

# PDJ drugog reda – IV deo

## PDJ eliptičnog tipa

1. Neka je  $\mathbb{D} = \{(x, y) : y > 0\}$  gornja poluravan. Odrediti Grinovu funkciju za datu poluravan, a zatim naći rešenje Dirihleovog problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{za } (x, y) \in \mathbb{D}, \quad u|_{y=0} = x - 5$$

u prostoru ograničenih funkcija na  $\mathbb{D}$ .

2. Koristeći Poasonovu formulu u polarnim koordinatama rešiti Dirihleov problem za krug  $K : r < 1$ , ako je na kružnici  $\partial K = \mathcal{K} : r = 1$  granični uslov

$$u|_{r=1} = \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

3. Dat je krug  $K : x^2 + y^2 + 2x < 0$ . Rešiti Dirihleov problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{za } (x, y) \in K \\ u(x, y) &= y & \text{za } (x, y) \in \partial K = \mathcal{K}. \end{aligned}$$

4. Naći harmonijsku funkciju unutar jediničnog krugu koja zadovoljava granični uslov

$$u|_{r=1} = \cos^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5. Rešiti unutrašnji Dirihleov granični problem Laplasove jednačine za kružni prsten  $1 < \rho < 2$ , ako je

$$u|_{\rho=1} = 1 + \cos^2 \varphi, \quad u|_{\rho=2} = \sin^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

6. Odrediti rešenje unutrašnjeg Dirihleovog graničnog problema Laplasove jednačine za kružni isečak  $0 < \rho < R$ ,  $0 < \varphi < \alpha$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , pri uslovima na granici

$$\begin{aligned} u_\varphi(\rho, 0) &= u(\rho, \alpha) = 0 \\ u|_{\rho=R} &= f(\varphi), \quad f(0) = f(\alpha) = 0, \quad f \in C^1(0, \alpha). \end{aligned}$$

7. Odrediti rešenje Laplasove jednačine unutar pravougaonika  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 2$ , koje na granici zadovoljava uslove:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 2) = 1, \\ u_x(0, y) &= 0, \quad u_x(1, y) = \sin 2\pi y \end{aligned}$$

8. Odrediti rešenje Laplasove jednačine u oblasti  $\mathbb{D} = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < l\}$  koje zadovoljava granične uslove:

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) &= u_y(x, l) + hu(x, l) = 0, \quad h > 0, \\ u(0, y) &= f(y), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \end{aligned}$$

9. Odrediti rešenje graničnog problema Poasonove jednačine unutar kruga  $K : x^2 + y^2 < R^2$

$$\begin{aligned} \Delta u &= -Axy, \quad (x, y) \in K \\ u|_{x^2+y^2=R^2} &= 0 \end{aligned}$$