome su koeficijenti određeni formulama (2) *naziva se* FURIJEOV RED FUNKCIJE f PO OSNOVNOM TRIGONOMETRIJSKOM SISTEMU FUNKCIJA.

U daljem tekstu Furijeov red neke funkcije u odnosu na osnovni trigonometrijski sistem funkcija zvaćemo jednostavno Furijeovim redom i to ćemo označavati sa

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,.$$

Ako je funkcija $f : [-l, l] \mapsto \mathbb{R}$ parna, tada je Furijeov red funkcije f oblika:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx\,,$$

gde su Furijeovi koeficijenti određeni formulama

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\, dx\,,\ n \geq 0\,.$$

Ako je funkcija f neparna, Furijeov red je oblika:

$$f \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

pri čemu su Furijeovi koeficijenti određeni formulama

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Teorema 4 *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[-l, l]$, pri čemu je $f(-l) = f(l)$. Ako je funkcija f deo po deo neprekidno diferencijabilna na $[-l, l]$, tada je*

$$f' \sim \frac{\pi}{l}\sum_{n=1}^{+\infty} -na_n \sin\frac{n\pi x}{l} + nb_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

odn. Furijeov red izvoda funkcije f dobija se formalnim diferenciranjem Furijeovog reda funkcije f.

2. Furijeov integral

Neka se funkcija $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ na intervalu $(-l,l)$ može prikazati trigonometrijskim redom

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\,,$$

u kome su koeficijenti a_n i b_n određeni formulama

$$a_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt\,,\qquad b_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt\,.$$

Drugim rečima, neka je

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt\,,\tag{4}$$

za svako $x\in(-l,l)$. Prirodno se postavlja pitanje:
DA LI IZRAZ (1) MOŽE PRETSTAVLJATI FUNKCIJU f NA CELOJ REALNOJ PRAVOJ I POD KOJIM USLOVIMA TO VAŽI?
Ukoliko izraz na desnoj strani jednakosti (4) ima graničnu vrednost kada $l\to+\infty$, imaćemo traženu reprezentaciju funkcije f na $\mathbb{R}$. Ako je funkcija f integrabilna na $\mathbb{R}$, prvi sabirak na desnoj strani jednakosti (4) teži nuli. Drugi sabirak možemo pretstaviti u obliku

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta z_n\int_{-l}^{l}f(t)\cos z_n(t-x)\,dt\,,$$

gde je $z_n=n\pi/l$, $z_0=0$, $\Delta z_n=z_n-z_{n-1}=\pi/l$, $n\in\mathbb{N}$; pri tome priraštaj Δz_n očigledno teži nuli kada $l\to+\infty$. Kada $l\to+\infty$ drugi sabirak pretstavlja integralnu sumu funkcije

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt$$

promenljive z na $[0,+\infty)$. Ukoliko ta granična vrednost postoji, onda iz formule (4) prelaskom na graničnu vrednost kada $l\to+\infty$ dobijamo reprezentaciju funkcije f **Furijeovim integralom**:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x)\, dt\,. \tag{5}$$

Dobijena formula pretstavlja **Furijeovu integralnu formulu**. Ovu formulu možemo predstaviti u obliku:

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(z) \cos zx + b(y) \sin zx]\, dz\,,$$

gde je

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos zt\, dt\,, \qquad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin zt\, dt\,.$$

Iz poslednjih formula se jasno vidi analogija sa razlaganjem funkcija u trigonometrijski red: parametar $n \in \mathbb{N}$ po kome se vrši sumiranje i koji je diskretnog karaktera zamenjen je neprekidnim parametrom, beskonačan red zamenjen je nesvojstvenim integralom, a funkcije $a(z)$ i $b(z)$ asociraju na Furijeove koeficijente.

3. Furijeova transformacija

Polazna tačka za definisanje Furijeove transformacije je kompleksan oblik Furijeovog integralne reprezentacije funkcije. Kako je podintegralna funkcija u Furijeovom integralu parna, Furijeovu integralnu formulu možemo pisati u sledećem obliku:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(x-t)\, dt\, dx\,. \tag{6}$$

Zajedno sa integralom u poslednjoj formuli možemo posmatrati integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin z(x-t)\, dt\, dz\,. \tag{7}$$

Ako on postoji, onda je on jednak nuli u smislu glavne vrednosti nesvojstvenog integrala, jer mu je podintegralna funkcija neparna. Množeći integral (7) sa

$i/2\pi$ i sabirajući ga sa integralom u (6), dobijamo reprezentaciju funkcije f **Furijeovim integralom u kompleksnoj formi**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iz(x-t)}\, dt\, dz\,, \tag{8}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\, dt \Big]\, dz\,,$$

gde spoljašnji integral podrazumevamo u smislu glavne vrednosti. Ako stavimo da je

$$F[f](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-izt}\, dt\,, \tag{9}$$

tada Furijeovu formulu u kompleksnom zapisu možemo pretstaviti u obliku

$$f(x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](z) e^{ixz}\, dz\,. \tag{10}$$

Ako integral (10) postoji u smislu glavne vrednosti, onda funkciju $F[f]$ nazivamo **Furijeovom transformacijom funkcije** f. Napomenimo da f u opštem slučaju može biti kompleksna funkcija realne promenljive.

Teorema 5 *Ako je funkcija f neprekidna i apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$ i ako u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ ima konačne jednostrane izvode, tada se ona može pretstaviti Furijeovim integralom*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f](z) e^{izx}\, dz\,,$$

gde je $F[f]$ Furijeova transformacija funkcije f.

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Za funkciju $f \in L^1(\mathbb{R})$ FURIJEOVA TRANSFORMACIJA se definiše kao funkcija $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data sa

$$\mathcal{F}[f](y) = \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx,$$

dok je INVERZNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA funkcije f definisana sa

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ixy} dy\,.$$

Ako je $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ i ako za svako $x \in \mathbb{R}$ funkcija f ima konačne jednostrane izvode, onda postoje $\mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}^{-1}[f]$, $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]]$, $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ i važi

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[f]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$$

Teorema 6 *Ako je $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, tada važi*

$$\mathcal{F}[f'](y) = iy\mathcal{F}[f](y)\,.$$

DOKAZ. Kako je

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$$

i postoji $\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x f'(t)dt$, zaključujemo da postoji i $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Pokažimo da je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Zaita, ako je $L = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, $L > 0$, iz činjenice da je $f(x) > L/2$ za dovolno veliko x, integracijom na $[0, \infty)$, dolazimo do kontradikcije sa $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Sada, parcijalnom integracijom se dobija

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(y) = \mathcal{F}[f'](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ixy} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{\infty} + iy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right] \\
&= iy \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right) = iy\mathcal{F}[f](y) = iy\widehat{f}(y)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$