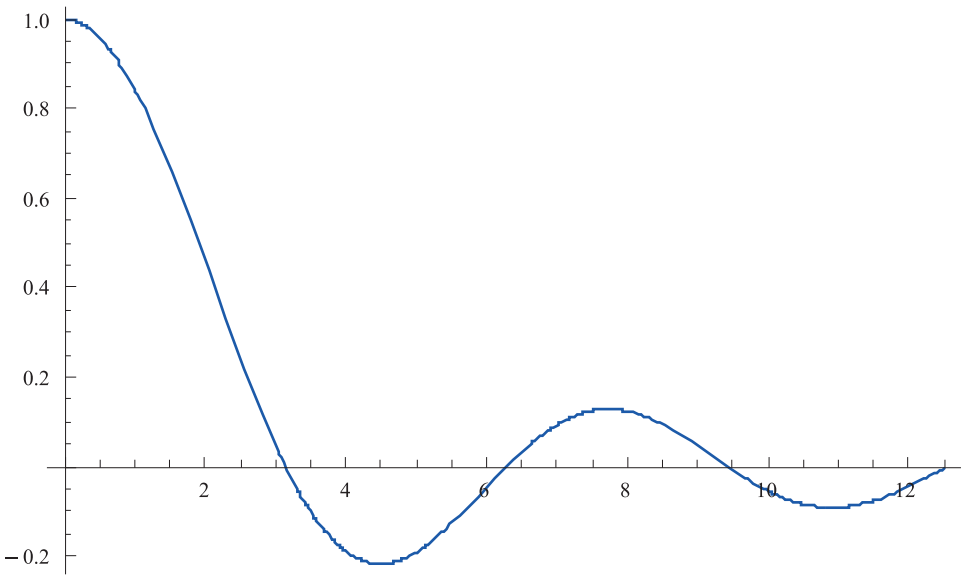
Mera, integral i izvod

Dragan S. Đorđević



$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm\,(x) = +\infty$$

3.1.2014.

Sadržaj

Predgovor **5**

1 Uvod **7**
1.1 Osnovni pojmovi 7
1.2 Topološki prostori 8
1.3 Metrički prostori 11
1.4 Prostori $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ i $\mathbb{R}^n$ 13
1.5 Banahovi i Hilbertovi prostori 17

2 Pozitivne mere **21**
2.1 Merljivi skupovi 21
2.2 Monotone familije 27
2.3 Merljive funkcije 30
2.4 Pozitivne mere 39
2.5 Konstrukcija Karateodorija 44

3 Lebegova mera **49**
3.1 Lebeg-Stiltjesova mera na $\mathbb{R}$ 49
3.2 Lebegova mera na $\mathbb{R}$ 54
3.3 Lebegova mera na $\mathbb{R}^n$ 60
3.4 Transformacije prostora $\mathbb{R}^n$ 62

4 Integral **73**
4.1 Integral proste nenegativne funkcije 73
4.2 Integral nenegativne merljive funkcije 75
4.3 Integral proširene realne merljive funkcije 81
4.4 Integral kompleksne merljive funkcije 85

4.5 Lebegov integral 95

5 Konvergencije nizova funkcija 103
5.1 L_p prostori 103
5.2 Konvergencija po meri 110

6 Kompleksne mere 115
6.1 Apsolutna varijacija kompleksne mere 115
6.2 Apsolutna neprekidnost i singularnost 120
6.3 Teoreme Radona-Nikodime i Lebega 123
6.4 Dekompozicija mere i prostora 129

7 Izvod 131
7.1 Vitalijev pokrivač 131
7.2 Monotone funkcije 134
7.3 Funkcije ograničene varijacije 140
7.4 Apsolutno neprekidne funkcije 144
7.5 Teoreme diferencijalnog i integralnog računa 151
7.6 Diferencijabilne funkcije kao skup prve kategorije 154
7.7 Važni primeri u teoriji funkcija 158

8 Mera i integracija na proizvodu prostora 165
8.1 Proizvod merljvih prostora 165

9 Reprezentacije funkcionala 167
9.1 Reprezentacija pozitivnih funkcionala na $C_c(X)$ 167
9.2 Aproksimacije neprekidnim funkcijama 168
9.3 Reprezentacia ograničenih funkcionala na $L_p(X, \mu)$ 168
9.4 Reprezentacija ograničenih funkcionala na $C_0(X)$ 171

10 Diferenciranje mera 173

11 Vektorske mere 175

Predgovor

Izloženi rezultati predstavljaju osnovni materijal za izučavanje mere, integrala i izvoda, uzimajući u obzir potrebe studenata na različitim nivoima studija.

Čitanje kompletnog teksta uslovljeno je poznavanjem elemenata opšte i linearne algebre, kao i teorije skupova. Posebno, važno je razumeti gustinu skupova $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, postojanje supremuma i infimuma podskupova od $\mathbb{R}$, razlikovati prebrojive skupove $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ od neprebrojivih skupova $(\mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$, kao i uočiti primenu aksiome izbora. Poznavanje ϵ-δ tehnike je svuda neophodno.

Glave 2 - 4 sadrže materijal namenjen prevashodno studentima osnovnih akademskih studija. Ovaj materijal čitalac može savladati uz poznavanje osnova matematičke analize: diferencijalnog i integralnog računa funkcije jedne promenljive, kao i osobina brojnih i funkcionalnih redova.

Glave 5 - 8 su ozbiljnije prirode i namenjene su studentima master akademskih studija. Neophodno je poznavanje elemenata funkcionalne analize i topologije.

U ovom trenutku tekst nije kompletan, a takođe ima slovnih i drugih grešaka. Konstantno se radi na poboljšanju materijala namenjenog studientima (obratiti pažnju na datum upisan na prvoj strani). Studenti su u obavezi da konsultuju dodatnu literaturu, koja je navedena u spisku referenci. Obavezno posetiti bilioteku Fakulteta.

Glava 1

Uvod

Ova glava predstavlja rekapitulaciju pojmova i teorema koje se koriste u ovom rukopisu, ali pri tome ne predstavljaju glavnu temu izučavanja. Sadržaj ove glave ne može zameniti detaljno izučavanje realne prave, topoloških, metričkih, ili normiranih prostora.

1.1 Osnovni pojmovi

Smatramo da je student upoznat sa ϵ-δ definicijama i tehnikama dokazivanja.

Podvlačimo neophodnost razumevanja sledećih osnovnih principa.

1) Uočavanje razlike između prebrojivih i neprebrojivih skupova. Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ su prebrojivi, a skupovi $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su neprebrojivi. Skup je najviše prebrojiv, ako je konačan ili prebrojiv.

2) Postojanje infimuma i supremuma podskupova od $\mathbb{R}$. Neka je $A \subset \mathbb{R}$. Infimum skupa A, u oznaci $\inf A$, jeste najveća donja granica skupa A. Ako je $A = \emptyset$, onda je $\inf A = +\infty$. Ako je $A \neq \emptyset$ i A je odozdo ograničen, tada postoji $\inf A \in \mathbb{R}$. Ako A nije odozdo ograničen, tada je $\inf A = -\infty$. Supremum skupa A, u oznaci $\sup A$, je najmanja gornja granica skupa A. Ako je $A = \emptyset$, tada je $\sup A = -\infty$. Ako je $A \neq \emptyset$ i A je odozgo ograničen, tada postoji $\sup A \in \mathbb{R}$. Ako A nije odozgo ograničen, tada je $\sup A = +\infty$. Slično ako je $A \subset \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

3) Skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ su gusti u skupu $\mathbb{R}$. Ako je (a, b) proizvoljan interval u skupu $\mathbb{R}$, tada postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva u intervalu (a, b), a takođe postoji beskonačno mnogo iracionalnih brojeva u ovom intervalu.

Ako je $(A_i)_i$ neka familija skupova, pri čemu je I indeksni skup, tada je direktni proizvod skupova ove familije definisan na sledeći način:

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \{f | f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) f(i) \in A_i\}.$$

Dakle, prirodno je za element $a \in A$ uvesti formu $a = (a_i)_{i \in I}$, pri čemu je $a_i \in A_i$ za svako $i \in I$.

Aksioma izbora tvrdi da ako su svi skupovi A_i neprazni, tada je i njihov direktan proizvod A takođe neprazan skup.

Drugim rečima, ako su svi skupovi A_i neprazni, onda postoji procedura formiranja nekog skupa B, koji sadrži bar po jedan elemenat svakog skupa A_i.

Napomena 1.1.1. Često koristimo oznaku $x := y$ sa sledećim značenjem: "novoj veličini x dodeljujemo istu vrednost koju ima poznata veličina y", u najširem smislu (na primer, x, y mogu biti brojevi, izrazi, funkcije, skupovi, ...).

1.2 Topološki prostori

Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X. Pretpostavimo da familija $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ zadovoljava sledeće uslove:

(1) $X, \emptyset \in \tau$;

(2) Ako je $A, B \in \tau$, tada je $A \cap B \in \tau$;

(3) Ako je I proizvoljan (indeksni) skup, i ako je $(A_i)_{i \in I}$ familija skupova sa svojstvom $A_i \in \tau$ za svako $i \in I$, tada je $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Tada je τ *topologija* na skupu X, a uređen par (X, τ) je *topološki prostor*. U slučaju da se topologija τ na skupu X podrazumeva, onda se može kratko reći da je X topološku prostor.

Elementi topologije τ nazivaju se *otvoreni skupovi*.

Ako je $A \subset X$ i (X, τ) je topološki prostor, onda je *unutrašnjost* skupa A, u oznaci $\operatorname{int} A$, definisana kao

$$\operatorname{int} A = \bigcup \{G : G \subset A, G \in \tau\}.$$

Dakle, $\operatorname{int} A$ je najveći otvoren skup sadržan u A.

Teorema 1.2.1. *Neka je (X, τ) topološki prostor i $G \subset X$. Tada je $G \in \tau$ ako i samo ako je $G = \operatorname{int} G$.*

Skup A je *zatvoren*, ako i samo ako je $A^c \in \tau$. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih zatvorenih skupova prostora (X, τ). Dakle, $A \in \mathcal{F}$ ako samo ako je $A^c \in \tau$.

Na osnovu De Morganovih[1] pravila za uniju, presek i komplement skupova, važi sledi sledeći rezultat.

Teorema 1.2.2. *Neka je (X, τ) toploški prostor i neka je $\mathcal{F}$ familija odgovarajućih zatvorenih skupova u X. Tada važe sledeća svojstva:*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$;

(2) *Ako je $A, B \in \mathcal{F}$, tada je $A \cup B \in \mathcal{F}$;*

(3) *Ako je I proizvoljan (indeksni) skup, i ako je $(A_i)_{i \in I}$ familija skupova sa svojstvom $A_i \in \mathcal{F}$ za svako $i \in I$, tada je $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.*

Ako je (X, τ) topološki prostor, tada je *zatvorenje* skupa A, u oznaci $\operatorname{cl} A$, definisano kao

$$\operatorname{cl} A = \bigcap \{F : F \supset A, F \in \mathcal{F}\},$$

pri čemu je $\mathcal{F}$ odgovarajuća familija zatvorenih skupova u X. Proizilazi da je $\operatorname{cl} F$ najmanji zatvoren podskup od X koji sadrži skup F.

Teorema 1.2.3. *Neka je (X, τ) topološki prostor i $F \subset X$. Tada je $F \in \mathcal{F}$ ako i samo ako je $F = \operatorname{cl} F$.*

Neka su (X, τ_1), (Y, τ_2) topološki prostori, i neka je $f : X \to Y$ preslikavanje. f je *neprekidno preslikavanje na skupu* X, ako za svako $G \in \tau_2$ važi $f^{-1}(G) \in \tau_1$.

Teorema 1.2.4. *Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ familije zatvorenih skupova u topološkim prostorima (X, τ_1) i (Y, τ_2), redom. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno, ako i samo ako za svako $F \in \mathcal{F}_2$ važi $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_1$.*

Neka je (X, τ) topološki prostor. Ako je $x \in A$, $U \subset X$, i ako postoji $V \in \tau$, tako da je $x \in V \subset U$, tada je U *okolina* tačke x.

Neka su (X, τ_1) i (Y, τ_2) topološki prostori, i neka je $f : X \to Y$ preslikavanje. f je *neprekidno u tački* $x \in X$, ako za svaku okolinu V tačke $f(x)$ u prostoru Y, postoji okolina U tačke x u prostoru X, tako da je $f(U) \subset V$.

[1] Augustus De Morgan (1806-1871), britanski matematičar i logičar

Teorema 1.2.5. *Neka su (X, τ_1) i (Y, τ_2) topološki prostori, i neka je $f : X \to Y$ preslikavanje. f je neprekidno preslikavanje na skupu X, ako i samo ako je f neprekidno u svakoj tački $x \in X$.*

Familija skupova $(G_i)_{i\in I}$ je *pokrivanje* skupa K, ako je $K \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Ako su G_i otvoreni skupovi u topološkom prostoru X, tada je $(G_i)_{i\in I}$ *otvoreno pokrivanje* skupa G.

Skup K je *kompaktan* u topološkom prostoru X, ako se svako otvoreno pokrivanje skupa K može svesti na konačno pokrivanje.

Prostor X je kompaktan, ako je X sam za sebe kompaktan skup.

Skup svih kompaktnih podskupova od X označavamo sa κ.

Teorema 1.2.6. *Neka su (X, τ_1) i (Y, τ_2) topološki prostori, i neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je K kompaktan skup u X, tada je $f(K)$ kompaktan skup u Y.*

Prostor X je *lokalno kompaktan*, ako za svako $x \in X$ postoji okolina U tačke x, tako da je $\operatorname{cl} U$ kompaktan skup.

Napomena 1.2.1. Lokalna kompaktnost je topološka karakterizacija konačno dimenzionalnih normiranih vektorskih prostora.

Topološki prostor (X, τ) je *Hausdorfov* [2], ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje uzajamno disjunktni skupovi $U, V \in \tau$, tako da je $x \in U$ i $y \in V$.

Teorema 1.2.7. *Neka je X lokalno kompaktan Hausdorfov prostor, $K \subset U \subset X$, U je otvoren i K je kompaktan. Tada postoji otvoren skup V, tako da je $\operatorname{cl} V$ komaptan, i*

$$U \subset V \subset \operatorname{cl} V \subset K.$$

Definicija 1.2.1. Neka je f kompleksna (ili realna) funkcija, definisana i neprekidna na topološkom prostoru X. *Nosač* funkcije f, u oznaci $\operatorname{supp}(f)$, jeste skup

$$\operatorname{supp}(f) = \operatorname{cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Skup svih kompleksnih (ili realnih) neprekidnih funkcija f na X, sa osobinom da je $\operatorname{supp}(f)$ kompaktan skup u X, označava se sa $C_c(X)$.

[2] Felix Hausdorff (1868-1942), nemački matematičar

Važna karakterizacija lokalno kompaktnih Hausdorfovih prostora jeste Urisonova[3] lema.

Teorema 1.2.8. (Urison) *Neka su E, F zatvoreni i uzajamno disjunktni podskupovi lokalno kompaktnog Hausdorfovog prostora X. Ako je E kompaktan skup, tada postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$, tako da je $f(x) = 0$ za svako $x \in E$, i $f(x) = 1$ za svako $x \in F$.*

Definicija 1.2.2. Neka je f kompleksna (ili realna) funkcija, definisana i neprekidna na topološkom prostoru X. Funkcija f *isčezava u beskonačnosti*, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji kompaktan podskup K od X, tako da za svako $x \in X \setminus K$ važi $|f(x)| < \epsilon$.

Skup svih neprekidnih funkcija na X koje isčezavaju u beskonačnosti, označava se sa $C_0(X)$.

Nije teško dokazati sledeći rezultat.

Teorema 1.2.9. *Neka je X topološki prostor. Tada je $C_c(x) \subset C_0(X)$. Štaviše, $C_c(X) = C_0(X)$ ako i samo ako je X kompaktan prostor.*

1.3 Metrički prostori

Neka je X neprazan skup i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje koje zadovoljava sledeće uslove:

(1) $d(x, y) \geq 0$ za svako $x, y \in X$;
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x, y \in X$;
(2) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za svako $x, y, z \in X$.

Tada je d *metrika* na skupu X, a uređen par (X, d) je metrički prostor. Jednostavnije, X je metrički prostor, ako se metrika d podrazumeva.

U metričkom prostoru definisani su pojmovi: otovrena kugla, zatvorena kugla i sfera sa centrom u tački $a \in X$ poluprečnika $r > 0$ na sledeći način:

$$B(a; r) = \{x \in X : d(a, x) < r\},\ B[a; r] = \{x \in X : d(a, x) \leq r\},$$
$$S(a; r) = \{x \in X : d(a, x) = r\}.$$

Skup $A \subset X$ je otvoren u metričkom prostoru (X, d), ako za svako $x \in A$ postoji kugla $B(a; r) \subset A$. Familija svih otvorenih skupova u X čini topologiju u X, indukovanu metrikom d.

[3]Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924), ruski matematičar

Ako drugačije ne naglasimo, smatramo da je topologija u metričkom prosotru uvek indukovana metrikom.

Niz tačaka $(a_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) konvergira ka tački $a \in X$ (u smislu metrike d), ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je za svako $n \geq n_0$ ispunjeno $d(a_n, a) < \epsilon$. Tada je a granična vrednost niza $(a_n)_n$, u oznaci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Ekvivalentno, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ako i samo ako za svaku kuglu $B(a; r)$ poluprečnika $r > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svako $n \geq n_0$ ispunjeno $a_n \in B(a; r)$.

Teorema 1.3.1. *Skup A u metričkom prostoru (X, d) je zatvoren, ako i samo ako: za svaki niz $(a_n)_n$ sa svojstvima $a_n \in A$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, sledi da je $a \in A$.*

Neka je $A \subset X$ i $a \in A$. Tačka a je *tačka nagomilavanja skupa A*, ako postoji niz $(x_n)_n$ različitih tačaka skupa A, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Drugim rečima, tačka a je tačka nagomilavanja skupa A, ako u svakoj kugli $B(a; r)$ $(r > 0)$ postoji beskonačno mnogo tačaka skupa A. Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A označen je sa $\operatorname{acc} A$.

Tačka $a \in A$ je *izolovana tačka skupa A*, ako a nije tačka nagomilavanja skupa A. Skup svih izolovanih tačaka skupa A označen je sa $\operatorname{iso} A$. Dakle, $\operatorname{iso} A = A \setminus (\operatorname{acc} A)$.

Tačka a je *rubna tačka skupa A*, ako svaka kugla $B(a; r)$ $(r > 0)$ ima neprazan presek i sa skupom A i sa skupom A^c. Skup svih rubnih tačaka skupa A označava se sa $\operatorname{bd} A$.

Niz $(a_n)_n$ u metričkom prostoru X je *Košijev*, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za sve brojeve $m, n \in \mathbb{N}$ važi implikacija:

$$m, n \geq n_0 \implies d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Teorema 1.3.2. *Ako je niz $(a_n)_n$ konvergentan u metričkom prostoru, tada je ovaj niz i Košijev.*

Poznato je da u opštem slučaju postoje Košijevi nizovi koji nisu konvergentni. Međujtim, važi sledeći rezultat.

Teorema 1.3.3. *Neka je $(a_n)_n$ Košijev niz u metričkom prosotru X. Ako postoji konvergentan podniz $(a_{n_k})_k$ ovog niza, tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in X$, tada je i niz $(a_n)_n$ konvergentan i važi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Metrički prostor X je *kompletan*, ako u prostoru X svaki Košijev niz jeste konvergentan.

Teorema 1.3.4. *Skup K je kompaktan u metričkom prostoru (X, d), ako i samo ako za svaki niz $(a_n)_n$ u skupu K postoji podniz $(a_{n_k})_k$ niza $(a_n)_n$, tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in K$.*

Neka je (X, d) metrički prostor, i neka je $E \subset X$. Skup E je nigde gust, ako je $\operatorname{int}(\operatorname{cl} E) = \emptyset$.

Skup E je *prve kategorije*, ako je $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, pri čemu su svi E_n nigde gusti skupovi (eventualno, neki skupovi E_n su prazni).

Svaki skup koji nije prve kategorije, jeste *druge kategorije*. Dakle, može se reći da su skupovi druge kategorije "veći" od skupova prve kategorije.

Poznat je i važan sledeći rezultat Bera[4] o kategorijama.

Teorema 1.3.5. (Ber) *Ako je X kompletan metrički prostor, tada je X druge kategorije.*

1.4 Prostori $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ i $\mathbb{R}^n$

U skupu $\mathbb{R}$ metrika je definisana na uobičajeni način: $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Smatramo da je topologija u $\mathbb{R}$ uvek određena pomenutom metrikom d.

Očigledno, otvoreni intervali (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ i $(-\infty, +\infty)$ u skupu $\mathbb{R}$ jesu otvoreni skupovi ($a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$). Lako je proveriti da svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}$ jeste unija nekih otvorenih intervala. Dokazujemo sledeće preciznije i korisno tvrđenje.

Teorema 1.4.1. *Svaki otvoren skup G u $\mathbb{R}$ je najviše prebrojiva unija disjunktnih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$. Pri tome, ovi intervali su jedinstveno određeni skupom G.*

Dokaz. Ako je $G = \mathbb{R}$ ili $G = \emptyset$, onda je tvrđenje dokazano. Stoga pretpostavimo da je G neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}$ i $G \neq \mathbb{R}$. Neka je $x \in G$. Tada postoji interval (a_0, b_0), tako da je $x \in (a_0, b_0) \subset G$. Među svim ovakvim intervalima, postoji najveći mogući interval, odnosno postoji interval (a, b) tako da $x \in (a, b) \subset G$, $a, b \notin G$. Do ovog intervala se dolazi na sledeći način:

$$b = \inf([x, +\infty) \cap G^c), \quad a = \sup((-\infty, x] \cap G^c).$$

[4] René-Louis Baire (1874-1932), francuski matematičar

Interval (a, b) je *komponentni interval* koji sadrži tačku $x \in G$. Očigledno, svakoj tački $x \in G$ odgovara tačno jedan komponentni interval. Dakle, skup G je unija familije svih svojih komponentnih intervala, pri čemu su komponentni intervali jednoznačno određeni. Osim toga, komponentnih intervala ne može biti više od racionalnih brojeva (svaki komponentni interval sadrži neki racionalan broj), te sledi da komponentnih intervala ima najviše prebrojivo mnogo. $\square$

Prethodno tvrđenje ne važi u prostoru $\mathbb{R}^n$ za $n > 1$.

Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Podrazumevana metrika u $\mathbb{R}^n$ je Euklidova[5] metrika, definisana kao

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Pretpostavimo da u prostoru $\mathbb{R}^n$ ulogu otvorenih intervala igraju otvorene kugle. Drugim rečima, ako je $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, osnovni otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^n$ jesu $K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$.

Drugi pristup je da ulogu otvorenih intervala u prostoru $\mathbb{R}^n$ imaju n-intervali. Neka je $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ i $a_i < b_i$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$P = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

otvoren n-interval u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Primer 1.4.1. Pretpostavimo da je otvoreni kvadrat u ravni prebrojiva unija uzajamno disjunktnih otvorenih kugli. Tada dijagonala polaznog kvadrata (posmatrana kao podskup prave) mora biti najviše prebrojiva unija uzajamno disjunktih otvorenih intervala (intervala koji su otvoreni podskupovi prave). Poslednje tvrđenje očigledno nije moguće.

Analogno, neka je otvoren krug u ravni prebrojiva unija uzajamno disjunktnih otvorenih pravougaonika. Tada je prečnik (koji nije papralelan koordinatnim osama) tog kruga prebrojiva unija uzajamno disjunktnih otvorenih intervala (intervala na pravoj), što takođe nije moguće. $\triangle$

U nekim situacijama korisno je zameniti otvorene intervale (a, b) poluzatvorenim intervalima $[a, b)$ (ili $(a, b]$). Na primer, neka je $a < b$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da je $\frac{1}{n_0} < b - a$. Tada je, očigledno,

[5]Euklid iz Aleksandrije, $\varepsilon\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\zeta$ (oko 325. p.n.e. - 265. p.n.e.), grčki matematičar

$$(a,b) = \left[a + \frac{1}{n_0}, b\right) \cup \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n}\right)\right),$$

pri čemu su svi poluzatvoreni intervali na desnoj strani međusobno disjunktni, i ima ih prebrojivo mnogo. Analogno razmatranje važi i za intervale zatvorene sa desne strane.

Na osnovu prethodnog rezonovanja, formulišemo rezultat.

Teorema 1.4.2. *Svaki otvoren skup G u $\mathbb{R}$ je prebrojiva unija uzajamno disjunktnih poluzatvorenih intervala, pri čemu su svi intervali zatvoreni s leve strane, ili su svi intervali zatvoreni s desne strane.*

Nadalje, jednostavnosti radi, posmatraćemo intervale oblika $[a, b)$.

Problemi merenja skupova dovode do situacije da vrednosti nekih funkcija mogu biti beskonačno velike. Na primer, prirodno je uzeti da je dužina realne prave jednaka $+\infty$. Stoga je potrebno razmotriti i proširenu realnu pravu, odnosno skup $\mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$.

U skupu $\mathbb{R}^*$ umesto definisanja metrike, definišemo familiju otvorenih skupova. Na taj način, skup $\mathbb{R}^*$ razmatraćemo kao topološki prostor, u kome je $\mathbb{R}$ potprostor. Drugim rečima, ako je $U \subset \mathbb{R}$, onda je U otvoren u $\mathbb{R}$, ako i samo ako je $U = \mathbb{R} \cap V$, gde je $V \subset \mathbb{R}^*$ i V je otvoren u $\mathbb{R}^*$.

Dakle, otvoreni interval u skupu $\mathbb{R}^*$ je svaki skup oblika

$$(a,b), [-\infty, b), (a, +\infty], [-\infty, +\infty], \qquad \text{za } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Skup $G \subset \mathbb{R}^*$ je otvoren, ako je unija otvorenih intervala. Lako je utvrditi da je dovoljno posmatrati najviše prebrojive unije otvorenih intervala (u svakom otvorenom intervalu postoji neki racionalan broj, te stoga disjunktnih intervala ne može biti više nego racionalnih brojeva; ako intervali nisu disjunknti, njihova unija je ponovo interval).

U skupu $\mathbb{R}^*$ poluzatvoreni intervali sa leve strane jesu:

$$[a,b), [-\infty, b), [a, +\infty], [-\infty, +\infty], \quad a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

Analogno su definisani poluzatvoreni intervali sa desne strane.

Za otvorene podskupove skupa $\mathbb{R}^*$ lako je dokazati sledeće tvrđenje.

Teorema 1.4.3. *Svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}^*$ je najviše prebrojiva unija uzajamno disjunktnih otvorenih intervala, pri čemu su ti intervali jednoznačno određeni.*

Svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}^*$ je prebrojiva unija uzajamno disjnuktnih poluzatvorenih intervala u $\mathbb{R}^*$, pri čemu su svi intervali zatvoreni sa leve strane, ili su svi zatvoreni sa desne strane.

Dokaz ovog tvrđenja je analogan dokazu za otvorene skupove u $\mathbb{R}$.

Algbarske operacije u skupu $\mathbb{R}^*$ definisane su na uobičajeni način. Na primer, ako je $a \in \mathbb{R}$, tada je $a + \infty = +\infty$, $a \cdot (+\infty) = +\infty$ ako je $a > 0$, i slično. Nije moguće definisati $+\infty - \infty$, dok je, sa druge strane, po konvenciji $0 \cdot \infty = 0$. Ovu "neobičnu" konvenciju suštinski koristimo samo u integraciji. Naime, integral nula-funkcije na skupu beskonačne mere biće jednak nuli. Takođe, integral proizvoljne funkcije na skupu mere nula biće takođe jednak nuli. Ova prosta svojstva integraljenja su posledica prethodno uvedene konvencije. Za ovako uvedene operacije u skupu $\mathbb{R}^*$ važe uobičajene algebarske osobine. Sa druge strane, operacija množenja nije neprekidna u skupu $\mathbb{R}^*$. Na primer, neka je $a_n = 1/n$ i $b_n = n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je $a_n b_n = 1$, $a_n \to 0$ i $a_n \to +\infty$ kada $n \to +\infty$.

Na kraju uvodnog dela opisujemo strukturu otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ za $n > 1$.

Teorema 1.4.4. *Svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}^n$ jeste najviše prebrojiva unija otvorenih kugli. Svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}^n$ jeste najviše prebrojiva unija otvorenih n-intervala.*

U prethodnom tvrđenju posmatrane otvorene kugle nisu obavezno uzajamno disjunktne, a takođe posmatrani otvoreni n-pravougaonici nisu obavezno uzajamno disjunktni. Ovu nelagodnost prevazilazimo korišćenjem poluzatvorenih intervala u $\mathbb{R}^n$.

Ako je $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ i $a_i < b_i$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, tada su poluzatvoreni n-intervali u $\mathbb{R}^n$ određeni na kao

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

ili

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i] = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : a_i < x_i \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Poluzatvoreni n-intervali omogućavaju formiranje disjunktih unija na sledeći način.

Teorema 1.4.5. *Svaki otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ je prebrojiva unija uzajamno disjunktnih poluzatvorenih n-intervala, tako da su svi n-intervali zatvoreni sa leve strane, ili su svi zatvoreni sa desne strane.*

1.5 Banahovi i Hilbertovi prostori

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Skup B ($B \subset V$) je *algebarska baza* prostora V, ako za svako $x \in V$ postoji jedinstveno $n \in \mathbb{N}$, jedinstveni vektori $e_1, \ldots, e_n \in B$ i jedinstveni skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tako da je

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Ako su B_1 i B_2 dve algebarske baze vektorskog prostora V, onda su kardinalnosti ovih baza jednake, odnosno $\mathrm{card}(B_1) = \mathrm{card}(B_2)$. Dokaz ove činjenice zasniva se na Aksiomi izbora, i ovde ga nećemo navoditi.

Ako je V vektorski prostor sa algebarskom bazom B, tada je $\mathrm{card}(B)$ dimenzija prostora V, u oznaci $\dim V$. Ako baza B ima konačno mnogo elemenata, onda je $\dim V$ prirodan broj, a prostor V je konačno dimenzionalan.

Ako je B beskonačan skup, onda se ne upuštamo u razmatranje kardinala $\mathrm{card}(B)$. U ovom slučaju je V beskonačno dimenzionalni prostor, uz kratku oznaku $\dim V = \infty$.

Funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ je *norma* na vektorskom prostoru V, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) $\|x\| \geq 0$ za svako $x \in V$;

(2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za svako $x \in V$ i svako $\lambda \in \mathbb{K}$;

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za svako $x, y \in V$ (nejednakost trougla).

U tom slučaju je $(X, \|\cdot\|)$ *normiran prostor*. Jednostavnije, X je normiran prostor ako se norma na neki način podrazumeva.

Ako je X normiran prostor, tada je metrika d, indukovana normom $\|\cdot\|$, definisana kao $d(x, y) = \|x - y\|$ za svako $x, y \in V$. Ako drugačije ne naglasimo, podrazumevamo da je metrika na normiranom prostoru uvek indukovana normom.

Ako je $a \in X$ i $r > 0$, tada je $B[a; r] = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$ zatvorena kugla sa centrom u a poluprečnika r.

Teorema 1.5.1. *Zatvorena kugla $B[a; r]$ je komaktan skup u normiranom prostoru X, ako i samo ako je X konačno dimenzionalan prostor.*

Ako je X normiran prostor i X je kompletan metrički prostor u odnosu na metriku indukovanu normom, onda je X Banahov[6] prostor.

U prostoru $\mathbb{R}^n$ koristi se Euklidova norma. Ako je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tada je

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Prostor $\mathbb{R}^n$ je Banahov u odnosu na ovako uvedenu normu.

Ako je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), tada je skalarni proizvod u X funkcija $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ sa sledećim osobinama:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad x \in X$;

(2) $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;

(3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ za svako $x, y \in x$ (naravno, konjugovanje nema nikakvu funkciju u slučaju realnog vektorskog prostora);

(4) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$, $x, y, z \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Skup X, na kome je definisan skalarni proizvod, naziva se *unitaran prostor*.

Na unitarnom prostoru X postoji norma koja je indukovana skalarnim proizvodom, i to:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X.$$

Ako je X Banahov prostor u odnosu na normu indukovanu skalarnim proizvodom, onda je X Hilbertov[7] prostor.

U prostoru $\mathbb{R}^n$ je skalarni proizvod uveden kao

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Očigledno, Euklidova norma na $\mathbb{R}^n$ zadovoljava uslov

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

te je $\mathbb{R}^n$ Hilbertov prostor.

Skalarni proizvod u $\mathbb{C}^n$ definisan je kao

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

[6]Stefan Banach (1892-1945), poljski matematičar

[7]David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

Napominjemo da je neophodna obazrivost, jer se, na primer, u fizici po pravilu konjuguje prvi činilac.

Norma indukovana skalarnim proizvodom u $\mathbb{C}^n$ je Euklidova norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Prostor $\mathbb{C}^n$ u odnosu na ovako definisanu normu jeste Hilbertov.

Glava 2

Pozitivne mere

2.1 Merljivi skupovi

Principi merenja u matematici, kao i uopšte u svakodnevnim situacijama, podležu izvesnim pravilima. Matematički model merenja zahteva postojanje nepraznog skupa X, kao i postojanje familije podskupova od X koje je moguće na izvestan način meriti. Prve principe merenja u matematici, zajedno sa primenama na određivanje površine i zapremine oblih geometrijskih tela, predstavio je Arhimed[1]. Način merenja koji ovde izučavamo, uveo je Lebeg[2].

Neka je X neprazan skup, i neka je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X. Drugim rečima, $\mathcal{P}(X)$ je skup svih podskupova od X. Preciziramo familiju skupova čije elemente (tj. skupove) možemo meriti.

Definicija 2.1.1. Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$) je σ-algebra na X, ako su ispunjeni uslovi:

(1) $X \in \mathcal{R}$;

(2) Ako $E \in \mathcal{R}$, onda $E^c \in \mathcal{R}$;

(3) Ako je $E_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$.

Uređen par $(X, \mathcal{R})$ je merljiv prostor. Jednostavnije, X je merljiv prostor ako se familija $\mathcal{R}$ podrazumeva.

Ukoliko se uslov (3) prethodne definicije zameni slabijim uslovom:

[1] Arhimed iz Sirakuze, $A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\zeta$ (oko 287. p.n.e. - 212. p.n.e.), grčki matematičar

[2] Henri Léon Lebesgue (1875-1941), francuski matematičar

(3') Ako $E, F \in \mathcal{R}$, tada $E \cup F \in \mathcal{R}$,

onda je familija $\mathcal{R}$ algebra na skupu X.

Uslov (3) Definicije 2.1.1 naziva se još i *zatvorenost familije $\mathcal{R}$ za prebrojive unije svojih elemenata*. Dakle, σ-algebra je zatvorena za prebrojive unije svojih elemenata. Analogno, algebra je zatvorena za konačne unije svojih elemenata.

Termin *algebra* u prethodnoj Definiciji 2.1.1 preuzet je iz potpunijeg naziva *Bulova*[3] *algebra podskupova od X*.

Primer 2.1.1. Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{R}_0 = \{\emptyset, X\}$ najmanja σ-algebra na X. Takođe, $\mathcal{P}(X)$ je najveća σ-algebra na X.

Prethodni primer pokazuje da na svakom skupu postoje najmanje dve σ-algebre. Za potrebe matematičke analize potrebno je izgraditi sofisticiranije primere.

Na početku dokazujemo osnovna svojstva σ-algebri.

Teorema 2.1.1. *Neka je $\mathcal{R}$ jedna σ-algebra na skupu X. Tada važi:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{R}$;

(2) *Ako $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{R}$;*

(3) *Ako $E_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$;*

(4) *Ako $E, F \in \mathcal{R}$, tada $E \setminus F \in \mathcal{R}$.*

Dokaz. (1) Važi $X \in \mathcal{R}$, te je i $\emptyset = X^c \in \mathcal{R}$.

(2) Ako je $n \in \mathbb{N}$ i $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \emptyset \in \mathcal{R}$, tada sledi da je $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{R}$.

(3) Neka je $E_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^c\right)^c \in \mathcal{R}$.

(4) Neka je $E, F \in \mathcal{R}$. Tada je $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{R}$. □

Ako je $\mathcal{A}$ neka familija podskupova od X, od interesa je posmatrati σ-algebre koje sadrže familiju $\mathcal{A}$. Posebno, važno je postojanje najmanje takve σ-algebre.

[3] George Boole (1815-1864), engleski matematičar

Teorema 2.1.2. *Neka je X neprazan skup i $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Tada je*

$$\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{R} : \mathcal{A} \subset \mathcal{R},\ \mathcal{R} \text{ je } \sigma-\text{algebra}\}$$

najmanja σ-algebra skupa X koja sadrži familiju skupova $\mathcal{A}$.

Dokaz. Prvo dokazujemo da je $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$ jedna σ-algebra. Na osnovu $X \in \mathcal{R}$ za svaku σ-algebru $\mathcal{R}$, sledi da je $X \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Neka je $E \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$ i neka je $\mathcal{R}$ proizvoljna σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A}$. Tada je $E \in \mathcal{R}$, te je i $E^c \in \mathcal{R}$. Prema tome, $E^c \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Na kraju, neka je $E_n \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je $\mathcal{R}$ proizvoljna σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A}$, tada je $E_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, te je i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$. Sledi da je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Ovim smo pokazali da je $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$ jedna σ-algebra na skupu X.

Dokažimo da je $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A}$. Na osnovu konstrukcije sledi da je $\mathcal{A} \subset \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Ako je $\mathcal{R}$ bilo koja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A}$, takođe na osnovu konstrukcije sledi da je $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}$. Ovim smo dokazali da je $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$ najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{A}$. □

Definicija 2.1.2. (Borelovi[4] skupovi) Neka je (X, τ) proizvoljan topološki prostor. Tada je $\mathcal{B}(X) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\tau)$ *familija svih Borelovih skupova* na X.

Teorema 2.1.3. *Neka je $\mathcal{R}$ najmanja σ-algebra koja sadrži zatvorene skupove proizvoljnog topološkog prostora (X, τ). Tada je $\mathcal{R} = \mathcal{B}(X)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih zatvorenih podskupova od X, i neka je $\mathcal{R} = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{F})$. Ako je $F \in \mathcal{F}$, tada je $F^c \in \tau \subset \mathcal{B}(X)$, odakle sledi $F \in \mathcal{B}(X)$. Time je dokazano $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$. Kako je $\mathcal{R}$ najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$, sledi da je $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(X)$.

Neka je $G \in \tau$. Tada je $G^c \in \mathcal{F} \subset \mathcal{R}$, odakle sledi $G \in \mathcal{R}$ i $\tau \subset \mathcal{R}$. Familija $\mathcal{B}(X)$ je najmanja σ-algebra koja sadrži τ, te je $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{R}$. Na kraju proizilazi $\mathcal{B}(X) = \mathcal{R}$. □

Neka su, redom, date sledeće familije intervala u $\mathbb{R}$:
$\mathcal{I}_0$ je familija svih intervala oblika (a, b);
$\mathcal{I}_1$ je familia svih poluzatvorenih intervala oblika $[a, b)$;
$\mathcal{I}_2$ je familija svih poluzatvorenih intervala oblika $(a, b]$;
$\mathcal{I}_3$ je familija svih segmenata oblika $[a, b]$.

[4] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), francuski matematičar

Teorema 2.1.4. *Važi jednakost*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_1) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_2) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_3).$$

Dokaz. Na osnovu inkluzije $\mathcal{I}_0 \subset \tau$, sledi $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Neka je $G \in \tau$. Tada je

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

Prema tome, $G \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0)$. Dokazali smo $\tau \subset \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0)$, te je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0)$. Dakle, prva jednakost tvrđenja je dokazana.

Dokazaćemo i drugu jednakost, a ostale jednakosti prepuštamo čitaocu za samostalni rad. Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je $\{a\} = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{j}, a + \frac{1}{j}\right)$, te je $\{a\} \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0)$. Takođe je $[a, b) = \{a\} \cup (a, b) \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0)$, odakle sledi $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_1) \subset \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0)$. Sa druge strane, $(a, b) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{j}, b\right)$, te je $(a, b) \in \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_1)$. Prema tome, važi i obrnuta inkluzija $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0) \subset \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_1)$. Dokazano je $\sigma\text{–}\mathcal{R}((I_0)) = \sigma\text{–}\mathcal{R}((I_1))$. □

Prethodno tvrđenje bez bitnijih izmena važi u prostoru $\mathbb{R}^*$. Neka su, redom, dati sledeći tipovi intervala u $\mathbb{R}^*$:

$\mathcal{I}_0$ je familija svih intervala oblika (a, b), $[-\infty, b)$, $(a, +\infty]$, $[-\infty, +\infty]$;

$\mathcal{I}_1$ je familia svih poluzatvorenih intervala oblika $[a, b)$, $[-\infty, b)$, $[a, +\infty]$, $[-\infty, +\infty]$;

$\mathcal{I}_2$ je familija svih poluzatvorenih intervala oblika $(a, b]$, $[-\infty, b]$, $(a, +\infty]$, $[-\infty, +\infty]$;

$\mathcal{I}_3$ je familija svih segmenata oblika $[a, b]$, $[-\infty, b]$, $[a, +\infty]$, $[-\infty, +\infty]$.

Teorema 2.1.5. *Važi jednakost*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^*) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_0) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_1) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_2) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_3).$$

Dokazaćemo da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jeste pravi podskup od $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Drugim rečima, postoje podskupovi realne prave koji nisu Borelovi.

Ako je A neki skup, tada je $\mathrm{card}(A)$ kardinalnost skupa A. Poznato je da važi $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^c > c$.

Posledica Aksiome izbora jeste da se svaki skup može dobro urediti. Drugim rečima, na svakom skupu A postoji linearno uređenje $\preceq$, tako da za svako $S \subset A$ postoji $\min S$.

Neka su $(A, \preceq_A)$ i $(B, \preceq_B)$ dva dobro uređena skupa. Preslikavanje $f : A \to B$ je *izotoni izomorfizam*, ako je f bijekcija i ako za svako $x, y \in A$ važi implikacija: iz $x \preceq_A y$ sledi $f(x) \preceq_B f(y)$. U tom slučaju su $(A, \preceq_A)$ i $(B, \preceq_B)$ *izotono izomorfni*.

U familiji svih dobro uređenih skupova jednostavno je proveriti da izotona izomorfnost jeste relacija ekvivalencije, koju označavamo sa Υ. Predstavnik svake klase ekvivalencije u odnosu na relaciju Υ je *ordinal*. Dva ordinala su jednaka, ako pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Drugim rečima, dva ordinala su jednaka ako i samo ako su izotono izomorfna.

Ako je $\alpha = (A, \preceq_A)$ ordinal, tada je $\mathrm{card}(\alpha) := \mathrm{card}(A)$.

Ako su α i β ordinali, onda iz $\alpha = \beta$ sledi $\mathrm{card}(\alpha) = \mathrm{card}(\beta)$. Obrnuta implikacija ne važi.

Ako je $\alpha \neq \beta$, onda važi $\alpha \leq \beta$ ili $\beta \leq A$. Pri tome $\alpha = (A, \preceq_A) \leq (B, \preceq_B) = \beta$, ako postoji 1-1 izotono preslikavanje $g : A \to B$. Ako je $\alpha \leq \beta$ i pri tome $\alpha \neq \beta$, onda je $\alpha < \beta$.

Najmanji beskonačan ordinal jeste $\omega_0 = (\mathbb{N}, \leq)$, pri čemu se posmatra prirodno uređenje skupa $\mathbb{N}$. Tada je $1 + \omega_0 = \omega_0$ i $\omega < \omega_0 + 1$.

Ordinal β je *naslednik*, ako postoji ordinal α tako da je $\alpha + 1 = \beta$. U tom slučaju je α *prethodnik* ordinalu β. Ako ordinal nije nasledni, onda je α *granični* ordinal. Ordinal n ($n \in \mathbb{N}$) je nasledni, dok ordinal ω_0 jeste granični ordinal.

Najmanji neprebrojivi ordinal je ω_1. Ordinal ω_1 je granični ordinal.

Teorema 2.1.6. *Neka je $\mathcal{A}$ familija nekih podskupova skupa X. Ako je* $\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \aleph_0$, *tada je* $\mathrm{card}(\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})) \leq c$.

Dokaz. Ako je $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, neka je

$$\mathcal{B}_\sigma := \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n : B_n \in \mathcal{B} \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\mathcal{B}_\delta := \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n : B_n \in \mathcal{B} \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\mathcal{B}_{\sigma\delta} = (\mathcal{B}_\sigma)_\delta.$$

Neka je sada $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. Ako je α nasledni ordinal i $\alpha < \omega_1$, neka je

$$\mathcal{A}_{\alpha+1} = (\mathcal{A}_\alpha)_{\sigma\delta}.$$

Ako je α granični ordinal i $\alpha \leq \omega_1$, neka je

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} (\mathcal{A}_\alpha)_{\sigma\delta}.$$

Konačno, tvrdimo da je $\sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_{\omega_1}$.

Kako je $\mathcal{A}_\alpha \subset \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$ za svako $\alpha < \omega_1$, sledi da je $\mathcal{A}_{\omega_1} \subset \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$. Sa druge strane, $\mathcal{A}_{\omega_1}$ je σ-algebra, te je $\mathcal{A}_{\omega_1} = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Na osnovu pretpostavki, $\mathrm{card}(\mathcal{A}_1) \leq \aleph_0^{\aleph_0} = c$, $\mathrm{card}(\mathcal{A}_2) \leq c^{\aleph_0} = c$, i tako redom. Stoga je $\mathrm{card}(\mathcal{A}_{\omega_1}) \leq c \cdot c = c$.

Konstrukcija familija $\mathcal{A}_\alpha$ u ovoj teoremi je izvedena *indukcijom po ordinalima*, odnosno *transfinitnom indukcijom.* □

Posledica 2.1.1. $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = c$, $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = c$.

Dokaz. Posmatrajmo familiju svih intervaala $\mathcal{I}_{00}$ koji su oblika (p, q), pri čemu je $p, q \in \mathbb{Q}$ i $p < q$. Tada je $\mathrm{card}(\mathcal{I}_{00}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q}^2) = \aleph_0$. Jednostavno je dokazati $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\text{–}\mathcal{R}(\mathcal{I}_{00})$. Prema prethodnoj Teoremi 2.1.6, sledi da je $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \leq c$.

Sa druge strane, svi intervali oblika (a, b) $(a, b \in \mathbb{R})$ su Borelovi skupovi i ovakvih intervala ima $c \cdot c = c$. Dakle, $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = c$.

Dokaz tvrđenja u prostoru $\mathbb{R}^n$ je analogan. □

Napomena 2.1.1. Imajući u vidu da je $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^c > c = \mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sledi da ima mnogo više podskupova od $\mathbb{R}$ koji nisu Borelovi, nego što ima Borelovih podskupova od $\mathbb{R}$. Analogno, mnogo je više podskupova od $\mathbb{R}^n$, nego što ima Borelovih skupova u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz narednog tvrđenja je očigledan.

Teorema 2.1.7. *Neka je $\mathcal{A}$ sledeća familija intervala u $\mathbb{R}^*$:*

$$\mathcal{A} = \{[a, b), [a, +\infty), [-\infty, b), [-\infty, +\infty] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Neka je $\mathcal{R}$ familija svih konačnih unija uzajamno disjunktnih intervala iz $\mathcal{A}$, odnosno

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} I_j : n \in \mathbb{N}_0;\ I_j \in \mathcal{A} \text{ za svako } j = 1, \ldots n;\ I_i \cap I_j = \emptyset \text{ za } i \neq j \right\}.$$

Tada je $\mathcal{R}$ algebra na $\mathbb{R}^*$. Mogućnost $n = 0$ u stvari znači $\emptyset \in \mathcal{R}$.

Definicija 2.1.3. Algebra $\mathcal{R}$ iz prethodnog tvrđenja je Lebegova algebra na $\mathbb{R}^*$.

Analogno se konstruiše Lebegova algebra na $\mathbb{R}$.

Posledica 2.1.2. *Elementi Lebegove algebre jesu Borelovi skupovi, odnosno važi inkluzija $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

2.2 Monotone familije

U izvesnim slučajevima familija skupova ne zadovoljava sve uslove σ-algebre. Pored očigledne činjenice da nisu sve algebre istovremeno i σ-algebre, postoje i *monotone familije* skupova.

Definicija 2.2.1. Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{M}$ familija podskupova od X. $\mathcal{M}$ je monotona familija, ako važe sledeće dve implikacije:

(1) Ako je $A_n \in \mathcal{M}$ i $A_n \subset A_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$;

(2) Ako je $A_n \in \mathcal{M}$ i $A_n \supset A_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Očigledno, svaka σ-algebra je i monotona familija, dok monotona familija skupova nije obavezno i σ-algebra.

Teorema 2.2.1. *Neka je $\mathcal{A}$ proizvoljna familija podskupova od X. Tada je*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{M} : \mathcal{A} \subset \mathcal{M}, \mathcal{M} \text{ je monotona familija}\}$$

najmanja monotona familija na X koja sadrži familiju $\mathcal{A}$.

Dokaz. Neka je $(A_n)_n$ neopadajući niz skupova u $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ i neka je $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Tada je $(A_n)_n$ neopadajući niz skupova u svakoj monotonoj familiji skupova $\mathcal{M}$ za koju je ispunjeno $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Dakle, $A \in \mathcal{M}$. Sledi da je $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Analogno, ako je $(B_n)_n$ proizvoljna opadajuća familija skupova u $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, onda je $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Na taj način je dokazano da je $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ jedna monotona familija koja sadrži $\mathcal{A}$.

Ako je $\mathcal{M}$ bilo koja monotona familija koja sadrži $\mathcal{A}$, tada je po konstrukciji $\mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}$. Dakle, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ je najmanja monotona familija koja sadrži $\mathcal{A}$. $\square$

Veza između σ-algebri, algebri i monotonih familija skupova, data je sledećom teoremom.

Teorema 2.2.2. *Neka je X neprazan skup, i neka je $\mathcal{R}$ familija podskupova od X, tako da je $\mathcal{R}$ istovremeno i algebra i monotona familija na X. Tada je $\mathcal{R}$ jedna σ-algebra na X.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $\mathcal{R}$ zatvorena za prebrojive unije svojih elemenata. Neka je $(E_n)_n$ proizvoljan niz iz $\mathcal{R}$, i za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. Familija $\mathcal{R}$ je algebra, te sledi da je $A_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Očigledno je $A_n \subset A_{n+1}$, te je $(A_n)_n$ neopadajuća familija u $\mathcal{R}$. Kako je $\mathcal{R}$ monotona familija, sledi da je $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Sa druge strane, skupovna jednakost $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ je očigledna. Dakle, dokazali smo da je $\mathcal{R}$ zatvorena familija za prebrojive unije svojih elemenata, te je $\mathcal{R}$ jedna σ-algebra na X. $\square$

Formulišemo sledeći jednostavan rezultat.

Posledica 2.2.1. *Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{R}$ neka familija podskupova od X. Familija $\mathcal{R}$ je σ-algebra, ako i samo ako je $\mathcal{R}$ algebra i monotona familija.*

Neka je $(A_n)_n$ proizvoljan niz podskupova od X. Definišemo sledeće skupove

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right), \qquad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

Neka je $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je $B_n \subset B_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je $C_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ za $n \in \mathbb{N}$, tada je $C_n \supset C_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Osim toga, važe sledeće ekvivalencije:

$$x \in B \iff (\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \geq n)\, x \in A_k,$$

$$x \in C \iff (\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \geq n)\, x \in A_k.$$

Dakle, $B \subset C$.

Prethodni pojmovi nam omogućavaju nam da definišemo "donju" i "gornju" graničnu vrednost niza skupova. Ako su ove dve granične vrednosti jednake, onda je moguće razmatrati graničnu vrednost posmatranog niza skupova.

Definicija 2.2.2. Neka je $(A_n)_n$ proizvoljan niz podskupova skupa X. Tada je

$$\liminf A_n := B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right), \quad \limsup A_n := C = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Skup B je *donja granična vrednost*, a skup C je *gornja granična vrednost* niza $(A_n)_n$.

Ako je $B = C$, onda je $B = \lim A_n$, i ovaj skup je *granična vrednost* niza $(A_n)_n$.

Teorema 2.2.3. (1) *Ako je* $A_n \subset A_{n+1}$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *tada je* $\lim A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(2) *Ako je* $A_n \supset A_{n+1}$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$, *tada je* $\lim A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Dokaz. (1) Neka je $A_n \subset A_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. U skladu sa prethodnim oznakama, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $B_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, te je $\liminf A_n = B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sa druge strane, iz $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$, sledi da je za svako $n \in \mathbb{N}$ ispunjeno $C \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Specijalno, $C \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = B$. Imajući u vidu da uvek važi $B \subset C$, sledi da je $B = C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim A_n$.

(2) Neka je $A_n \supset A_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. U skladu sa uvedenim oznakama, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $C_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, te je $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Na osnovu $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right)$, sledi da je za svako $n \in \mathbb{N}$ ispunjeno $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subset B$. Specijalno, $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset B$. Kako je $B \subset C$ uvek ispunjeno, sledi da važi $B = C = \lim A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. $\square$

2.3 Merljive funkcije

U ovoj sekciji razmatramo funkcije koje se mogu "izmeriti" u odnosu na datu σ-algebru.

Definicija 2.3.1. Neka je $\mathcal{R}$ jedna σ-algebra na skupu X, i neka je (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f : X \to Y$ je $\mathcal{R}$-merljiva (merljiva u odnosu na $\mathcal{R}$, ili samo merljiva), ako za svaki otvoren skup G od Y važi da je $f^{-1}(G) \in \mathcal{R}$.

Specijalno, neka su (X, τ_1) i (Y, τ_2) topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je $\mathcal{B}(X)$-merljiva (*Borel-merljiva*, *Borelova*), ako za svako $G \in \tau_2$ važi $f^{-1}(G) \in \mathcal{B}(X)$.

Posledica 2.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor i neka je (Y, τ) topološki prosotor. Funkcija $f : X \to Y$ je $\mathcal{R}$-merljiva, ako i samo ako za svako $F \in \mathcal{F}$ važi $f^{-1}(F) \in \mathcal{R}$.*

Dokaz. Sledi na osnovu $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$. □

Teorema 2.3.1. *Neka su (X, τ_1) i (Y, τ_2) topološki prostori. Ako je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija, tada je f Borelova.*

Dokaz. Neka je f neprekidna funkcija i neka je $G \in \tau_2$. Tada je $f^{-1}(G) \in \tau_1 \subset \mathcal{B}(X)$. Time je dokazano da je f Borelova funkcija. □

Uočavamo značaj Borelovih skupova i Borelovih funkcija. Najvažniji skupovi u analizi, odnosno otvoreni i zatvoreni skupovi, jesu Borelovi skupovi. Osim toga, u analizi veoma važnu ulogu imaju neprekidne funkcije, za koje smo upravo proverili da su Borelove funkcije.

Ako funkcija f uzima realne vrednosti, onda je f realna funkcija. Ako f može uzeti vrednoti ∞ ili $+\infty$, tada je f proširena realna funkcija. Interesantno je razmatrati i funkcije koje uzimaju vrednosti iz skupa $\mathbb{C}$, odnosno kompleksne funkcije.

Sledeći rezultat olakšava proveru merljivosti konkretne realne ili proširene realne funkcije.

Teorema 2.3.2. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor i $f : X \to \mathbb{R}^*$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) *f je $\mathcal{R}$-merljiva;*

(2) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{R}$ *za svako* $a \in \mathbb{R}$*;*
(3) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{R}$ *za svako* $a \in \mathbb{R}$*;*
(4) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{R}$ *za svako* $a \in \mathbb{R}$*;*
(5) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{R}$ *za svako* $a \in \mathbb{R}$*.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Neka je funkcija f $\mathcal{R}$-merljiva. Skup $(a, +\infty]$ je otvoren u $\mathbb{R}^*$ za svako $a \in \mathbb{R}$, te je $f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{R}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo da je $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{R}$ za svako $a \in \mathbb{R}$. Tada je $\{x \in X : f(x) \leq b\} = \{x \in X : f(x) > b\}^c \in \mathcal{R}$ za svako $b \in \mathbb{R}$. Sledi da je

$$\{x \in X : f(x) < b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : f(x) \leq b - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{R}$$

za svako $b \in \mathbb{R}$. Na kraju,

$$f^{-1}\big((a, b)\big) = \{x \in X : f(x) > a\} \cap \{x \in X : f(x) < b\} \in \mathcal{R}$$

za svako $a, b \in \mathbb{R}$. Neka je G proizvoljan otvoren skup u $\mathbb{R}$. Tada je $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. Sledi da važi

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\big((a_i, b_i)\big) \in \mathcal{R}.$$

Dakle, funkcija f je $\mathcal{R}$-merljiva.

Dokaz preostalih ekvivalencija ostavljamo čitaocu za samostalan rad. □

Posledica 2.3.2. *Neka je* $(X, \mathcal{R})$ *merljiv prostor i* $f : X \to \mathbb{R}^*$ *neka je* $\mathcal{R}$*-merljiva funkcija. Ako je* $a \in \mathbb{R}^*$*, tada je* $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{R}$*.*

Dokaz. Ako je $a \in \mathbb{R}$, tada je

$$f^{-1}(\{a\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)\right) \in \mathcal{R}.$$

Takođe je

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, +\infty]) \in \mathcal{R}.$$

Slično se dokazuje da je $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{R}$. □

Iz uslova $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{R}$ za svako $a \in \mathbb{R}^*$, ne sledi $\mathcal{R}$-merljivost funkcije f.

Teorema 2.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv porostor, i neka su $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ $\mathcal{R}$-merljive funkcije. Tada su $\mathcal{R}$-merljivi sledeći skupovi:*

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\}, \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}, \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

Dokaz. Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv i gust u $\mathbb{R}$, te je

$$\begin{aligned}&\{x \in X : f(x) < g(x)\} = \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : r < g(x)\}] \in \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Takođe je $\{x \in X : f(x) \geq g(x)\} = [\{x \in X : f(x) < g(x)\}]^c \in \mathcal{R}$ i $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) \leq f(x)\} \in \mathcal{R}$. □

Cilj nam je da dokažemo kako osnovne operacije na merljivim funkcijama takođe daju kao rezultat merljivu funkciju.

Teorema 2.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, neka su $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ $\mathcal{R}$-merljive funkcije, $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ i $\alpha > 0$. Tada su $\mathcal{R}$-merljive i sledeće funkcije:*

$$\lambda + f, \ \lambda f, \ |f|^\alpha, \ f - g, \ f + g,$$

na skupovima na kojima su ove funkcije definisane.

Dokaz. Neka je $a \in \mathbb{R}$. Prema prethodnoj teoremi važi:

$$\{x \in X : f(x) + \lambda > a\} = \{x \in X : f(x) > a - \lambda\} \in \mathcal{R},$$

odakle sledi merljivost funkcije $f + \lambda$.

Ako je $\lambda = 0$, onda je funkcija $\lambda f = 0$ trivijalno merljiva. Pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Tada je

$$\{x \in X : \lambda f(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in X : f(x) > \frac{a}{\lambda}\}, & \lambda > 0 \\ \{x \in X : f(x) < \frac{a}{\lambda}\}, & \lambda < 0 \end{cases} \in \mathcal{R},$$

odakle sledi merljivost funkcije λf.

Neka je $\alpha > 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\{x \in X : |f(x)|^\alpha > a\} &= \begin{cases} \{x \in X : |f(x)| > a^{1/\alpha}, & a \geq 0 \\ X, & a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{x \in X : f(x) > a^{1/\alpha}\} \cup \{x \in X : f(x) < -a^{1/\alpha}\}, & a \geq 0 \\ X, & a < 0 \end{cases} \in \mathcal{R},\end{aligned}$$

odakle sledi merljivost funkcije $|f|^\alpha$.

Ako su funkcije f i g proširene realne, onda je moguće da funkcija $f-g$ nije definisana u svakoj tački skupa X. Neka je $A = \{x \in X : f(x) = +\infty, g(x) = +\infty\}$ i $B = \{x \in X : f(x) = -\infty, g(x) = -\infty\}$. Prema Posledici 2.3.2, skupovi A i B su merljivi, ali je funkcija $f-g$ definisana samo na merljivom skupu $X_1 = X \setminus (A \cup B)$. U tom slučaju posmatramo funkciju $f-g$ na skupu X_1, i na tom skupu dokazujemo njenu merljivost. Funkcija $g+a$ je merljiva, na osnovu već dokazanog dela ove teoreme. Iskoristimo i prethodno dokazanu Teoremu 2.3.3:

$$\{x \in X_1 : f(x) - g(x) > a\} = \{x \in X_1 : f(x) > g(x) + a\} \in \mathcal{R},$$

te je funkcija $f-g$ merljiva. Potpuno analogno, funkcija $f+g$ je merljiva, uz eventualno odbacivanje merljivih skupova na kojima funkcija $f+g$ nije definisana. □

Teorema 2.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, i neka su f, g realne $\mathcal{R}$-merljive funkcije, definisane na X. Tada su merljive i funkcije:*

$$fg, \ \frac{f}{g},$$

na skupovima na kojima su ove funkcije definisane.

Dokaz. Neka su funkcije f i g realne. Tada merljivost funkcije fg sledi na osnovu jednostavne jednakosti $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$.

Skup $X_1 = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$ je merljiv. Dokazujemo merljivost funkcije $\frac{f}{g}$ na skupu X_1. Neka je $a \in \mathbb{R}$. Ako je $a = 0$, onda je

$$\left\{x \in X_1 : \frac{1}{g(x)} > a\right\} = \{x \in X_1 : g(x) > 0\} \in \mathcal{R}.$$

Ako je $a > 0$, onda je

$$\left\{x \in X_1 : \frac{1}{g(x)} > a\right\} = \left\{x \in X_1 : 0 < g(x) < \frac{1}{a}\right\} \in \mathcal{R}.$$

Ako je $a < 0$, onda je

$$\left\{x \in X_1 : \frac{1}{g(x)} > a\right\} = \{x \in X_1 : g(x) > 0\} \cup \left\{x \in X_1 : g(x) < \frac{1}{a}\right\} \in \mathcal{R}.$$

Sledi da je funkcija $\frac{f}{g}$ merljiva na X_1. $\square$

Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{R}^*$, neka je $k \in \mathbb{N}$, i neka je $b_k = \inf\limits_{n \geq k} a_n$. Tada je $(b_k)_k$ neopadajući niz, i stoga postoji

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} b_k = \lim_{k \to \infty} (\inf_{n \geq k} a_n) = \liminf_{n \to \infty} a_n \quad \text{(proveriti poslednju jednakost!)}$$

Analogno se može dokazati da je

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{n \geq k} a_n) = \lim_{k \to \infty} (\sup_{n \geq k} a_n) = \limsup_{n \to \infty} a_n.$$

Koristeći navedene osobine realnih nizova, dokazaćemo još jednu važnu karakterizaciju merljivih funkcija.

Teorema 2.3.6. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor i $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ niz $\mathcal{R}$-merljivih funkcija. Tada su funkcije f, F, f^*, F^*, definisane za $x \in X$ kao*

$$f(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \quad F(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$f^*(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x), \quad F^*(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x),$$

takođe $\mathcal{R}$-merljive funkcije.

Dokaz. Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada merljivost funckija f i F sledi na osnovu

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{R},$$

$$\{x \in X : F(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > a\} \in \mathcal{R}.$$

Ovim smo pokazali da je infimum, odnosno supremum niza merljvih funkcija, takođe merljiva funkcija.

Na osnovu osobina limesa inferiora i limesa superiora, sledi da je

$$f^*(x) = \sup_k \left\{ \inf_{n \geq k} f_n(x) \right\}, \quad F^*(x) = \inf_k \left\{ \sup_{n \geq k} f_n(x) \right\}.$$

Na osnovu merljivosti infimuma i supremuma niza merljivih funkcija, sledi merljivost limesa inferiora i limesa superiora niza merljivih funkcija. $\square$

Posledica 2.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor i $(f_n)_n$ niz proširenih realnih merljivh funkcija na X. Ako postoji funkcija f tako da je $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ za svako $x \in X$, tada je f merljiva funkcija.*

Dokaz. U skladu sa oznakama prethodne teoreme, sledi da za svako $x \in X$ važi

$$f^*(x) = F^*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

te je f merljiva funkcija. □

Teorema 2.3.7. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, i neka su $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ $\mathcal{R}$-merljive funkcije, definisane na X. Tada su merljive i funkcije:*

$$fg, \ \frac{f}{g},$$

na skupovima na kojima su ove funkcije definisane.

Dokaz. Dovoljno je posmatrati proširene realne funkcije, jer smo odgovarajući rezultat za realne funkcije dokazali ranije.

Ako je $x \in X$, neka je

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \le n, \\ n, & f(x) > n, \\ -n, & f(x) < -n, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Na isti način konstruišemo niz $(g_n)_n$. Tada su f_n i g_n realne merljive funkcije, te je i $f_n g_n$ realna merljiva funkcija. Očigledno, $f(x)g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)g_n(x)$ za svako $x \in X$, te je fg merljiva funkcija.

Na osnovu $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ sledi merljivost funkcije $\frac{f}{g}$ na skupu $X_1 = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$. □

Dokazujemo da kompozicija neprekidne i merljive funkcije jeste merljiva funkcija.

Teorema 2.3.8. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, i neka su (Y, τ_1) i (Z, τ_2) topološki prostori. Ako je $f : X \to Y$ jedna $\mathcal{R}$-merljiva funkcija, a $g : Y \to Z$ neprekidna funkcija, tada je $g \circ f : X \to Z$ takođe $\mathcal{R}$-merljiva funkcija.*

Dokaz. Neka je G otvoren skup u Z. Na osnovu neprekidnosti funkcije g sledi da je $g^{-1}(G)$ otvoren skup u Y. Funkcija f je $\mathcal{R}$-merljiva, te je $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G)) \in \mathcal{R}$. Time je dokazana $\mathcal{R}$-merljivost funkcije $g \circ f$. □

Teorema 2.3.9. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, neka je (Y, τ) topološki prostor, i neka je $f : X \to Y$ jedna $\mathcal{R}$-merljiva funkcija. Skup $\Omega \subset \mathcal{P}(Y)$ neka je definisan na sledeći način:*

$$E \in \Omega \text{ ako i samo ako } f^{-1}(E) \in \mathcal{R},$$

pri čemu je $E \subset Y$. Tada je Ω jedna σ-algebra na Y.

Dokaz. Važi $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{R}$, te je $Y \in \Omega$. Ako je $E \in \Omega$, tada je $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathcal{R}$, te je $E^c \in \Omega$. Konačno, neka je $E_n \in \Omega$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f^{-1}\left(\bigcup_n E_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(E_n) \in \mathcal{R}$, te je $\bigcup_n E_n \in \Omega$. Dakle, Ω je σ-algebra na Y. □

Posledica prethodnog tvrđenja je sledeći važan rezultat.

Teorema 2.3.10. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, neka su (Y, τ_1) i (Z, τ_2) topološki prostori, neka je $f : X \to Y$ neka je $\mathcal{R}$-merljiva funkcija, i neka je $g : Y \to Z$ Borelova funkcija. Tada je $g \circ f : X \to Z$ takođe $\mathcal{R}$-merljiva funkcija.*

Dokaz. Neka je Ω familija podskupova od Y, tako da skup $E \subset Y$ pripada familiji Ω, ako i samo ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{R}$. Prema prethodnoj teoremi, Ω je jedna σ-algebra na Y. Na osnovu merljivosti funkcije f sledi da Ω sadrži sve otvorene podskupove od Y. Sa druge strane, $\mathcal{B}(Y)$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od Y, te je $\mathcal{B}(Y) \subset \Omega$.

Neka je G proizvoljan otvoren skup u Z. Funkcija g je Borelova, te sledi da je $g^{-1}(G) \in \mathcal{B}(Y) \subset \Omega$. Tada je $f^{-1}(g^{-1}(G)) \in \mathcal{R}$, prema konstrukciji familije Ω. Sledi da je $g \circ f$ $\mathcal{R}$-merljiva funkcija na X. □

Dokazujemo važnu teoremu o aproksimaciji nenegativne merljive funkcije nizom prostih funkcija.

Ako je $E \subset X$, tada je karakteristična funkcija skupa E definisana kao

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Ako je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, tada je funkcija $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-merljiva ako i samo ako je $E \in \mathcal{R}$.

Funkcija $s : X \to \mathbb{R}$ je prosta, ako je $f(X)$ konačan podskup od $\mathbb{R}$ (isključujemo mogućnost da s bude proširena merljiva funkcija).

Neka je funkcija s prosta, i neka su $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sve različite vrednosti funkcije s. Neka je $A_i = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je $A_i \cap A_j = \emptyset$ ako je $i \neq j$, kao i

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x), \quad x \in X.$$

Lako je proveriti da je funkcija s merljiva ako i samo ako su svi skupovi A_i merljivi.

Teorema 2.3.11. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, i neka je f jedna $\mathcal{R}$-merljiva nenegativna proširena realna funkcija na X. Tada postoji niz $(s_n)_n$ prostih $\mathcal{R}$-merljivih funkcija na X, tako da važi*

(1) $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$ *za svako* $x \in X$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$ *na* X;

(3) *Ako je f ograničena funkcija, tada $(s_n)_n$ konvergira ka f ravnomerno na X.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $t \geq 0$. Postoji jedinstveni prirodan broj $k = k(n, t)$, tako da je $k \cdot \frac{1}{2^n} \leq t < (k+1) \cdot \frac{1}{2^n}$. Definišemo funkcije $\varphi_n : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ za $n \in \mathbb{N}$ na sledeći način:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} k(n,t) \cdot \frac{1}{2^n}, & 0 \leq t < n, \\ n, & t \geq n. \end{cases}$$

Lako je proveriti da je φ_n Borelova funkcija na skupu $[0, +\infty]$. Ako je $0 \leq t \leq n$, tada je $t - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(t) \leq t$. Takođe, za svako $t \geq 0$ važi $0 \leq \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \cdots \leq t$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t$. Funkcija $s_n = \varphi_n \circ f$ je merljiva, kao kompozicija Borelove i merljive funkcije. Nije teško proveriti da je $(s_n)_n$ je traženi niz funkcija.

Neka je sada f ograničena funkcija. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f| \leq n_0$ na X. Primećujemo da je zbog $|\varphi_n(t) - t| \leq \frac{1}{2^n}$ za svako $t \geq 0$ i svako $n \geq n_0$, dokazana ravnomerna konvergencija niza $(s_n)_n$ ka f. $\square$

Teorema 2.3.12. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, i neka je $f : X \to \mathbb{R}^n$ funkcija data koordinatno sa $f = (f_1, \ldots, f_n)$, pri čemu je $f_j : X \to \mathbb{R}$ za svako $j = 1, \ldots, n$. Funkcija f je $\mathcal{R}$-merljiva ako i samo ako su $\mathcal{R}$-merljive sve funkcije f_j , $j = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. $\Longrightarrow$: Pretpostavimo da je $f : X \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{R}$-merljiva funkcija. Ako je $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ projekcija prostora $\mathbb{R}^n$ na j-ti koordinatni prostor $\mathbb{R} = \mathbb{R}_j$, tada je π_j neprekidna funkcija. Naime, ako je $(a, b) \subset \mathbb{R}_j$, tada je $\pi_j^{-1}\Big((a, b)\Big) = \mathbb{R}^{j-1} \times (a, b) \times \mathbb{R}^{n-j}$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Kako je $f_j = \pi_j \circ f$ kompozicija neprekidne i $\mathcal{R}$-merljive fukcije, prema ranijem rezultatu sledi da je f_j $\mathcal{R}$-merljiva funkcija. U ovim razmatranjima je $j \in \{1, \ldots, n\}$ proizvoljan indeks, odakle sledi rezultat.

$\Longleftarrow$: Pretpostavimo sada da su sve funkcije $f_1, \ldots, f_n$ $\mathcal{R}$-merljive. Neka je G otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Tada postoji niz n-pravougaonika $(I_k)_k$ u $\mathbb{R}^n$, tako da je $I_k = (a_1^k, b_1^k) \times \cdots \times (a_n^k, b_n^k)$, i pri tome je $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$. Koristeći merljivost svake funkcije f_j, sledi da je

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(I_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}\Big((a_j^k, b_j^k)\Big) \right) \in \mathcal{R},$$

odakle sledi $\mathcal{R}$-merljivost funkcije f. □

Posledica 2.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, $f = u + iv$ neka je kompleksna funkcija na X, pri čemu su u, v realne funkcije na X. Funkcija f je $\mathcal{R}$-merljiva, ako i samo ako su funkcije u, v $\mathcal{R}$-merljive.*

Dokaz. Familija otvorenih skupova u $\mathbb{C}$ jednaka je familiji otvorenih skupova u $\mathbb{R}^2$. Stoga je merljivost funkcije $f = u+iv : X \to \mathbb{C}$ ekvivalentna merljivosti vektorske funkcije $f = (u, v) : X \to \mathbb{R}^2$. Rezultat sledi na osnovu prethodne teoreme. □

Teorema 2.3.13. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, neka su $u, v : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-merljive funkcije, neka je (Y, τ) topološki prostor, i neka je $F : \mathbb{C} \to Y$ neprekidna funkcija. Definišemo funkciju $h : X \to Y$ na sledeći način:*

$$h(x) = F(u(x), v(x)), \qquad x \in X.$$

Tada je h $\mathcal{R}$-merljiva funkcija.

Dokaz. Ako je $f = u + iv$, onda je $h = F \circ f$. Funkcija f je merljiva prema prethodnoj posledici. Funkcija F je neprekidna, te sledi da je $h = F \circ f$ takođe $\mathcal{R}$-merljiva. $\square$

Posledica 2.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor i neka su $f, g : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{R}$-merljive funkcije. Tada:*

(1) *$|f|$ je merljiva funkcija;*

(2) *$f + g$, $f - g$ i $\frac{f}{g}$ su merljive funkcije (posebno, poslednja funkcija je merljiva na skupu na kojem je definisana);*

(3) *Postoji kompleksna merljiva funkcija α na X, tako da je $|\alpha| = 1$ i $f = \alpha|f|$.*

Dokaz. (1) Sledi iz merljivosti funkcija u i v, kao i jednakosti $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

(2) Posmatramo neprekidne funkcije $F_j : X \to \mathbb{R}^2$ definisane kao $F_1(x, y) = x + y$, $F_2(x, y) = xy$ i $F_3(x, y) = \frac{x}{y}$, i primenimo prethodnu teoremu.

(3) Neka je $X_0 = \{x \in X : f(x) = 0\}$ i definišimo funkciju α na sledeći način:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & x \in X \setminus X_0, \\ 1, & x \in X_0. \end{cases}$$

Tada je α tražena merljiva funkcija (proveriti merljivost!). $\square$

Posledica 2.3.6. *Neka je $(f_n)_n$ niz kompleksnih merljivih funkcija na X, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ na X. Tada je f merljiva funkcija.*

Na kraju, neka je $\chi_E : X \to \mathbb{C}$ karakteristična funkcija skupa $E \subset X$. Lako je proveriti da je χ_E merljiva kompleksna funkcija ako i samo ako je $E \in \mathcal{R}$.

2.4 Pozitivne mere

U ovoj sekciji izučavamo pozitivne mere na σ-algebrama.

Definicija 2.4.1. Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor. Funkcija $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ naziva se pozitivna mera na prostoru X, ako važe svojstva:

(1) $\mu(A) \geq 0$ za svako $A \in \mathcal{R}$;

(2) $\mu(\emptyset) = 0$;

(3) Ako je $(A_n)_n$ niz uzajamno disjunktnih skupova iz $\mathcal{R}$, tada je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

U tom slučaju je $(X, \mathcal{R}, \mu)$ *prostor mere.*

Najvažnija osobina mere jeste svojstvo (3), koje se naziva *prebrojiva aditivnost.*

Teorema 2.4.1. *Neka je μ pozitivna mera na X. Tada važe tvrđenja:*

(1) *Ako su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ uzajamno disjunktni, tada je* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$*;*

(2) *Ako je $A, B \in \mathcal{R}$ i $A \subset B$, tada je $\mu(A) \leq \mu(B)$;*

(3) *Ako je $A_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, i ako je $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, tada je* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$*;*

(4) *Ako je $A_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, i ako je $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, pri čemu je $\mu(A_1) < \infty$, tada je* $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$*;*

(5) *Ako je $A_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Dokaz. (1) Sledi iz definicije pozitivne mere, ako se uzme da je $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$.

(2) Ako je $A \subset B$, tada je $B = A \cup (B \setminus A)$, te je $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(3) Neka je $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, i neka je $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ za $k = 2, 3, \ldots$. Tada su B_k uzajamno disjunktni merljivi skupovi, $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, i $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Sada je

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

(4) Neka je $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, i neka je $C_n = A_1 \setminus A_n$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tada je $C_1 = \emptyset \subset C_2 \subset C_3 \subset \cdots$. Takođe je $A_1 = A_n \cup C_n$ i $\mu(A_1) = \mu(A_n) + \mu(C_n)$. Iz $\mu(A_1) < \infty$ sledi $\mu(A_n) < \infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$, te je $\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$. Takođe je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right) = A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Primenimo već dokazano svojstvo (c), odakle sledi

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Time je dokazano svojstvo (4) ovog tvrđenja.

(5) Neka je $B_1 = A_1$ i $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ za svako $n = 2, 3, \ldots$. Tada je $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$, $B_n \subset A_n$ za svako n, i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Stoga je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

□

Svojstva (3) i (4) predstavljaju osobine *neprekidnosti mere* (za rastuće i opadajuće nizove skupova). Svojstvo (5) je *subaditivnost mere*.

Na nekom skupu $X \neq \emptyset$ se može na trivijalan način definisati mera:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ +\infty, & A \neq \emptyset, \end{cases} \qquad A \subset X.$$

Drugi jednostavan način je mera prebrojavanja. Neka je X proizvoljan neprazan skup i $A \subset X$. Neka je $\mu_d(A)$ jednako broju elemenata skupa A ako je A konačan, i neka je $\mu_d(A) = \infty$ ako je A beskonačan skup. Posebna je važnost mere prebrojavanja na skupu $\mathbb{N}$. Na taj način se teorija integrala povezuje sa teorijom redova, i o tome će biti više reči kasnije.

Neka je $x_0 \in X$. Definišemo meru μ_{x_0} na sledeći način:

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

Mera μ_{x_0} u ovom slučaju je mera jedinične mase skoncentrisane u tački x_0.

Primer 2.4.1. Svojstvo (4) prethodne teoreme ne važi bez minimalne pretpostavke $\mu(A_n) < \infty$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Neka je μ_d mera prebrojavanja na skupu $\mathbb{N}$, $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, te je $\mu_d\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Sa druge strane, $\mu_d(A_n) = \infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Neka je X neprazan skup, $\mathcal{R}$ je σ-algebra na X, i μ je mera na $\mathcal{R}$. Ako je $E \in \mathcal{R}$, tada se $(E, \mathcal{R})$ takođe može smatrati merljivim prostorom na sledeći elementaran način. Ako je $A \subset E$, onda je A merljiv na skupu E, ako i samo ako je $A \in \mathcal{R}$. Odgovarajuća σ-algebra na E je familija skupova

$$\mathcal{R}_E = \{A \in \mathcal{R} : A \subset E\}.$$

Jednostavno je tada i meru μ smatrati merom na skupu E.

Mera μ je *skoncentrisana* na skupu $B \in \mathcal{R}$, ako za svako $F \in \mathcal{R}$ važi $\mu(F) = \mu(F \cap B)$.

Mera μ je *kompletna* na σ-algebri $\mathcal{R}$, ako za svako $E \in \mathcal{R}$ sa svojstvom $\mu(E) = 0$, i svako $F \subset E$, važi $F \in \mathcal{R}$ (tada je, naravno, $\mu(F) = 0$).

Mera μ je *konačana* na merljivom prostoru $(X, \mathcal{R})$, ako je $\mu(X) < \infty$. Mera μ je *σ-konačna* na X, ako postoji niz skupova $(E_n)_n$, tako da je za svako $n \in \mathbb{N}$ ispunjeno $E_n \in \mathcal{R}$ i $\mu(E_n) < \infty$, i važi $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Ako je μ mera na prostoru (X, μ) i $\mu(X) = 1$, tada je μ *verovatnoća* (*verovatnosna mera*) na prostoru $(X, \mathcal{R})$. *Teorija verovatnoće*, kao posebna matematička disciplina, izdvaja se iz teorije mera dodatnom pretpostavkom o verovatnoći (meri) uzajamno nezavisnih događaja. Događaji A i B (predstavljeni kao merljivi podskupovi od X) su uzajamno nezavisni, ako realizacija jednog od ovih događaja ne utiče na realizaciju drugog događaja. Ne postoji standardan matematički uslov nezavisnosti događaja, već svaki model verovatnoće ima svoju interpretaciju nezavisnosti. Ako su A i B uzajamno nezavisni događaji, tada je $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$. Nastavak ovog primera pripada teoriji verovatnoće.

Neka je μ mera na σ-algebri $\mathcal{R}$ u topološkom prostoru (X, τ). Mera μ je *Borelova*, ako je $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{R}$, odnosno ako je μ definisana na Borelovim skupovima prostora X.

Neka je (X, τ) topološki prostor, pri čemu je κ odgovarajuća familija kompaktnih podskupova od X. Neka je $\mathcal{R} \supset \mathcal{B}(X)$ i neka je μ pozitivna

mera na $\mathcal{R}$ (dakle, μ je Borelova mera). Mera μ je *spoljašnje regularna* na $\mathcal{R}$, ako za svako $E \in \mathcal{R}$ važi

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \supset E, V \in \tau\}.$$

Mera μ je *unutrašnje regularna* na $\mathcal{R}$, ako za svako $E \in \mathcal{R}$ važi

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \in \kappa\}.$$

Mera μ je *regularna*, ako je μ i spoljašnje i unutrašnje regularna na $\mathcal{R}$.

Pokazali smo osnovne osobine pozitivnih mera. Važne su Borelove mere na topološkim prostorima, posebno na prostoru $\mathbb{R}^n$. Sa druge strane, mera može biti kompleksna, ili, još opštije, mera čije su vrednosti elementi Banahovog prostora. O svemu ovome biće reči kasnije.

Ranije smo pomenuli pojam kompletne mere. Ako prostor $(X, \mathcal{R}, \mu)$ nije prostor kompletne mere μ, onda se na prirodan način dolazi do veće σ-algebre $\mathcal{R}_1$ na kojoj je μ kompletna mera. Ovaj proces se naziva *kompletizacija merljivog prostora u odnosu na pozitivnu meru.*

Teorema 2.4.2. *Neka je $(X, \mathcal{R}, \mu)$ prostor pozitivne mere μ. Neka je*

$$\mathcal{R}_1 = \{A : (\exists B, C \in \mathcal{R}) A \triangle B \subset C \wedge \mu(C) = 0\},$$

i neka je

$$\mu(A) := \mu(B).$$

Tada je $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$ i $(X, \mathcal{R}_1, \mu)$ je prostor kompletne pozitivne mere μ.

σ-algebra $\mathcal{R}_1$ je kompletizacija σ-algebre $\mathcal{R}$ u odnosu na meru μ.

Dokaz. Uzimajući $A = B \in \mathcal{R}$ i $C = \emptyset$ dolazimo do zaključka $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$. Samim tim je i $\emptyset \in \mathcal{R}_1$.

Za proizvoljne skupove $A, B \subset X$ važi:

$$A^c \triangle B^c = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) = A \triangle B.$$

Dakle, ako $A \in \mathcal{R}_1$, onda $A^c \in \mathcal{R}_1$.

Konačno, neka je $A_n \in \mathcal{R}_1$ za svak $n \in \mathbb{N}$. Tada postoje $B_n, C_n \in \mathcal{R}$ tako da je $A_n \triangle B_n \subset C_n$ i $\mu(C_n) = 0$. Važi

$$\left(\bigcup_n A_n\right) \triangle \left(\bigcup_k B_k\right) = \left(\bigcup_n A_n \setminus \bigcup_k B_k\right) \cup \left(\bigcup_k B_k \setminus \bigcup_n A_n\right)$$
$$\subset \left(\bigcup_n (A_n \setminus B_n\right) \cup \left(\bigcup_n B_n \setminus A_n\right) = \bigcup_n (A_n \triangle B_n) \subset \bigcup_n C_n.$$

Kako je $\mu\left(\bigcup_n C_n\right) = 0$, sledi da je $\bigcup_n A_n \in \mathcal{R}_1$. Time smo dokazali da je $\mathcal{R}_1$ jedna σ-algebra.

Nije teško proveriti da je μ mera na $\mathcal{R}_1$.

Zadržimo sada oznake skupova A, B, C, pri čemu je $\mu(A) = 0$. Neka je $E \subset A$. Tada je $E \triangle B \subset C$. Sledi da je $E \in \mathcal{R}_1$. Time smo dokazali da je μ kompletna pozitivna mera na $\mathcal{R}_1$. $\square$

2.5 Konstrukcija Karateodorija

U određenim konkretnim situacijama, pojavljuju se funkcije na familiji skupova, koje nemaju sve osobine "prave" mere. Primer takve funkcije jeste *spoljna mera.*

Definicija 2.5.1. Neka je X neprazan skup. *Spoljna mera* na skupu X je funkcija $\nu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^*$, koja ima svojstva:

(1) $\nu(\emptyset) = 0$;
(2) $\nu(A) \geq 0$ za svako $A \in \mathcal{P}(X)$;
(3) Ako je $A, B \in \mathcal{P}(X)$ i $A \subset B$, onda je $\nu(A) \leq \nu(B)$;
(4) Ako je $A_n \in \mathcal{P}(X)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Očigledno, svaka mera jeste spoljna mera, dok spoljna mera nije obavezno mera.

Pokazaćemo kasnije da u najvažnijem specijalnom slučaju mera nije definisana na celom partitivnom skupu, već na jednom njegovom pravom podskupu. Stoga spoljna mera ima jednu prednost nad merom: spoljna mera je definisana na $\mathcal{P}(X)$.

Postupak smanjenja $\mathcal{P}(X)$ na manju σ-algebru, na kojoj je ν mera, može se izvesti *konstrukcijom Karateodorija*[5].

Teorema 2.5.1. (Karateodori) *Neka je ν spoljna mera na $\mathcal{P}(X)$, i neka je familija $\mathcal{R}_\nu^*$ definisana na sledeći način.*

[5]Konstantinos Karatheodori (1873-1950), grčki matematičar

Neka je $E \in \mathcal{P}(X)$. Tada $E \in \mathcal{R}_\nu^*$ ako i samo ako za svako $A \subset X$ važi

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c).$$

Tada je $\mathcal{R}_\nu^*$ jedna σ-algebra na X, i pri tome ν je kompletna mera na $\mathcal{R}_\nu^*$.

Dokaz. Spoljna mera ν je subaditivna. Na osnovu $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ sledi da uvek važi $\nu(A) \leq \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c)$. Dakle, $E \in \mathcal{R}_\nu^*$ ako i samo ako za svako $A \in \mathcal{P}(X)$ važi

$$\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c).$$

Iz same definicije familije $\mathcal{R}_\nu^*$ sledi da $E \in \mathcal{R}_\nu^*$ ako i samo ako $E^c \in \mathcal{R}_\nu^*$. Za svako $A \in \mathcal{P}(X)$ važi

$$\nu(A \cap X) + \nu(A \cap X^c) = \nu(A),$$

odakle sledi $X \in \mathcal{R}_\nu^*$.

Neka je $E, F \in \mathcal{R}_\nu^*$. Tada za svako $A \subset X$ važi

$$\begin{aligned}
&\nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \cap (E \cup F)^c) = \\
&= \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \cap E^c \cap F^c) \\
&= \nu(A \cap (E \cup F) \cap E) + \nu(A \cap (E \cup F) \cap E^c) + \nu(A \cap E^c \cap F^c) \\
&= \nu(A \cap E) + \nu(A \cap F \cap E^c) + \nu(A \cap E^c \cap F^c) \\
&= \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) = \nu(A).
\end{aligned}$$

Time je dokazano da je $E \cup F \in \mathcal{R}_\nu^*$, te je $\mathcal{R}_\nu^*$ jedna algebra na X.

Neka je $(E_n)_n$ niz elemenata familije $\mathcal{R}_\nu^*$, i neka je

$$\begin{aligned}
&F_1 = E_1 \quad (\in \mathcal{R}_\nu^*) \\
&F_2 = E_2 \setminus F_1 \quad (\in \mathcal{R}_\nu^*), \\
&F_3 = E_3 \setminus (F_1 \cup F_2) \quad (\in \mathcal{R}_\nu^*), \\
&\vdots \\
&F_n = E_n \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}) \quad \in (\mathcal{R}_\nu^*), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Očigledno je $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ za svako $n \in \mathbb{N}$, odakle sledi $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Takođe je $F_i \cap F_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Iz činjenice $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, sledi da za svako $A \in \mathcal{P}(X)$ važi

$$\begin{aligned} \nu(A \cap (F_1 \cup F_2)) &= \nu(A \cap (F_1 \cup F_2) \cap F_1) + \nu(A \cap (F_1 \cup F_2) \cap F_1^c) \\ &= \nu(A \cap F_1) + \nu(A \cap F_2). \end{aligned}$$

Sada je lako dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap F_k).$$

Pri tome je $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{R}_\nu^*$. Za svako $A \in \mathcal{P}(X)$ važi

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)\right) + \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap F_k) + \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c\right) \end{aligned}$$

Važi $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, odakle sledi $A \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k\right)^c \supset A \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c$. Stoga je, na osnovu monotonosti spoljne mere ν,

$$\nu(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap F_k) + \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c\right).$$

Ako $n \to \infty$, onda je

$$\begin{aligned} \nu(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap F_k) + \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c\right) \\ &\geq \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)\right) + \nu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c\right). \end{aligned}$$

Time je dokazano $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{R}_\nu^*$, te je $\mathcal{R}_\nu^*$ σ-algebra na $\mathbb{R}^*$.

Poslednje nejednakosti su u stvari jednakosti! Dakle, ako je $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ i $F_k \cap F_n = \emptyset$ za $k \neq n$, onda očigledno važi

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(F_k),$$

i stoga je ν mera na $\mathcal{R}_\nu^*$.

Na kraju, neka je $E \in \mathcal{R}_\nu^*$, $\nu(E) = 0$, $F \subset E$ i $A \subset X$. Tada je

$$\nu(A) \leq \nu(A \cap F) + \nu(A \cap F^c) \leq \nu(A \cap E) + \nu(A) \leq \nu(E) + \nu(A) = \nu(A).$$

Sledi da je $F \in \mathcal{R}_\nu^*$, te je ν kompletna mera na $\mathcal{R}_\nu^*$. □

Formilišemo interesantnu posledicu.

Posledica 2.5.1. *Neka važe svi uslovi prethodne teoreme. Ako je $E \subset X$ i $\nu(E) = 0$, tada je $E \in \mathcal{R}_\nu^*$.*

Dokaz. Razmotriti poslednji niz nejednakosti u dokazu prethodne teoreme, uz pretpostavku $E = F$. □

Konstruisanje konkretne spoljne mere na prostoru $\mathbb{R}$, ili $\mathbb{R}^n$, najčešće je u vezi sa izučavanjem Lebegove mere. Više o ovome u narednoj glavi.

Glava 3

Lebegova mera

3.1 Lebeg-Stiltjesova mera na $\mathbb{R}$

U ovoj sekciji izučavamo specijalne pozitivne mere na prostoru $\mathbb{R}^*$. Najpre definišemo meru μ_g na elementarnim intervalima u $\mathbb{R}^*$. Zatim definišemo, na prirodan način, meru μ_g na Lebegovoj algebri $\mathcal{R}$ u prostoru $\mathbb{R}^*$. Na osnovu mere μ_g na $\mathcal{R}$, definišemo spoljnu meru μ_g^* na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^*)$. Kontrukcijom Karateodorija redukujemo skup $\mathcal{P}(\mathbb{R}^*)$ na manju familiju $\mathcal{R}^*_{\mu_g^*} \equiv \mathcal{R}^*_{\mu_g}$, tako da spoljna mera postaje prava mera na familiji $\mathcal{R}^*_{\mu_g}$. Pri tome je

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{R}^*_{\mu_g} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^*).$$

Neka je $\mathcal{A}$ familija elementarnih intervala u $\mathbb{R}^*$:

$$\mathcal{A} = \{[a,b), [a,+\infty], [-\infty,b), [-\infty,+\infty] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Neka je $\mathcal{R}$ Lebegova algbra na $\mathbb{R}^*$, definisana kao

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} I_j : n \in \mathbb{N}_0, I_j \in \mathcal{A}\ (j = 1, \ldots, n),\ I_j \cap I_k = \emptyset \text{ za } j \neq k \right\}.$$

Uslov $n \in \mathbb{N}_0$ u prethodnoj definiciji omogućava $n = 0$, odnosno $\emptyset \in \mathcal{R}$.

Neka je $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ funkcija, koja je neopadajuća i neprekidna s leva na $\mathbb{R}^*$. Da bi izbegli trivijalnost, pretpostavimo da g nije konstantna funkcija.

Neprekidnost s leva funkcije g je od suštinskog značaja, kao što će pokazati kasnija razmatranja. Ukoliko bi posmatrali intervale tipa $(a,b]$, onda bi bilo neophodno pretpostaviti neprekidnost s desna funkcije g.

Definišemo funkciju $\mu_g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ na sledeći način:

$$\mu([a,b)) = g(b) - g(a),\ \mu_g([a,+\infty]) = g(+\infty) - g(a),$$
$$\mu_g([-\infty,b)) = g(b) - g(-\infty),\ g([-\infty,+\infty]) = g(+\infty) - g(-\infty).$$

Iz činjenice da je funkcija g neopadajuća, sledi da je sa $I \mapsto \mu_g(I)$ definisana nenegativna funkcija za svako $I \in \mathcal{A}$, pri čemu vredost funkcije μ_g uvek pripada skupu $\mathbb{R}^*$.

Definisaćemo funkciju μ_g na skupu $\mathcal{R}$ na sledeći način. Neka je $\mu_g(\emptyset) = 0$. Neka je $E \in \mathcal{R}$, $E \neq \emptyset$ i $E = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{R}$, pri čemu je $I_j \in \mathcal{A}$, i za svako $i \neq j$ važi $I_i \cap I_j = \emptyset$. Tada, po definiciji, neka je

$$\mu_g(E) = \mu_g\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) := \sum_{j=1}^{n} \mu_g(I_j).$$

Treba dokazati da vrednost $\mu_g(E)$ ne zavisi od reprezentacije skupa E elementarnim intervalima iz $\mathcal{A}$. Neka postoje dve takve reprezentacije, odnosno

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} J_j,$$

pri čemu je $I_i, J_j \in \mathcal{A}$, $I_i \cap I_k = \emptyset$ za $i \neq k$, i $J_j \cap J_k = \emptyset$ za $j \neq k$. Tada je

$$I_i = I_i \cap E = I_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} J_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} (I_i \cap J_j),$$

i analogno

$$J_j = \bigcup_{i=1}^{n} (I_i \cap J_j).$$

Sledi da je

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (I_i \cap J_j) = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} (I_i \cap J_j).$$

Skupovi $I_i \cap J_j$ su uzajamno disjunknti, odakle, promenom redosleda sabiranja ako je potrebno, proizilazi da važi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu_g(I_i) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \mu_g(I_i \cap J_j)\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_g(I_i \cap J_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \mu_g(J_j).\end{aligned}$$

Sledi da $\mu_g(E)$ ne zavisi od izbora elementarnih intervala.

Funkcija μ_g je konačno aditivna: ako je $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}$ i $E_i \cap E_j = \emptyset$ za $i \neq j$, onda je

$$\mu_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_g(E_j).$$

Naime, u ovom slučaju je $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I_j$, pri čemu su I_j uzajamno disjunktni elementarni intervali.

Dokazaćemo da je μ_g mera na Lebegovoj algebri $\mathcal{R}$. Iz $\mu_g(\emptyset) = 0$ i $\mu_g(E) \geq 0$ za svako $E \in \mathcal{R}$, preostaje da dokažemo prebrojivu aditivnost funkcije μ_g. Familija $\mathcal{R}$ očigledno nije σ-algebra, odnosno nije zatvorena za prebrojive unije svojih elemenata. Stoga prebrojiva aditivnost funkcije μ_g u stvari predstavlja implikaciju:

Ako je $E_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, $E_n \cap E_k = \emptyset$ za $n \neq k$, i ako je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$, onda je

$$\mu_g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g(E_n).$$

Razlikujemo više slučajeva.

Neka je, na primer, $E_n = [a_n, b_n)$ i $E = [a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Na osnovu monotonosti funkcije g i na osnovu disjunktnosti intervala $[a_n, b_n)$ jednostavno sledi nejednakost

$$\mu_g(E) = g(b) - g(a) \geq \sum_{n=1}^{\infty}[g(b_n) - g(a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g([a_n, b_n)).$$

Da bi dokazali suprotnu nejednakost, pretpostavimo da je $\epsilon > 0$ i $0 < \delta < b - a$. Funkcija g je neprekidna s leva u svakoj tački a_k. Stoga za svako $k \in \mathbb{N}$

postoji $\epsilon_k > 0$, tako da važi

$$|g(a_k) - g(a_k - \epsilon_k)| < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Tada je

$$[a, b-\delta] \subset [a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_k - \epsilon_k, b_k).$$

Segment $[a, b-\delta]$ je kompaktan, te postoji konačno mnogo ovakvih intervala, odnosno

$$[a, b-\delta] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (a_k - \epsilon_k, b_k).$$

Ako eventualno prenumerišemo intervale, bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti da je

$$a_1 - \epsilon_1 < a < b_1,\ a_n - \epsilon_n < b - \delta < b_n,\ a_{k+1} - \epsilon_{k+1} < b_k < b_{k+1}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Na osnovu monotonosti funkcije g sledi

$$\begin{aligned}
& g(b-\delta) - g(a) \leq g(b_n) - g(a_1 - \epsilon_1) = \\
& = g(b_1) - g(a_1 - \epsilon_1) + \sum_{k=1}^{n-1} [g(b_{k+1} - g(b_k)] \\
\leq\ & \sum_{k=1}^{n} [g(b_k) - g(a_k - \epsilon_k)] = \sum_{k=1}^{n} [g(b_k) - g(a_k)] + \sum_{k=1}^{n} [g(a_k) - g(a_k - \epsilon_k)] \\
\leq\ & \sum_{k=1}^{n} [g(b_k) - g(a_k)] + \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} [g(b_k) - g(a_k)] + \epsilon.
\end{aligned}$$

Ako sada $\epsilon \to 0$ i $\delta \to 0$, onda sledi

$$\mu_g([a, b)) = g(b) - g(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [g(b_k) - g(a_k)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g([a_k, b_k)).$$

Time je dokazano, u specijalnom slučaju (1), da je μ_g prebrojivo aditivna na Lebegovoj algebri $\mathcal{R}$.

Ostale slučajeve prepuštamo čitaocu za samostalan rad.

Mera μ_g je *Lebeg-Stiltjesova*[1] *mera.*

[1]Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), holandski matematičar

Pokazaćemo da je neprekidnost funkcije g s leva od suštinske važnosti. Neka je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i neka je $(b_n)_n$ niz sa sledećim svojstvima: $a < b_1 < b_2 < \cdots < b$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Tada je

$$[a, b) = [a, b_1) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_{n+1}) \right).$$

Kako je μ_g mera na Lebegovoj algebri $\mathcal{R}$, sledi da je

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= \mu_g([a, b)) = g(b_1) - g(a) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (g(b_{k+1} - g(b_k)) \\ &= \lim_{n\to\infty} g(b_{n+1}) - g(a). \end{aligned}$$

Sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} g(b_{n+1}) = g(b)$, te je funkcija g neprekidna s leva u tački b.

Definicija 3.1.1. Funkcija $\mu_g^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^*) \to \mathbb{R}^*$ definisana je na sledeći način:

$$\mu_g^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ E_n \in \mathcal{R} \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \right\},$$

pri čemu je $\mathcal{R}$ Lebegova algebra na $\mathbb{R}^*$.

Teorema 3.1.1. *Funkcija μ_g^* je spoljna mera na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^*)$. Pri tome, $\mu_g^*(E) = \mu_g(E)$ za svako $E \in \mathcal{R}$.*

Dokaz. Osobine (1), (2) i (3) iz definicije spoljne mere trivijalno važe za funkciju μ_g^*. Preostaje da dokažemo svojstvo (4), odnosno

$$\mu_g^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g^*(A_n),$$

za svaki niz $(A_n)_n$ podskupova od $\mathbb{R}^*$.

Neka je $A_n \subset \mathbb{R}^*$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je $\mu_g^*(A_n) = +\infty$ za neko $n \in \mathbb{N}$, onda je tvrđenje dokazano. Stoga pretpostavimo da je $\mu_g^*(A_n) < \infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Za svaki skup A_n i svako $\epsilon > 0$ postoji niz $(E_{n,k})_k$, tako da važi $E_{n,k} \in \mathcal{R}$ za svako $n, k \in \mathbb{N}$, kao i

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n,k} \quad \text{i} \quad \mu_g^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g(E_{n,k}).$$

Neka je $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Tada je $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{n,k}$ jedno pokrivanje skupa A. Na osnovu osobina infimuma iz definicije funkcije μ_g^*, sledi da je

$$\begin{aligned} \mu_g^*(A) &= \mu_g^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_g(E_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_g^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g^*(A_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Ako $\epsilon \to 0$, sledi da je

$$\mu_g^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g^*(A_n).$$

Time je dokazano svojstvo (4) spoljne mere.

Nastavljamo sa dokazom drugog dela teroema. Ako je $E \in \mathcal{R}$, tada je E sam sebi pokrivač, te je $\mu_g^*(E) \leq \mu_g(E)$. Ako je $E_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, onda je $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \cap E_n)$. Tada je, na osnovu subaditivnosti mere,

$$\mu_g(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g(E \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g(E_n).$$

Prethodna nejednakost važi za svako pokrivanje skupa E, te je $\mu_g(E) \leq \mu_g^*(E)$. $\square$

Spoljna mera μ_g^* je *indukovana merom* μ_g.

Ukoliko je μ_g σ-konačna na $\mathcal{R}$, onda je μ_g^* takođe σ-konačna na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^*)$.

Familija $\mathcal{R}_{\mu_g}^*$ predstavlja σ-algebru skupova koji su Lebeg-Stiltjes merljivi, a μ_g^* je *Lebeg-Stiltjesova (i kompletna) mera* na $\mathcal{R}_{\mu_g}^*$.

Na osnovu prethodne konstrukcije, sledi da važe sledeće inkluzije:

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) \subset \mathcal{R}_{\mu_g}^* \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^*).$$

3.2 Lebegova mera na $\mathbb{R}$

Najvažnija mera na realnoj pravoj jeste Lebegova mera. Ako je $g(x) = x$ za svako $x \in \mathbb{R}^*$, onda se mera μ_g^* naziva *Lebegova mera* na $\mathbb{R}^*$, a označava se sa

m. Familija svih Lebeg-merljivih skupova na $\mathbb{R}^*$ označava se sa $\mathcal{R}_m^*$, ili samo sa $\mathcal{R}^*$.

Sada je jednostavno (po potrebi) isključiti tačke $-\infty$ i $+\infty$ iz razmatranja, čime se dobija Lebegova mera na $\mathbb{R}$. Nadalje razmatramo samo Lebegovu meru na $\mathbb{R}$. Na osnovu konstrukcije u prethodnoj sekciji, važi

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Na osnovu osobina Lebeg-Stiltjesove mere, sledi očigledan rezultat.

Posledica 3.2.1. *Neka je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Tada važi*
(1) $m(\{a\}) = 0$;
(2) $m([a, b)) = m((a, b)) = m((a, b]) = m([a, b]) = b - a$;
(3) $m(\mathbb{R}) = +\infty$.

Ako je $E \subset \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$, tada je $E + c = \{x + c : x \in E\}$ translacija skupa E za (vektor, u ovom slučaju broj) c.

Teorema 3.2.1. *Ako je $E \in \mathcal{R}^*$ i $c \in \mathbb{R}$, tada je $E + c \in \mathcal{R}^*$ i $m(E + c) = m(E)$. Drugim rečima, Lebegova mera je translaciono invarijantna.*

Dokaz. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Podsetimo da $\mathcal{A}$ označava familiju svih intervala u $\mathbb{R}$, koji su zatvoreni sa leve strane i otvoreni sa desne strane. Ako je $E \in \mathcal{A}$, tada je $E + c \in \mathcal{A}$ i $m(E + c) = m(E)$. Dakle, Lebegova mera m je translaciono invarijanta na familiji $\mathcal{A}$. Sledi da je Lebegova mera translaciono invarijantna i na Lebegovoj algebri $\mathcal{R}$.

Neka je $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^*)$ i neka je $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, gde je $E_i \in \mathcal{R}$ za svako $i \in \mathbb{N}$. Sledi da je $E + c \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i + c)$, odakle sledi da je spoljna mera m^* indukovana Lebegovom merom, takođe translaciono invarijantna. Na kraju, trivijalno sledi da je Lebegova mera translaciono invarijantna na $\mathcal{R}^*$. $\square$

Dokazujemo sledeću važnu karakterizaciju Lebeg merljivih skupova.

Teorema 3.2.2. *Za svako $A \in \mathcal{R}^*$ važi:*

$$m(A) = \inf\{m(G) : A \subset G, G \text{ je otvoren}\}.$$

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{R}^*$ i $\alpha = \inf\{m(G) : A \subset G, G \text{ je otvoren}\}$. Ako je G otvoren onda je on Lebeg-merljiv. Stoga, iz $A \in \mathcal{R}^*$ i $A \subset G$ sledi $m(A) \leq m(G)$. Prema tome, $m(A) \leq \alpha$.

Ako je $m(A) = +\infty$, onda je trivijalno $m(A) = \alpha = +\infty$. Stoga pretpostavimo da je $m(A) < \infty$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji familja $(E_n)_n$ iz $\mathcal{R}$, tako da je $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n < m(A) + \frac{\epsilon}{2} < \infty$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ je onda $m(E_n) < \infty$. Svaki skup E_n je konačna disjunktna unija elementarnih intervala iz $\mathcal{A}$. Stoga je $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k)$. Neka je $I_k = \left(a_k - \frac{\epsilon}{2^k}, b_k\right)$. Tada je $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ otvoren skup, $A \subset G$ i $m(G) < m(A) + \epsilon$. Time je dokazano $m(A) = \alpha$. □

Na osnovu prethodne teoreme sledi da je Lebegova mera *spoljašnje regularna.*

Posledica 3.2.2. *Skup $A \subset \mathbb{R}$ je Lebegove mere nula, ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji najviše prebrojiv niz uzajamno disjunktnih i ograničenih intervala $(a_k, b_k)_k$, tako da je $A \subset \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$ i $\sum\limits_k m(b_k - a_k) < \epsilon$.*

Dokaz. Otvoren skup G u prethodnoj teoremi je najviše prebrojiva unija disjunktnih intervala I_k. Ako je $m(G) < \epsilon$, tada su svi intervali I_k ograničeni. □

Primećujemo da prethodna posledica bitno pojednostavljuje skupove Lebegove mere nula. Razumevanje ove posledice suštinski ne zahteva poznavanje teorije mere. Stoga se ova posledica često uzima za definiciju skupova Lebegove mere nule.

Dokazujemo važan rezultat o aproksimaciji Lebeg merljivog skupa na $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2.3. *Za svako $A \in \mathcal{R}^*$ i za svako $\epsilon > 0$ postoje otvoren skup G i zatvoren skup F, tako da važi:*

$$F \subset A \subset G \quad \text{i} \quad m(G \setminus F) < \epsilon.$$

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{R}^*$ i $\epsilon > 0$. Tada je $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, pri čemu je $A_k = A \cap [-k, k]$. Prema prethodnoj teoremi, za svako $k \in \mathbb{N}$ postoje otvoreni skupovi G_k, tako da je $A_k \subset G_k$ i $m(G_k \setminus A_k) < \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$. Neka je $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. Skup G je otvoren i važi $G \setminus A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A_k)$, te je

$$m(G \setminus A) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Na osnovu prethdnog, postoji otvoren skup H, tako da je $A^c \subset H$ i $m(H \setminus A^c) < \frac{\epsilon}{2}$. Skup $F = H^c$ je zatvoren i važi $F \subset A$. Sada je $A \setminus F = H \setminus A^c$ i $m(A \setminus F) < \frac{\epsilon}{2}$. Prema tome, $F \subset A \subset G$ i $m(G \setminus F) < \epsilon$. □

Posledica 3.2.3. *Za svako $A \in \mathcal{R}^*$ važi:*

(1) $m(A) = \sup\{m(F) : F \subset A, F \text{ je zatvoren}\}$.

(2) $m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A, K \text{ je kompaktan}\}$.

Svojstvo (2) je *unutrašnja regularnost* Lebegove mere. Dakle, Lebegova mera je *regularna.*

Dokaz. (1) Sledi na osnovu prethodne teoreme.

(2) Neka je $A \in \mathcal{R}^*$ i $\epsilon > 0$. Tada postoji zatvoren skup F sa svojstvima $F \subset A$ i $m(A \setminus F) < \frac{\epsilon}{2}$. Važi $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, gde je $K_n = F \cap [-n, n]$. Skupovi K_n su kompaktni. Tada su i svi skupovi $H_n = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ kompaktni.

Ako je $m(F) = +\infty$, tada je $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(H_n) = \infty$. U ovom slučaju trivijalno važi tvrđenje (2).

Neka je $m(F) < \infty$. Tada je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(K_n)$ konvergentan. Stoga postoji broj $N \in \mathbb{N}$ tako da je $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} m(K_n) < \epsilon/2$. Skup H_N je kompaktan, $H_N \subset A$ i $m(A \setminus H_N) < \epsilon$. Dakle, i u ovom slučaju važi (2). □

Skup A je *tipa F_σ*, ako je A najviše prebrojiva unija zatvorenih skupova. Skup A je *tipa G_δ*, ako je A najviše prebrojiv presek otvorenih skupova. Skupovi tipa F_σ i G_δ su očigledno Borelovi.

Posledica 3.2.4. *Ako je $A \in \mathcal{R}^*$, onda postoje: skup B tipa F_σ i skup C tipa G_δ, tako da je $B \subset A \subset C$ i $m(C \setminus B) = 0$.*

Dokaz. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje: otvoren skup G_n i zatvoren skup F_n, tako da je $F_n \subset A \subset G_n$ i $m(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Neka je $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ i $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Tada je B skup tipa F_σ, C je skup tipa G_δ, i $B \subset A \subset C$. Takođe je $m(C \setminus B) < \frac{1}{n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, te je $m(C \setminus B) = 0$. □

Primer 3.2.1. Neka je $(\delta_n)_n$ niz brojeva sa svojstvom $1 = \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Formiramo skupove $(E_n)_n$ induktivno, na sledeći način.

Neka je $E_0 = [0, 1]$. Iz segmenta E_0 izbacimo centralni otvoreni interval dužine $1 - \delta_1$. Preostaju dva segmenta dužine po $\frac{\delta_1}{2}$. Uniju ova dva segmenta označimo sa E_1.

Pretpostavimo da smo konstruisali skup E_n, koji je unija 2^n uzajamno disjunktnih segmenta dužina po $\frac{\delta_n}{2^n}$. Iz svakog od ovih segmenata izbacimo centralni otvoreni interval, tako da svaki od novih 2^{n+1} segmenata ima dužinu jednaku $\frac{\delta_{n+1}}{2^{n+1}}$. To je moguće učiniti zbog $\delta_{n+1} < \delta_n$. Skup E_{n+1} je unija dobijenih 2^{n+1} segmenata.

Očigledno, postupak je moguće nastaviti za svako $n \in \mathbb{N}$. Svi skupovi E_n su Borelovi, te je Borleov i skup

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Zbog $m(E) \leq m(E_n) = \delta_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi da je $m(E) = 0$.

Ostavljamo čitaocu da proveri sledeće činjenice:

(1) Skup E je kompaktan;

(2) Skup E je *savršen*, odnosno svaka tačka skupa E je istovremeno i tačka nagomilavanja skupa E, i van skupa E ne postoje tačke nagomilavanja skupa E;

(3) Skup E je nigde gust, odnosno $\operatorname{int}(\operatorname{cl} E) = \emptyset$;

(4) Skup E je neprebrojiv.

Ako je $\delta_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je E poznati Kantorov[2] "trijadski" skup na $[0, 1]$.

Dakle, skup E je Lebeg merljiv, $m(E) = 0$ i Lebegova mera je kompletna. Sledi da je svaki podskup od E takođe Lebeg marljiv. Dakle, Lebeg merljivih skupova ima najmanje koliko i podskupova od E, a to je 2^c.

Vratimo se lancu implikacija

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Očigledno je $\mathcal{R} \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Kardinalnost familije Borelovih skupova na $\mathbb{R}$ jednaka je c. Sa druge strane, na osnovu prethodnog primera, $\operatorname{card}(\mathcal{R}^*) = 2^c$. Prema tome, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{R}^*$.

[2]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), nemački matematičar

Međutim, $\mathcal{R}^* \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Štaviše, *nije moguće* Lebegovu meru proširiti na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, tako da "proširena" mera ostane translatorno invarijantna. Ovo tvrđenje se suštinski bazira na Aksiomi izbora. U tu svrhu dokazujemo pomoćni rezultat.

Teorema 3.2.4. *Postoji skup $A \subset [-1,1]$ i niz brojeva $(r_i)_i$, tako da su skupovi $A_i = A + r_i$ $(i \in \mathbb{N})$ uzajamno disjunktni i da je*

$$[-1,1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset [-3,3].$$

Dokaz. Na skupu $[-1,1]$ definišemo relaciju $\sim$ na sledeći način: za $x, y \in [-1,1]$ neka je $x \sim y$ ako i samo ako $x - y \in \mathbb{Q}$. Lako je proveriti da je $\sim$ jedna relacija ekvivalencije na skupu $[-1,1]$. Relacija $\sim$ razbija skup $[-1,1]$ na disjunktne klase. Neka je skup A takav, da sadrži tačno jednog predstavnika svake klase ekvivalencije relacije $\sim$. Konstrukcija skupa A je moguća na osnovu aksiome izbora.

Neka je $(r_i)_i$ skup svih racionalnih brojeva iz segmenta $[-2,2]$. Za svako $i \in \mathbb{N}$ neka je $A_i = A + r_i$. Kako je $A \subset [-1,1]$, sledi da je $A_i \subset [-3,3]$.

Pretpostavimo da postoje $i, j \in \mathbb{N}$, tako da je $A_i \cap A_j = (A+r_i) \cap (A+r_j) \neq \emptyset$. Tada postoje brojevi $a_1, a_2 \in A$ sa svojstvom $a_1 + r_i = a_2 + r_j$, te je $a_1 - a_2 = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$. Skup A sadrži po jednog predstavnika iz svake klase ekvivalencije relacije $\sim$, pa mora biti $a_1 = a_2$. Stoga je $r_i = r_j$ i $i = j$. Na kraju, ako je $i \neq j$, onda je $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Očgledno je $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subset [-3,3]$. Ako je $x \in [-1,1]$, tada postoji tačno jedna klasa ekvivalencije relacije $\sim$ koja sadrži x. Prema tome, postoji tačno jedan elemenat $a \in A$ sa svojstvom $x \sim a$. Dakle, postoji $r_k \in \mathbb{Q}$ tako da je $x = a + r_k \in A_k$. Sledi $[-1,1] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. $\square$

Teorema 3.2.5. *Ne postoji mera $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ za koju važe svojstva:*

(1) *μ je translacino invarijatna, odnosno za svako $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ i svako $c \in \mathbb{R}$ je $\mu(A + c) = \mu(A)$.*

(2) *Ako je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \leq b$, onda je $\mu([a,b]) = b - a$.*

Dokaz. Neka su A i $A_j = A + r_j$ ($j \in \mathbb{N}$) skupovi određeni prethodnim tvrđenjem. Tada je $\mu(A_j) = \mu(A)$ za svako $j \in \mathbb{N}$. Takođe je

$$2 = \mu([-1,1]) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu([-3,3]) = 6.$$

Dakle, red $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ konvergira broju koji je između 2 i 6, odakle sledi $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0$. Međutim, $\mu(A_j) = \mu(A)$ za svako $j \in \mathbb{N}$, odakle sledi da mora biti $\mu(A) = 0$. To takođe nije moguće, jer je suma navedenog reda najmanje 2. Dakle, ne postoji mera μ na familiji $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sa navedenim svojstvima. □

Imajući u vidu veliku važnost navedenih rezultata, formulišemo sledeću posledicu.

Posledica 3.2.5. *Postoji Lebeg-merljiv podskup od $\mathbb{R}$, koji nije Borelov.*

Postoji podskup od $\mathbb{R}$ koji nije Lebeg-merljiv.

3.3 Lebegova mera na $\mathbb{R}^n$

U slučaju konstrukcije Lebegove mere na $\mathbb{R}^n$ koristimo uprošćen pristup, obzirom da nam sada Lebeg-Stiltjesova mera nije od važnosti. Radi preglednosti, sa m_1 označavamo Lebegovu meru na $\mathbb{R}$.

Neka je $\mathcal{A}$ familija svih n-intervala $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, pri čemu je I_j bilo koji od intervala oblika $(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$ u $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \leq b$. Tada je, po definiciji,

$$m_n(I) := m_1(I_1) \cdot \ldots \cdot m_1(I_n).$$

Neka je $E \subset \mathbb{R}^n$. Definišemo funkciju m_n^* na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:

$$m_n^*(E) = \inf\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ E_j \in \mathcal{A}, j = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Funkcija m_n^* je *Lebegova spoljna mera* na $\mathbb{R}^n$.

Dokazujemo da m_n^* zaista jeste spoljna mera u smislu ranije definicije ovog pojma. Dakle, važi sledeći rezultat.

Teorema 3.3.1. *Funkcija m_n^* je spoljna mera na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, pri čemu je*

$$m_n^*\left(\prod_{j=1}^{n} I_j\right) = m_1(I_1)\cdot\ldots\cdot m_1(I_n)$$

za svaki n-interval $\prod\limits_{j=1}^{n} I_j$ u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. U potpunosti na isti način kao u Teoremi 3.1.1. □

Povežimo novo gradivo sa već poznatim činjenicama. U ovom trenutku je čitalac upoznat sa osobinama Žordanove mere u prostoru $\mathbb{R}^n$, koja je tema izučavanja u okviru drugih kurseva. Uočavamo razliku u definiciji Žordanove spoljne mere i Lebegove spoljne mere skupova u $\mathbb{R}^n$. U slučaju Žordanove spoljne mere skup pokrivamo konačnom unijom n-intervala, dok kod Lebegove spoljne mere polazni skup pokrivamo prebrojivom unijom n-intervala. Naizgled mala razlika u definiciji dovodi do velike razlike u konkretnim primenama. Između ostalog, Žordanova mera je konačno aditivna, dok je Lebegova mera prebrojivo aditivna.

U daljem istraživanju Lebegove mere primenimo konstrukciju Karateodorija:

Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je Lebeg merljiv (i pripada familiji $\mathcal{R}_n^* \equiv \mathcal{R}^* \equiv \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$), ako i samo ako za svako $A \subset \mathbb{R}^n$ važi

$$m_n^*(A) = m_n^*(A \cap E) + m_n^*(A \cap E^c).$$

Teorema 3.3.2. *$\mathcal{R}^*$ je σ-algebra koja sadrži sve Borelove skupove na $\mathbb{R}^n$, i restricija $m_n = m_n^*|_{\mathcal{R}^*}$ je kompletna mera na $\mathcal{R}^*$.*

Dokaz. Sledi neposredno iz Teoreme Karateodorija. □

Mera m_n opisana prethodnom teoremom, naziva se *Lebegova mera na* $\mathbb{R}^n$. Ukoliko nije od važnosti naglasiti dimenziju prostora $\mathbb{R}^n$, koristi se jednostavna oznaka $m \equiv m_n$. Familija skupova $\mathcal{R}^*$ naziva se *familija Lebeg merljivih skupova na* $\mathbb{R}^n$.

Nije teško dokazati sledeće rezultate, po ugledu na jednodimenzionalan slučaj.

Teorema 3.3.3. *Ako je $E \in \mathcal{R}^*$ u prostoru $\mathbb{R}^n$, tada:*

(1) $m_n(E) = \inf\{m_n(U) : E \subset U, U \text{ je otvoren}\}$;

(2) $m_n(E) = \sup\{m_n(F) : F \subset E, F \text{ je zatvoren}\}$;

(3) $m_n(E) = \sup\{m_n(K) : K \subset E, K \text{ je kompaktan}\}$.

Osobine (1) i (3) prethodne teoreme jesu osobine unitrašnje i spoljašnje regularnosti Lebegove mere.

Teorema 3.3.4. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je Lebeg merljiv, ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji otvoren skup $U \supset E$ i postoji zatvoren skup $F \subset E$, tako da je $m_n(U \setminus F) < \epsilon$.*

Posledica 3.3.1. *Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ je Lebeg merljiv, ako i samo ako postoje: skup A tipa F_σ i skup B tipa G_δ, tako da je $A \subset E \subset B$ i $m_n(B \setminus A) = 0$.*

3.4 Transformacije prostora $\mathbb{R}^n$

Posmatrajmo proizvoljno preslikavanje $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Ako je $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^p)$, postavlja se pitanje pod kojim uslovima je $T(E) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$. U prostoru $\mathbb{R}^n$ Euklidova norma je označena sa $\|\cdot\|$.

Teorema 3.4.1. *Neka je $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ neprekidno preslikavanje, sa sledećim svojstvom: ako je $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^p)$ i $m_p(E) = 0$, onda je $T(E) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$ i $m_n(T(E)) = 0$.*

Tada za svako $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^p)$ važi $T(E) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Pretpostavimo da za preslikavanje T važi navedeno svojstvo. Neka je $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^p)$. Tada postoji skup A tipa F_σ, i postoji skup $F \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^p)$, tako da je $E = A \cup F$ i $m_p(F) = 0$. Postoji niz zatvorenih skupova $(A_j)_j$, tako da je $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Posmatramo zatvorene kugle $K_j = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Svi skupovi K_j su kompaktni, odakle sledi da su i skupovi $K_j \cap A_i$ kompaktni. Na osnovu $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_i \cap K_j)$ za svako $i \in \mathbb{N}$, sledi da je $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_i \cap K_j)$. Tada je

$$T(E) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} T(A_i \cap K_j) \right) \cup T(F).$$

Imajući u vidu da je neprekidna slika kompakta takođe kompakt, sledi su svi skupovi $T(A_i \cap K_j)$ kompaktni u $\mathbb{R}^n$. Tada je $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} T(A_i \cap K_j)$ skup tipa F_σ. Kako je $T(F)$ je mere nula u $\mathbb{R}^n$, prema pretpostavci teoreme sledi $T(F) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$. Konačno, $T(E) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Definicija 3.4.1. Neka je $M \subset \mathbb{R}^p$ i $T : M \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje. Ako postoji konstanta C_M, tako da za svako $x, y \in M$ važi

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|,$$

tada T zadovoljava Lipšicov[3] uslov sa konstantom C na skupu M.

Jednostavno je proveriti da ako preslikavanje T zadovoljava Lipšicov uslov na nekom skupu M, tada je T ravnomerno neprekidno na M.

Teorema 3.4.2. *Neka je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, i neka je $T : U \to \mathbb{R}^n$ preslikavanje koje zadovoljava Lipšicov uslov na svakom kompaktnom podskupu od U. Tada:*

(1) *Ako je $E \subset U$, $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$ i $m_n(E) = 0$, tada je $T(E) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$ i $m_n(T(E)) = 0$.*

(2) *Ako je $E \subset U$ i $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$, tada $T(E) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$.*

Dokaz. Na osnovu prethodne Teoreme 3.4.1, dovoljno je dokazati tvrđenje (1). Dakle, pretpostavimo da je $E \subset U$ i $m_n(E) = 0$. Neka je $\epsilon > 0$. Postoji otvoren skup V, tako da je $E \subset V$ i $m_n(V) < \epsilon$. Bez gubljenja opštosti može se pretpostaviti da je $V \subset U$. Skup V je prebrojiva unija disjunktnih poluzatvorenih kocki J_l, odnosno $V = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} J_l$, pri čemu je J_l n-interval kome su sve stranice jednakih dužina. Dužinu stranice kocke J_l označimo sa d_l. Neka je $E_l = E \cap J_l$. Tada je $E = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E_l$, $T(E) = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} T(E_l)$,

$$m_n(E) \leq \sum_{l=1}^{\infty} m_n(J_l) = m(V) < \epsilon$$

i

$$m_n(T(E)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} m_n(T(E_l)).$$

Preslikavanje T zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom C_l na kompaktu $\operatorname{cl} E_l$. Ako je $\mathbf{c}_l$ sredina kocke J_l, i ako je $x \in E_l \subset \operatorname{cl} J_l$, onda važi

$$\|T(x) - T(\mathbf{c}_l)\| \leq C_l\|x - \mathbf{c}_l\| \leq \frac{1}{2} C_l \sqrt{n} d_l.$$

[3]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), nemački matematičar

Dakle, $T(E_l)$ se nalazi u kocki $\operatorname{cl} J_l'$ sa centrom u $T(c_l)$ i stranicom dužine $C_l d_l$. Sledi da važi

$$m_n(T(E_l)) \leq m_n(J_l') = (C_l d_l)^n = C_l^n m_n(J_l).$$

Sledi da je

$$m_n(T(E)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} m_n(T(E_l)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} C_l^n m_n(J_l) \leq C_l^n m_n(J_l)\epsilon.$$

Poslednja nejednakost važi za svako $\epsilon > 0$, te sledi da je $T(E)$ merljiv i $m_n(T(E)) = 0$. □

Ako je $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearan operator, tada je T ograničen. Drugim rečima, postoji norma operatora T, za koju važi $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$. Tada za svako $x \in \mathbb{R}^n$ važi $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$. Sledi da sva linearna preslikavanja zadovoljavaju Lipšicov uslov na $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4.3. *Neka je μ mera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tako da je $\mu(I) = m_n(I)$ za svaki n-interval I. Tada je μ Lebegova mera na $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Tada postoji disjunktan niz $(I_m)_m$ n-intervala u $\mathbb{R}^n$, tako da je $U = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_m$ (svi intervali I_m su zatvoreni sa leve strane i otvoreni sa desne strane). Tada je, očigledno, $\mu(U) = m_n(U)$. Sledi da se μ poklapa sa m_n na familiji otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$.

Neka je sada $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ i $E \subset U$ za neki otvoren skup U. Tada je

$$\mu(E) \leq \mu(U) = m_n(U),$$

odakle sledi

$$\mu(E) \leq \inf\{m_n(U) : U \supset E, U \in \tau(\mathbb{R}^n)\} = m_n(E).$$

Pretpostavimo da je $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ograničen skup. Tada je $\mu(E) < \infty$ i $m_n(E) < \infty$. Važi

$$\mu(U) = \mu(E) + \mu(U \setminus E) \leq m_n(E) + m_n(U \setminus E) = m_n(U).$$

Ako bi važilo $\mu(E) < m_n(E)$, onda bi (zbog konačnosti svih mera u poslednjoj nejednakosti) sledilo $\mu(U) < m_n(U)$, što nije moguće. Dakle, $\mu(E) = m_n(E)$.

Ako je E neograničen skup, tada je E prebrojiva unija ograničenih i uzajamno disjunktnih skupova $E_m = E \cap P_m$, gde je $P_m = \{x \in \mathbb{R}^n : m-1 \leq |x| < m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Kako je $\mu(E_m) = m_n(E_m)$ za svako $m \in \mathbb{N}$, sledi da je $\mu(E) = m_n(E)$. $\square$

Dokazujemo važan rezultat o translatornoj invarijantnosti Lebegove mere u $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4.4. *Lebegova mera je translatorno invarijantna. Drugim rečima, ako je $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$ i $x \in \mathbb{R}^n$, tada je $m_n(E+x) = m_n(E)$.*

Dokaz. Ako je I jedan n-interval u $\mathbb{R}^n$, tada je $E+x$ takođe n-interval, za koji očigledno važi $m_n(E+x) = m_n(E)$.

Ako je $U \in \tau(\mathbb{R}^n)$, onda je $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, pri čemu su I_j uzajamno disjunktni n-intervali u $\mathbb{R}^n$ (svi intervali I_j su zatvoreni sa leve strane i otvoreni sa desne strane). Tada je $U+x = \bigcup\limits_j (I_j+x)$, odakle direktno sledi $m_n(U+x) = m_n(U)$.

Primetimo da ako je U otvoren skup, onda je i $U+x$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.

Neka je E merljiv skup u $\mathbb{R}^n$. Tada važi

$$\begin{aligned} m_n(E+x) &= \inf\{m_n(V) : V \supset (E+x), V \in \tau(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \inf\{m_n(U+x) : U \supset E, U \in \tau(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \inf\{m_n(U) : U \supset E, U \in \tau(\mathbb{R}^n)\} \\ &= m_n(E). \end{aligned}$$

Time je tvrđenje dokazano. $\square$

Lebegova mera je suštinski jedina mera za koju važi tranlsaciona invarijantnost. Preciznije, važi sledeći rezultat.

Teorema 3.4.5. *Neka je μ netrivijalna mera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sa svojstvima:*

(1) *μ je translaciono invarijantna na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$;*

(2) *Ako je $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ograničen skup, onda je $\mu(E) < \infty$.*

Tada postoji konstanta c tako da za svako $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ važi $\mu(E) = c \cdot m_n(E)$. Pri tome je $c = \mu(C)$, i C je jedinični kub u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $J_0 = [0,1)^n$ jedinični kub u $\mathbb{R}^n$, i neka je $\mu(J_0) = c$. Ako je $\mu(J_0) = 0$, onda iskoristimo translacionu invarijantnost mere μ i sledi $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, $0 < c < \infty$.

Očigledno je $\frac{1}{c}\mu$ translaciono invarijanta mera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, i uz to je $m_n(J_0) = \frac{1}{c}\mu(J_0)$.

Ako je J_k bilo koji n-interval stranice $\frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, tada je J_0 disjunktna unija konačno mnogo intervala J_k. Na osnovu translacione invarijatnosti mera $\frac{1}{c}\mu$ i m_n, sledi da je $\frac{1}{c}\mu(J_k) = m_n(J_k)$.

Na kraju, ako je J proizvoljan n-interval, onda je J prebrojiva disjunktna unija intervala J_k, te sledi da je $\frac{1}{c}\mu(J) = m_n(J)$.

Dakle, $\frac{1}{c}\mu$ se poklapa sa m_n na svim n-intervalima. Na osnovu ranijeg rezultata, sledi da je $\frac{1}{c}\mu = m_n$ na svim Borelovim skupovima. □

Formulšemo bez dokaza rezultat iz teorije matrica.

Teorema 3.4.6. *Neka je f preslikavanje definisano na skupu svih invertibilnih matrica dimenzije n, koje ima svojstva:*

(1) *$f(AB) = f(A)f(B)$, za svake dve invertibilne matrice A i B dimenzine n.*

(2) *$f(\lambda I) = \lambda^n$, za svako $\lambda > 0$.*

Tada je $f(A) = |\det(A)|$ za svaku invertibilnu matricu A dimenzije n.

Prethodna teorema korisit u dokazu osobina Lebegove mere u $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4.7. *Ako je $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nesingularno linearno preslikavanje, tada je $m_n(T(E)) = |\det(T)|m(E)$ za svako $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$.*

Dokaz. Na osnovu ranijeg rezultata znamo da je $T(E) \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$ za svako $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$. Definišemo funkciju μ na sledeći način: $\mu(E) = m_n(T(E))$ za svako $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$. Lako je proveriti da je μ translaciono invarijantna mera. Na konačno dimenzionalnom prostoru svako linearno preslikavanje je ograničeno, odakle sledi da je mera μ ograničena na ograničenim podskupovima od $\mathbb{R}^n$. Prema prethodnoj teoremi,

$$\mu(E) = c(T) \cdot m_n(E),$$

pri čemu je $c(T) = \mu(J_0)$ i J_0 je jedinični kub u $\mathbb{R}^n$.

Ako su T_1, T_2 nesingularne linearne transformacije, tada za svako $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$ važi

$$c(T_1)c(T_2)m_n(E) = c(T_1)m_n(T_2(E)) = m_n(T_1T_2(E)) = c(T_1T_2)m_n(E).$$

Dakle, $c(T_1T_2) = c(T_1)c(T_2)$.

Neka je $\lambda > 0$ i $T_3 = \lambda I$. Ako je J_0 jedinični kub u $\mathbb{R}^n$, tada je $T_3(J_0) = \lambda J_0$, odakle sledi da je $c(T_3) = \lambda^n$.

Na osnovu prethodne teoreme, sledi da je $c(T) = |\det(T)|$ za svako T. $\square$

Cilj nam je da dokažemo invarijatnost Lebegove mere za izometrijske transformacije u $\mathbb{R}^n$.

Standardna ortonormirana baza u prostoru $\mathbb{R}^n$ je $\{e_1, \ldots, e_n\}$, pri čemu je $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ i broj 1 se javlja tačno na i-toj koordinati vektora e_i, $i = 1, \ldots, n$. Skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$ je $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Drugim rečima, ako je $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ i $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, tada je $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Skup svih linearnih preslikavanja prostora $\mathbb{R}^n$ je označen sa $L(\mathbb{R}^n)$. Identičko preslikavanje označeno je sa I.

Ako je $A \in L(\mathbb{R}^n)$, onda postoji jedinstveno preslikavanje $A^\top \in \mathbb{R}^n$, tako da za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle.$$

Preslikavanje $A^\top$ je Hilbert-adjungovano preslikavanje od A. Linearna preslikavanja na $\mathbb{R}^n$ na dobro poznati način identifikujemo sa matricama ovih preslikavanja u odnosu na standardnu ortonormiranu bazu. Dakle, A je linearan operator, a istovremeno i matrica ovog linearnog operatora u uređenoj ortonormiranoj bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Ako je $A \in L(\mathbb{R}^n)$, onda je matrica preslikavanja $A^\top$ transponovana matrica matrice A (jednostavna direktna provera).

Preslikavanje $Q \in L(\mathbb{R}^n)$ je *ortogonalno*, ako je $QQ^\top = I = Q^\top Q$. Primetimo da je dovoljna samo jedna od ove dve jednakosti, iz sledećeg razloga. Ako je linearno preslikavanje A na prostoru $\mathbb{R}^n$ levo invertibilno, onda je ovo preslikavanje i desno invertibilno; samim tim, inverzno preslikavanje A^{-1} preslikavanja A je jedinstveno. Dakle, ortogonalna linearna preslikavanja su upravo ona preslikavanja A za koja je $A^{-1} = A^\top$. Skup svih ortogonalnih linearnih preslikavanja u $\mathbb{R}^n$ označen je sa $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^n)$.

Preslikavanje $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *translacija*, ako postoji vektor $a \in \mathbb{R}^n$ tako da je za svako $x \in \mathbb{R}^n$ ispunjeno $T(x) = x + a$. Trivijalno je utvrditi da svaka translacija jeste linearno preslikavanje. Ako je T translacija za vektor a, kao što je ispred opisano, onda je oznaka $T \equiv T_a$. Skup svih translacija prostora $\mathbb{R}^n$ označen je sa $\mathrm{Tran}(\mathbb{R}^n)$.

Norma u $\mathbb{R}^n$ je indukovana skalarnim prozivodom:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sledi da je i metrika u $\mathbb{R}^n$ indukovana skalarnim proizvodom:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Preslikavanje $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *izometrija*, ako je za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ ispunjeno:

$$d(S(x), S(y)) = d(x,y),$$

odnosno

$$\|S(x) - S(y)\| = \|x-y\|.$$

U samoj definiciji se ne zahteva osobina linearnosti preslikavanja S. Međutim, kasnije ćemo dokazati da ako je S izometrija, onda S mora biti linearno preslikavanje. Skup svih izometrija na $\mathbb{R}^n$ označavamo sa $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.

Očigledno, svaka translacija je izometrija, tj. $\mathrm{Tran}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.

Izometrija $S \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ *fiksira nulu*, ako je $S(0) = 0$. Skup svih izometrija koje fiksiraju nulu označen je sa $\mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.4.8. *Neka je $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ proizvoljno preslikavanje. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $S \in \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$*;*

(2) $\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ *za svako* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Pretpostavimo da je $S \in \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$. Neka je $x, y \in \mathbb{R}^n$. Tada je $\|S(x) - S(y)\| = \|x-y\|$. Ako je $y = 0$, onda sledi $\|S(x)\| = \|x\|$. Prevedimo prethodne dve jednakosti normi na jednakost odgovarajućih skalarnih proizvoda. Sledi da je ispunjeno:

$$\langle S(x) - S(y), S(x) - S(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle,$$

odakle proizilazi

$$\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

čime je dokazano (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo sada da je ispunjeno (2). Jednostavno je proveriti da za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi

$$\|S(x) - S(y)\|^2 = \langle S(x) - S(y), S(x) - S(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle = \|x-y\|.$$

Time smo dokazali da je S izometrija. Ako je $x = y = 0$, onda na osnovu pretpostavke (2) sledi $\|S(0)\|^2 = \|0\|^2 = 0$, te je $S(0) = 0$ i $S \in \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$. Time je dokazano tvrđenje (1). $\square$

Teorema 3.4.9. *Ako je $S \in \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$ i S fiksira standardnu ortogonalnu bazu u $\mathbb{R}^n$, tada je S identičko preslikavanje.*

Dokaz. Neka je $S(0) = 0$ i $S(e_i) = e_i$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Na osnovu prethodne teoreme sledi da je za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ ispunjeno

$$\langle S(x), S(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Neka je $y = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\langle S(x), e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle.$$

Dakle, Furijeovi[4] koeficijenti vektora $S(x)$ u odnosu na standardnu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jednaki su Furijeovim koeficijentima vektora x u odnosu na istu bazu. Stoga je

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle S(x), e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = x.$$

Prema tome, $S(x) = x$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$, te je $S = I$. □

Primetimo da u dokazu prethodne teoreme ne pretpostavljamo linearnost preslikavanja S.

Primer 3.4.1. Neka je p prava u ravni $\mathbb{R}^2$ data jednačinom $x + y = 1$. Neka je S simetrija ravni $\mathbb{R}^2$ u odnosu na pravu p. Tada je S izometrijska transformacija ravni $\mathbb{R}^2$ koja fiksira vektore standardne ortogonalne baze $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$, ali S ne fiksira 0. Očigledno, S nije identičko preslikavanje. Dakle, prethodna teorema ne važi bez pretpostavke da S fiksira 0.

Neka je q prava u ravni $\mathbb{R}^2$ data jednačinom $y = x$. Neka je S_1 simetrija ravni $\mathbb{R}^2$ u odnosu na pravu q. Tada je S_1 izometrija ravni $\mathbb{R}^2$ koja fiksira nulu, ali ne fiksira vektore standardne baze e_1 i e_2.

Dokazujemo vezu između ortogonalnih transformacija i izometrija koje fiksiraju nulu.

Teorema 3.4.10. *Neka je $Q : \mathbb{R}^n$ proizvoljno preslikvanje. Tada je $Q \in \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako je $Q \in \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$, odnosno $\mathrm{Ort}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$.*

[4]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematičar

Dokaz. Pretposavimo da je $Q \in \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^n)$, i neka je $x \in \mathbb{R}^n$. Tada je

$$\|Qx\|^2 = \langle Qx, Qx\rangle = \langle Q^\top Qx, x\rangle = \langle x, x, \rangle = \|x\|^2.$$

Imajući u vidu da je Q linearno preslikavanje, sledi da je Q izometrija. Trivijalno važi $Q0 = 0$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $Q \in \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n)$. Iskoristimo Teoremu 3.4.8. Tada za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi $\langle Q(x), Q(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Posmatrajmo vektore uređene ortonormirane baze $\{e_1, \dots, e_n\}$. Važi

$$\langle Q(e_i), Q(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

gde je $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ Kronekerovo δ. Neka je $A = (q_{ij})_{i,j}$ matrica preslikavanja A u bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$, tako da je $A(e_i) = \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ qin \end{bmatrix}$ za svako $i = 1, \dots, n$. Sa druge strane, ako je $AA^\top = (r_{ij})_{i,j}$ matrica preslikavanja $AA^\top$ u posmatranoj bazi, onda je

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} q_{kj} = \langle A(e_i), A(e_j)\rangle = \delta_{ij}.$$

Dakle, matrica preslikavanja $AA^\top$ u uređenoj bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$ je identička, te sledi $AA^\top = I$. Time je dokazano da je A ortogonalna matrica.

Primetimo sada da je $Ae_i = Q(e_i)$ za svako $i = 1, \dots, n$. Tada je $A^{-1} \circ Q$ izometrijska transformacija na $\mathbb{R}^n$ koja fiksira nulu i fiksira standardnu bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$. Prema prethodnoj teoremi je $A^{-1} \circ Q = I$. Dakle, $A = Q$ i Q je ortogonalna transformacija. □

Posledica 3.4.1. *Ako je Q izometrija na $\mathbb{R}^n$ koja fiksira nulu, onda je Q linearno preslikavanje. Drugim rečima,* $\mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^n)$.

Na kraju, dokazujemo fundamentalan rezultat za izometrijske transformacije u prostoru $\mathbb{R}^n$,

Teorema 3.4.11. *Preslikavanje $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je izometrija, ako i samo ako postoje: translacija T_a za vektor $a \in \mathbb{R}^n$ i ortogonalna transformacija Q na $\mathbb{R}^n$, tako da je $S = T_a \circ Q$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $S = T_a \circ Q$, pri čemu je T_a translacija za vektor $a \in \mathbb{R}^n$, a Q je ortogonalna transformacija. Kako su translacija i ortogonalna transformacija izometrije, sledi da je S izometrija prostora $\mathbb{R}^n$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$. Neka je $T(0) = a \in \mathbb{R}^n$. Definišemo transformaciju $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na sledeći način: $Q(x) = S(x) - a$. Tada je $Q(0) = 0$, i očigledno je Q izometrija. Sledi da je $Q \in \mathrm{Iso}^0(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^n)$. Dakle, Q je ortogonalna transformacija. Trivijalno je za svako $x \in \mathbb{R}^n$ ispunjeno $S(x) = Q(x)+a = (T_a \circ Q)(x)$, odnosno važi $S = T_a \circ Q$. $\square$

Na osnovu prethodnih rezultata, jednostavno je dokazati invarijantnost Lebegove mere za izometrijske transformacije u $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4.12. *Ako je $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrijska transformacija, tada je za svako $E \in \mathcal{R}^*$ ispunjeno $m_n(T(E)) = m_n(E)$.*

Dokaz. Za $T \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ postoji $T_a \in \mathrm{Tran}(\mathbb{R}^n)$ i $Q \in \mathrm{Ort}(\mathbb{R}^n)$, tako da je $T = T_a \circ Q$. Primetimo da je

$$1 = \det(I) = \det(QQ^\top) = \det(Q)\det(Q^\top) = (\det(Q))^2,$$

te je $\det(Q) = \pm 1$.

Ako je $E \in \mathcal{R}^*(\mathbb{R}^n)$, tada je

$$m_n(T(E)) = m_n(Q(E) + a) = m_n(Q(E)) = |\det(Q)|\, m_n(E) = m_n(E).$$

Time je tvrđenje dokazano. $\square$

Glava 4

Integral

U ovoj glavi uvodimo novi način integraljenja merljivih funkcija u odnosu na pozitivnu meru. Ovu ideju predložio je i razvio Lebeg početkom 20. veka. Stoga se u nekoj literaturi opisani način integracije naziva "Lebegova integracija". Mi se bavimo samo ovim načinom integracije, te ćemo koristiti termin "integral merljive funkcije u odnosu na meru μ", dok će termin "Lebegov integral" biti rezervisan samo za slučaj integrala funkcije u odnosu na Lebegovu meru m u prostoru $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^n$. Uporedićemo poznati Rimanov[1] integral sa novouvedenim Lebegovim integralom, i pri tome se nadamo da čitalac neće izgubiti osećaj o kom tipu integrala se zaista radi.

Integral merljive funkcije u odnosu na pozitivnu meru definiše se u više koraka.

4.1 Integral proste merljive nenegativne funkcije

Neka je $(X, \mathcal{R})$ merljiv prostor, i neka je $s : X \to \mathbb{R}$ merljiva, prosta, nenegativna funkcija. Tada je

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

pri čemu su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ sve moguće različite vrednosti funkcije s, $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{R}$, i $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Neka je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathcal{R}$.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nemački matematičar

Integral proste funkcije s na skupu X u odnosu na meru μ definisan je kao

$$\int_X s\,d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i). \tag{4.1}$$

Ako je $s = 0$ i $\mu(X) = \infty$, onda je (na osnovu ranije konvencije $0 \cdot \infty = \infty$) $\int_X 0\,d\mu = 0$. Sledi da je $\int_X s\,d\mu \in [0, +\infty]$ za svaku merljivu, prostu i nenegativnu funkciju s.

Neka je $E \in \mathcal{R}$. Tada je, očigledno, $s\chi_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E\cap A_i}$. Stoga je ispravno definisati

$$\int_E s\,d\mu := \int_X s\chi_E\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\mu(E \cap A_i).$$

Ako je $E = X$, prethodna definicija se poklapa sa (4.1). Dakle, dovoljno je izučavati integral proste funkcije na celom prostoru X. Kao specijalan slučaj javiće se integral funkcije na merljivom podskupu od X.

Teorema 4.1.1. *Neka je μ pozitivna mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{R})$. Neka su s, t nenegativne, proste i merljive funkcije na X, neka su $A, B, E \in \mathcal{R}$ i $c \geq 0$. Tada važi:*

(1) *Ako je $s \leq t$, tada je $\int_X s\,d\mu \leq \int_X t\,d\mu$.*

(2) *Ako je $A \subset B$, tada je $\int_A s\,d\mu \leq \int_B s\,d\mu$*

(3) $\int_X (c\,s)\,d\mu = c\int_X s\,d\mu$.

(4) *Funkcija $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^*$, definisana kao $\varphi(E) = \int_E s\,d\mu$, jeste pozitivna mera na $(X, \mathcal{R})$.*

(5) $\int_X (s + t)d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu$.

Dokaz. Tvrdjenja (1)-(3) je jednostavno dokazati.

(4) Očigledno je $\varphi(E) \geq 0$ za svako $E \in \mathcal{R}$, kao i $\varphi(\emptyset) = 0$. Neka je $(E_n)_n$ disjunktna familija elemenata iz $\mathcal{R}$, i neka je $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Neka je $s = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$. Iskoristimo činjenicu da je μ mera na $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(E) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu\left(A_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_i \cap E_n)\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n).
\end{aligned}$$

Takođe smo iskoristili i opšte poznati rezultat da je kod reda sa pozitivnim članovima moguće pregrupisati sabirke na proizvoljan način.

(5) Neka je $t = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$ i neka je $E_{ij} = A_i \cap B_j$. Tada je $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{m} E_{ij}$, kao i

$$\int_{E_{ij}} (s+t) d\mu = (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_{ij}) = \int_{E_{ij}} s \, d\mu + \int_{E_{ij}} t \, d\mu.$$

Koristeći dokazano svojstvo (4), proizilazi da je $\int\limits_X (s+t) d\mu = \int\limits_X s \, d\mu + \int\limits_X t \, d\mu$.

□

4.2 Integral nenegativne merljive funkcije

Neka je $f : X \to \mathbb{R}^*$ nenegativna proširena realna merljiva funkcija. Tada postoji niz prostih, merljivih, nenegativnih funkcija $(s_n)_n$, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$ na X.

Integral nenegativne funkcije f na skupu X u odnosu na meru μ, definisan je na sledeći način:

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{0 \leq s \leq f} \int_X s \, d\mu, \tag{4.2}$$

gde je supremum uzet po svim merljivim prostim i nenegativnim funkcijama s, koje ispunjavaju uslov $0 \leq s \leq f$ na X.

Ako je f merljiva, prosta i nenegativna funkcija na X, onda se definicija integrala (4.2), trivijalno, poklapa sa definicijom integrala (4.1). Takođe je očigledno $\int\limits_X f\, d\mu \geq 0$ za svaku merljivu nenegativnu funkciju f. Ako je $f(x) = \infty$ za svako $x \in X$, i ako je $\mu(X) = 0$, onda je $\int\limits_X f\, d\mu = 0$.

Funkcija f je *integrabilna na skupu X u odnosu na meru μ*, ako je $\int\limits_X f\, d\mu < +\infty$.

Ako je $E \in \mathcal{R}$ i f merljiva nenegativna funkcija na X, tada je

$$\int\limits_E f\, d\mu := \int\limits_X f\chi_E\, d\mu.$$

Ako je $E = X$, onda se ova definicija poklapa sa (4.2). Funkcija f je integrabilna na skupu E u odnosu na meru μ, ako je $\int\limits_E f\, d\mu < +\infty$.

Analogno prostim funkcijama, jednostavno je dokazati sledeći rezultat.

Teorema 4.2.1. *Neka je μ pozitivna mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{R})$. Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ nenegativne merljive funkcije na X, $A, B \in \mathcal{R}$ i $c \geq 0$. Tada važi:*

(1) *Ako je $0 \leq f \leq g$, tada je $0 \leq \int\limits_X f\, d\mu \leq \int\limits_X g\, d\mu$;*

(2) *Ako je $A \subset B$, tada je $\int\limits_A f\, d\mu \leq \int\limits_B f\, d\mu$;*

(3) $\int\limits_X (c\, f)\, d\mu = c \int\limits_X f\, d\mu$.

Sada dolazimo do dela koji opravdava prethodnu definiciju integrala u odnosu na prebrojivo aditivnu meru. Naime, metoda integraljenja opisana u ovoj lekciji ima lepe osobine u smislu "zamene mesta" integrala i granične vrednosti.

Teorema 4.2.2. (Teorema o monotonoj konvergenciji, Lebeg-Levi[2]) *Neka je $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ niz merljivh funkcija na X, tako da važi*

(1) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$ *za svako $x \in X$.*

[2]Beppo Levi (1875-1961), italijansko-argentinski matematičar

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *za svako* $x \in X$.

Tada je funkcija f *merljiva i*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = \int\limits_X f \, d\mu.$$

Dokaz. Merljivost funkcije f sledi na osnovu dobro poznatog rezultata o merljivosti granične vrednosti niza merljivih funkcija. Očigledno važi nejednakost $\int\limits_X f_n \, d\mu \leq \int\limits_X f_{n+1} \, d\mu$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Prema tome,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = \alpha \in [0, +\infty].$$

Na osnovu $f_n \leq f$ na X, sledi da je $\int\limits_X f_n \, d\mu \leq \int\limits_X f \, d\mu$, te je i

$$\alpha \leq \int\limits_X f \, d\mu.$$

Preostaje da se dokaže suprotna nejednakost.

Neka je c konstanta za koju važi $0 < c < 1$, i neka je s prosta merljiva funkcija koja zadovoljava uslov $0 \leq s \leq f$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ definišimo skupove

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq c \cdot s(x)\}.$$

Svi skupovi E_n su merljivi, i $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$. Neka je $x \in X$. Kako je $c\, s(x) < f(x)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $f_n(x) \geq c\, s(x)$, odnosno $x \in E_n$. Sledi da je $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Takođe, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\int\limits_X f_n \, d\mu \geq \int\limits_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int\limits_{E_n} s \, d\mu = c\, \varphi(E_n).$$

Podsetimo da je funkcija φ, definisana sa $\varphi(E) = \int\limits_E s \, d\mu$ $(E \in \mathcal{R})$ pozitivna mera na $\mathcal{R}$. Na osnovu osobine neprekidnosti mere φ za monotono rastući niz skupova $(E_n)_n$, prelaskom na graničnu vrednost kada $n \to \infty$, proizilazi da važi $\alpha \geq c \int\limits_X s \, d\mu$. Ako $c \to 1-$, onda sledi $\alpha \geq \int\limits_X s \, d\mu$. Uzmimo sada

supremum po svim prostim merljivim funkcijama s koje zadovoljavaju uslov $0 \leq s \leq f$. Važi $\alpha \geq \int\limits_X f\, d\mu$. Time je dokazana teorema. $\square$

Teorema o monotonoj konvergenciji omogućava dokaz osobine aditivnosti integrala (u odnosu na funkciju koja se integrali).

Teorema 4.2.3. *Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ nenegativne merljive funkcije. Tada je*

$$\int\limits_X (f+g)\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu + \int\limits_X g\, d\mu.$$

Dokaz. Za funkciju f postoji niz prostih merljvih funkcija $(s_n)_n$ sa svojstvom $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$. Neka je $(t_n)_n$ odgovarajući niz za funkciju g. Tada je $u_n = s_n + t_n$ niz prostih nenegativnih merljivih funkcija, koji monotono raste i konvergira ka funkciji $f + g$. Na osnovu Teoreme o monotonoj konvergenciji sledi

$$\begin{aligned}
&\int\limits_X f\, d\mu + \int\limits_X g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X s_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_X t_n\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_X s_n\, d\mu + \int\limits_X t_n\, d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X u_n\, d\mu = \int\limits_X (f+g)\, d\mu.
\end{aligned}$$

Time je teorema dokazana. $\square$

Prethodni rezultat važi i u slučaju beskonačne sume nenegativnih merljivih funkcija.

Teorema 4.2.4. *Neka su funkcije $f_n : X \to [0, +\infty]$ merljive za svako $n \in \mathbb{N}$, i neka je $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ za svako $x \in X$. Tada je funkcija f merljiva i*

$$\int\limits_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu.$$

Dokaz. Neka je $S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ za svako $x \in X$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada su sve funkcije S_n merljive. Takođe je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ za svako $x \in X$, kao i

$S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$ za svako $x \in X$ i svako $n \in \mathbb{N}$. Prema prethodnoj teoremi, kao i prema Teoremi o monotonoj konvergenciji, sledi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X S_n \, d\mu \\ &= \int_X (\lim_{n\to\infty} S_n) \, d\mu = \int_X f \, d\mu.\end{aligned}$$

Na ovaj način dokazana je teorema. □

Teorema 4.2.5. *Neka je $f : X \to [0, +\infty]$ merljiva funkcija, i neka je za svako $E \in \mathcal{R}$*

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Tada je φ pozitivna mera na X.

Ako je g nenegativna merljiva funkcija na X, tada je

$$\int_X g \, d\varphi = \int_X fg \, d\mu. \tag{4.3}$$

Dokaz. Očigledno je $\varphi(E) \geq 0$ za svako $E \in \mathcal{R}$, kao i $\varphi(\emptyset) = 0$. Neka je $(E_n)_n$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{R}$ i neka je $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Lako je utvrditi da je

$$f\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}.$$

Prema Teoremi 4.2.4, važi

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \int_E f \, d\mu = \int_X f\chi_E \, d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n).\end{aligned}$$

Time je dokazano da je φ mera na $\mathcal{R}$.

Ako je $E \in \mathcal{R}$ i $g = \chi_E$, tada je

$$\int_X \chi_E \, d\varphi = \varphi(E) = \int_X \chi_E f d\mu.$$

Dakle, formula (4.3) je tačna ako je g neka karakteristična funkcija nekog merljivog skupa. Sledi da je formula tačna i ako je g nenegativna prosta merljiva funkcija. Na kraju, ako je g proizvoljna nenegativna merljiva funkcija, onda formula (4.3) sledi na osnovu Teoreme o monotonoj konvergenciji. □

Na kraju, dokazujemo još jedan koristan rezultat, koji je poznat kao Fatuova[3] lema.

Teorema 4.2.6. (Fatu) *Neka su funkcije $f_n : X \to [0, +\infty]$ merljive za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dokaz. Merljivost funkcije $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ sledi na osnovu ranijeg rezultata. Neka je za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \in X$:

$$g_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x).$$

Tada su sve funkcije g_n merljive i važi $g_n \leq f_n$. Zato je

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.4}$$

Takođe je $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Neka u poslednjoj nejednakosti (4.4) $n \to \infty$. Na osnovu Teoreme o monotonoj konvergenciji sledi da važi:

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Time je teorema dokazana. □

[3]Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929), francuski matematičar

Na kraju ove sekcije definišemo pojam "μ-skoro svuda", ili samo "skoro svuda" ako se mera μ podrazumeva. Koristi se skraćena oznaka μ-ss.

Neka je $P = P(x)$ neko svojstvo, koje zavisi od promenljive $x \in X$, pri čemu je $(X, \mathcal{R}, \mu)$ prostor pozitivne mere μ. Svojstvo $P(x)$ važi na skupu X *μ-skoro svuda*, ako postoji skup $E \in \mathcal{R}$ tako da je $\mu(E) = 0$, i pri tome svojstvo $P(x)$ važi za svako $x \in X \setminus E$. Pri tome, ne upuštamo se u procenu da li, eventualno, svojstvo $P(x)$ važi za neko $x \in E$.

U literaturi se pojam "skoro svuda" često definiše malo opštije: pretpostavlja se da je skup E u prethodnoj definiciji podskup nekog skupa mere nula.

Na primer, u Teoremi o monotonoj konvergenciji može se pretpostaviti $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ μ-skoro svuda na X, kao i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-skoro svuda na X, a da pri tome zaključak teoreme i dalje važi. Naime, neka je E_n skup na kome je $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, i neka je E skup na kome je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Prema uvedenim pretpostavkama, $\mu(E_n^c) = 0$ i $\mu(E^c) = 0$. Dakle, ako je $X_1 = X \setminus \left(E \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$, tada je $\mu(X \setminus X_1) = 0$, a na skupu X_1 je ispunjeno $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Na osnovu Teoreme o monotonoj konvergenciji onda važi

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_1} f_n d\mu = \int\limits_{X} f d\mu.$$

Imajući u vidu da je $\mu(X \setminus X_1) = 0$, sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{X} f_n d\mu = \int\limits_{X} f d\mu.$$

4.3 Integral proširene realne merljive funkcije

Neka je μ pozitivna mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{R})$. Neka je $f : X \to \mathbb{R}^*$ merljiva funkcija. Tada su funkcije

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

nenegativne i merljive. Jednostavno je proveriti da važi

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Integral funkcije f na skupu X u odnosu na meru μ jeste

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f d\mu,$$

ako je bar jedan od integrala na desnoj strani konačan.

Ukoliko je f nenegativna merljiva funkcija, onda je $f = f^+$ i $f^- = 0$. Prema tome, definicija integrala proširene realne merljive funkcije je u skladu sa definicijom integrala merljive nenegativne funkcije.

Funkcija f je *integrabilna na skupu X u odnosu na meru μ*, ako su oba integrala $\int\limits_X f^+ d\mu$ i $\int\limits_X f^- d\mu$ konačna.

Na osnovu očigledne činjenice

$$\int\limits_X |f| d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu + \int\limits_X f^- d\mu,$$

sledi da je f integrabilna ako i samo ako je $|f|$ integrabilna, odnosno ako i samo ako je $\int\limits_X |f| d\mu < \infty$.

Skup svih integrabilnih funkcija na X u odnosu na meru μ označava se sa $L(X, \mu)$, ili sa $L_1(X, \mu)$.

Neka je $p \geq 1$. Tada je $L_p(X, \mu)$ skup svih merljivih funkcija f na X, za koje je $\int\limits_X |f|^p d\mu < \infty$.

Teorema 4.3.1. *Neka je μ pozitivna mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{R})$, i neka je f merljiva proširena realna funkcija na X. Tada važi:*

(1) *Ako je $f \in L_1(X, \mu)$, tada je $\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu$.*

(2) *Ako postoji $g \in L_1(X, \mu)$ tako da je $|f| \leq g$ μ-ss na X, onda je $f \in L_1(X, \mu)$ i $\int\limits_X |f| d\mu \leq \int\limits_X g d\mu$.*

(3) *Ako je $c \in \mathbb{R}$ i $f \in L_1(X, \mu)$, tada je $cf \in L_1(X, \mu)$ i $\int\limits_X cf d\mu = c \int\limits_X f d\mu$.*

Dokaz. (1) Znamo da je $f \in L_1(X, \mu)$ ako i samo $|f| \in L_1(X, \mu)$. Neka je $f = f^+ - f^-$. Tada je

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| = \left|\int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu\right| \leq \int\limits_X f^+ d\mu + \int\limits_X f^- d\mu = \int\limits_X |f| d\mu.$$

(2) Neka je f merljiva na X i neka je $g \in L_1(X, \mu)$ sa svojstvom $|f| \leq g$ μ-ss na X. Neka je $Y = \{x \in X : |f(x)| \leq g(x)\}$. Tada je $\mu(X \setminus Y) = 0$. Koristeći osobine integrala nenegativnih merljivih funkcija, proizilazi da važi

$$\int\limits_X |f| d\mu = \int\limits_Y |f| d\mu \leq \int\limits_Y g d\mu = \int\limits_X g d\mu < \infty.$$

Time je dokazana integrabilnost funkcije f na X.

(3) Neka je $c \in \mathbb{R}$ i $f \in L_1(X, \mu)$. Tada je $f = f^+ - f^-$. Ako je $c = 0$, onda je $cf = 0 \in L_1(X, \mu)$ i trivijalno važi formula $\int\limits_X cf d\mu = c \int\limits_X f d\mu$. Ako je $c > 0$, onda je $(cf)^+ = cf^+$ i $(cf)^- = cf^-$. Stoga je, na osnovu osobina integrala nenegativnih funkcija,

$$\begin{aligned} \int\limits_X (cf) d\mu &= \int\limits_X (cf)^+ d\mu - \int\limits_X (cf)^- d\mu = c \int\limits_X f^+ d\mu - c \int\limits_X f^- d\mu \\ &= c \int\limits_X f d\mu. \end{aligned}$$

Na kraju, ako je $c < 0$, onda je $(cf)^+ = -cf^-$ i $(cf)^- = -cf^+$. Stoga je, na osnovu $-c > 0$, ispunjeno

$$\begin{aligned} &\int\limits_X (cf) d\mu = \int\limits_X (cf)^+ d\mu - \int\limits_X (cf)^- d\mu \\ &= \int\limits_X (-c) f^- d\mu - \int\limits_X (-c) f^+ d\mu = (-c) \int\limits_X f^- d\mu - (-c) \int\limits_X f^+ d\mu \\ &= c \left(\int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu \right) = c \int\limits_X f d\mu. \end{aligned}$$

□

Dokazujemo interesantna tvrđenja o realnim integrabilnim funkcijama.

Teorema 4.3.2. *Ako je $f \in L_1(X, \mu)$ proširena realna funkcija, tada je f μ-ss konačna funkcija.*

Dokaz. Neka je $f \in L_1(X, \mu)$ proširena realna funkcija, i neka je $E = \{x \in F : |f(x)| = +\infty\}$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $E_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$. Tada je $E_n \supset E_{n+1}$, kao i $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ je ispunjeno

$$+\infty > \int\limits_X |f| d\mu \geq \int\limits_{E_n} |f| d\mu \geq n\,\mu(E_n).$$

Sledi da je $\mu(E_n) < +\infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$, kao i $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. Na osnovu neprekidnosti mere, sledi da je $\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. Dakle, f je μ-ss konačna funkcija. □

Teorema 4.3.3. *Ako je $f \in L_1(X, \mu)$ proširena realna funkcija, tada postoji realna funkcija $g \in L_1(X, \mu)$ tako da je $f = g$ μ-ss i $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu$.*

Dokaz. Neka je $f \in L_1(X, \mu)$ i neka je $E = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$. Iz integrabilnosti funkcije f sledi da je $\mu(E) = 0$. Funkciju g definišemo na sledeći način:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in E^c. \end{cases}$$

Nije teško proveriti da funkcija g ispunjava tražene uslove ovog tvrđenja. □

Teorema 4.3.4. *Neka su $f, g \in L_1(X, \mu)$ proširene realne funkcije. Tada je $h = f + g \in L_1(X, \mu)$ i $\int\limits_X (f + g) d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$.*

Dokaz. Neka je $E = \{x \in X : |f(x)| = +\infty, \text{ili } |g(x)| = +\infty\}$. Prema ranijoj teoremi, $\mu(E) = 0$. Tada je funkcija $h = f + g$ definisana i merljiva na skupu $Y = X \setminus E$. Neka je $h(x) = 0$ za svako $x \in E$. Ovo je uobičajena konvencija koju koristimo kod računanja zbira proširenih realnih funkcija. Na osnovu

$$\int\limits_X |h| d\mu = \int\limits_Y |f + g| d\mu \leq \int\limits_Y (|f| + |g|) d\mu = \int\limits_Y |f| d\mu + \int\limits_Y |g| d\mu < \infty,$$

sledi da je $h \in L_1(X, \mu)$. Važi $h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, odakle sledi $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Integraljenjem na skupu Y, proizilazi

da važi

$$\int_Y h^+ d\mu + \int_Y f^- d\mu + \int_Y g^- d\mu = \int_Y h^- d\mu + \int_Y f^+ d\mu + \int_Y g^+ d\mu.$$

Na osnovu integrabilnsti funcija f, g, h sledi da su svi integrali u prethodnoj formuli konačni. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_X h d\mu &= \int_Y h^+ d\mu - \int_Y h^- d\mu \\ &= \int_Y f^+ d\mu - \int_Y f^- d\mu + \int_Y g^+ d\mu - \int_Y g^- d\mu \\ &= \int_X f d\mu + \int_Y g d\mu.\end{aligned}$$

Time je dokazano traženo tvrđenje. □

4.4 Integral kompleksne merljive funkcije

Sada definišemo integral merljive kompleksne funkcije u odnosu na pozitivnu meru. Neka je $f = u + iv$ kompleksna merljiva funkcija na prostoru pozitivne mere $(X, \mathcal{R}, \mu)$. Tada su u, v realne merljive funkcije. Na osnovu nejednakosti

$$|u|, |v| \leq |f| \leq |u| + |v|,$$

sledi da je $|f| \in L_1(X, \mu)$ ako i samo ako $|u|, |v| \in L_1(X, \mu)$, odnosno ako i samo ako $u, v \in L_1(X, \mu)$. Dakle, *kompleksna funkcija $f = u + iv$ je integrabilna na (X, μ), ako i samo ako su realne funkcije u, v integrabilne na (X, μ).*

Nadalje, skupovi $L_1(X, \mu)$ i $L_p(X, \mu)$ sadrže odgovarajuće kompleksne merljive funkcije, osim ako posebno ne naglasimo da se radi o realnim funkcijama.

Teorema 4.4.1. *Neka su $f, g \in L_1(X, \mathcal{R})$ kompleksne funkcije, i neka je $\lambda \in \mathbb{C}$. Tada je $\lambda f, f + g \in L_1(X, \mathcal{R})$, i pri tome je*

$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu, \quad \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu,$$

$$\int_X |f+g|d\mu \leq \int_X |f|d\mu + \int_X |g|d\mu.$$

Dokaz. Neka $f = u + iv$, pri čemu su u, v realne (i integrabilne) funkcije.

Prvo pretpostavimo da je je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je $\lambda f = \lambda u + i\lambda v$. Prema definiciji integrala kompleksne funkcije, uzimajući u obzir i osobinu da realna konstanta "izađe" ispred integrala realne integrabilne funkcije, sledi da važi:

$$\int_X (\lambda f)d\mu = \int_X (\lambda u)d\mu + i\int_X (\lambda v)d\mu = \lambda\int_X ud\mu + i\lambda\int_X vd\mu = \lambda\int_X fd\mu.$$

Neka je $\lambda = i$. Tada, koristeći već dokazane osobine, proizilazi da važi

$$\begin{aligned}\int_X (if)d\mu &= \int_X (-v+iu)d\mu = \int_X (-v)d\mu + i\int_X ud\mu \\ &= -\int_X vd\mu + i\int_X ud\mu = i\int_X fd\mu.\end{aligned}$$

Na kraju, neka je $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Koristeći dokazane osobine, sledi da je ispunjeno

$$\begin{aligned}\int_X \lambda f d\mu &= \int_X (\alpha+i\beta)(u+iv)d\mu \\ &= \alpha\int_X ud\mu - \beta\int_X vd\mu + i\left(\alpha\int_X vd\mu + \beta\int_X ud\mu\right) \\ &= \lambda\int_X fd\mu.\end{aligned}$$

Neka je $g = t + is$, pri čemu su t, s realne (i integrabilne) funkcije. Koristeći aditivnost integrala u odnosu na realne integrabilne funkcije, sledi da

je

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)d\mu &= \int_X [(u+s)+i(v+t)]d\mu \\ &= \int_X (u+s)d\mu + i\int_X (v+t)d\mu \\ &= \int_X ud\mu + \int_X sd\mu + i\int_X gd\mu + i\int_X td\mu \\ &= \int_X fd\mu + \int_X gd\mu.\end{aligned}$$

Dokaz poslednje nejednakosti integrala sledi na osnovu elementarne nejednakosti funkcija $|f+g| \leq |f| + |g|$. □

Dokazujemo korisne rezultate o kompleksnim integrabilnim funkcijama.

Teorema 4.4.2. *Ako je* $\int_X |f|d\mu = 0$, *tada je* $f = 0$ μ*-ss.*

Dokaz. Neka je $\int_X |f|d\mu = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ i $F = \{x \in X : |f(x)| > 0\}$. Tada je $F_n \subset F_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F$. Sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$0 = \int_X |f|d\mu \geq \int_{F_n} |f|d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(F_n).$$

Mora biti $\mu(F_n) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je i $\mu(F) = 0$, odnosno $f = 0$ μ-ss. □

Teorema 4.4.3. *Ako je* $f \in L_1(X, \mu)$, *tada važi nejednakost*

$$\left|\int_X fd\mu\right| \leq \int_X |f|d\mu.$$

Ako je

$$\left|\int_X fd\mu\right| = \int_X |f|d\mu,$$

tada postoji $\alpha \in \mathbb{C}$, *tako da je* $\alpha f = |f|$ μ*-ss na* X.

Dokaz. Na osnovu pretpostavki, $z = \int\limits_X f d\mu \in \mathbb{C}$. Postoji kompleksan broj α tako da je $\alpha z = |z|$ i $|\alpha| = 1$. Neka je $u = \mathrm{Re}(\alpha f)$, $v = \mathrm{Im}(\alpha f)$. Tada je $|u| \leq |\alpha f| = |f|$. Sledi da važi

$$|z| = \left| \int\limits_X f d\mu \right| = \alpha \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X \alpha f d\mu = \int\limits_X u d\mu + i \int\limits_X v d\mu \in \mathbb{R}.$$

Stoga je $\int\limits_X v d\mu = 0$, te je

$$|z| = \int\limits_X u d\mu \leq \int\limits_X |f| d\mu.$$

Time je tražena nejednakost dokazana.

Ako je ispunjeno $\left| \int\limits_X f d\mu \right| = \int\limits_X |f| d\mu$, tada je $\int\limits_X u d\mu = \int\limits_X |f| d\mu$, odnosno $\int\limits_F (|f| - u) d\mu = 0$. Kako je $|f| - u \geq 0$, onda mora biti $|f| = u$ μ-ss na X. Dakle, $\mathrm{Re}(\alpha f) = |\alpha f|$ μ-ss na X, te je $\alpha f = |\alpha f| = |f|$ μ-ss na X. □

Teorema 4.4.4. *Ako je $f \in L_1(X, \mathcal{R})$, i ako je $\int\limits_E f d\mu = 0$ za svako $E \in \mathcal{R}$, tada je $f = 0$ μ-ss na X.*

Dokaz. Neka je $f = u + iv$ i $E = \{x \in X : u(x) \geq 0\}$. Tada je

$$0 = \mathrm{Re}\left(\int\limits_X f d\mu \right) = \int\limits_E u^+ d\mu.$$

Stoga je $u^+ = 0$ $\mu - ss$ na X. Analogno se dokazuje $u^- = v^+ = v^- = 0$ μ-ss na X. □

Teorema 4.4.5. *Neka je $f \in L_1(X, \mu)$ i $(E_n)_n$ niz uzajamno disjunktnih skupova iz $\mathcal{R}$. Ako je za svako $E \in \mathcal{R}$ funkcija φ definisana kao $\varphi(E) = \int\limits_E f d\mu$, tada je $\varphi\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n)$.*

Dokaz. Neka je f proširena realna funkcija. Tada je $f = f^+ - f^-$, i neka je $\varphi_1(E) = \int\limits_E f^+ d\mu$, $\varphi_2(E) = \int\limits_E f^- d\mu$ za svako $E \in \mathbb{R}$. Tada su φ_1 i φ_2 pozitivne mere na $\mathcal{R}$. Na osnovu integrabilnosti funkcije f sledi da su φ_1 i φ_2 konačne mere na $\mathcal{R}$, i važi $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Prema tome,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \varphi_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) - \varphi_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(E_n) - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_2(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(E_n).\end{aligned}$$

Time je dokazano tvrđenje teoreme.

Ako je $f = u + iv$ kompleksna funkcija, tada već dokazani rezultat primenimo na realne funkcije u i v. □

Teorema 4.4.6. (Teorema o dominantnoj konvergenciji, Lebeg) *Neka je $(f_n)_n$ niz merljivih kompleksnih ili proširenih realnih funkcija na X, sa svojstvima:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *μ-ss na X.*

(2) *Postoji funkcija $g \in L_1(X, \mu)$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi nejednakost $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-ss na X.*

Tada je $f, f_n \in L_1(X, \mu)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, i važi

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X |f_n - f| d\mu = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

Dokaz. Postoji skup E koji je mere nula, tako da za svako $x \in E^c$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Sledi da je funkcija f merljiva na E^c, a samim tim je merljiva i na X. Takođe, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji skup E_n koji je mere nula, tako da za svako $x \in E_n^c$ važi $|f_n(x)| \leq g(x)$. Sledi da je svaka funkcija f_n integrabilna na E_n^c, prema tome integrabilna je i na X. Neka je $F = E \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Tada je $\mu(F^c) = \mu\left(E^c \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) = 0$.

Nadalje je $x \in F$. Tada je $|f(x)| \leq g(x)$ za svako $x \in F$. Stoga je $|f_n - f| \leq 2g$. Takođe je $\lim\limits_{n\to\infty}(2g - |f_n - f|) = 2g$. Primenimo Teoremu Fatua na niz $(2g - |f_n - f|)_n$. Tada je

$$\int\limits_F \liminf_{n\to\infty}(2g - |f_n - f|) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int\limits_F (2g - |f_n - f|) d\mu,$$

odakle sledi

$$\int_F 2gd\mu \leq \int_F 2gd\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_F |f_n - f|d\mu.$$

Funkcija g je integrabilna na X, pa je integrabilna i na F. Stoga je $\int_F 2gd\mu < \infty$. Sledi $\limsup_{n\to\infty} \int_F |f_n - f|d\mu \leq 0$. Na osnovu nenegativnosti $|f_n - f| \geq 0$, sledi da poslednja granična vrednost postoji, i $\lim_{n\to\infty} \int_F |f_n - f|d\mu = 0$.

Iz $\mu(X \setminus F) = 0$, sledi da je $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|d\mu = 0$. Iz nejednakosti

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f|d\mu,$$

sledi $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. □

Kao primenu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji, izučavamo integrale sa parametrom.

Neka je μ pozitivna mera na prostoru $(X, \mathcal{R})$, neka je $M \subset \mathbb{R}$ i neka je $f : X \times M \to \mathbb{R}^*$ funkcija. Pretpostavimo da je ova funkcija merljiva na X za svako $t \in M$, i neka je za svako $t \in M$ ispunjeno $f(\cdot, t) \in L_1(X, \mu)$. Drugim rečima, za svako $t \in M$ je $\int_X |f(x,t)|d\mu(x) < \infty$. Tada je

$$F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x)$$

integral sa parametrom t.

Teorema 4.4.7. *Neka je $f : X \times M \to \mathbb{R}^*$ prethodno opisana funkcija, i neka je t_0 tačka nagomilavanja skupa M. Pretpostavimo da važi:*

(1) *Postoji $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x)$ μ-ss na X.*

(2) *Postoji $g \in L_1(X, \mu)$ tako da je $|f(x,t)| \leq g(t)$ za svako $t \in T$ i μ-ss $x \in X$.*

Tada je

$$\lim_{t\to t_0} \int_X f(x,t)d\mu(x) = \int_X \lim_{t\to t_o} f(x,t)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x).$$

Dokaz. Neka je $(t_n)_n$ proizvoljan niz elemenata iz M sa svojstvom $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Ako je $f_n(x) = f(x, t_n)$, tada je $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-s na X. Tvrđenje sada sledi na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji. $\square$

Dokazujemo tvrđenje o diferenciranju pod znakom integrala.

Teorema 4.4.8. *Neka je μ mera na prostoru $(X, \mathcal{R})$, $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : X \times M \to \mathbb{R}^*$ funkcija koja je merljiva za svako $t \in M$, i neka važi:*

(1) *Postoji $t_0 \in M$ tako da je $f(x, t_0)$ integrabilna na X.*

(2) *Postoji $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ za svako $t \in M$ i μ-ss $x \in X$.*

(3) *Postoji funkcija $g \in L_1(X, \mu)$, tako da je $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x)$ za svako $t \in M$ i μ-ss $x \in X$.*

Tada je funkcija

$$F(t) = \int\limits_X f(x, t) d\mu(x)$$

diferencijabilna u svakoj tački $t \in M$, i pri tome je

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_X f(x, t) d\mu(x) = \int\limits_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} d\mu(x).$$

Dokaz. Neka je $t \in [a, b]$. Za svako $x \in X$, na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti za funkciju $t \mapsto f(x, t)$ postoji tačka τ između t_0 i t za koju važi

$$f(x, t) = f(x, t_0) + (t - t_0) \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial t}.$$

Odavde sledi

$$|f(x, t)| \leq |f(x, t_0)| + (b - a) g(x)$$

μ-ss na X. Prema tome, $f(\cdot, t) \in L_1(X, \mu)$ za svako $t \in [a, b]$.

Takođe postoji parcijalni izvod

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \lim_{t_n \to t} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$$

μ-ss na X, za svaki niz $t_n \in [a, b]$ sa svojstvima $t_n \neq t$ i $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$.

Još jednom, na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti za funkcije $t \mapsto f(x, t)$, za svako $x \in X$ i za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji τ_n između t_0 i t_n, tako da važi

$$f(x,t_n) = f(x,t_0) + (t_n - t_0)\frac{\partial f(x,\tau_n)}{\partial t}.$$

Sada je ispunjeno

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\right| = \left|\frac{(t_n - t)\frac{\partial f(x,\tau_n)}{\partial t}}{t_n - t}\right| = \left|\frac{\partial f(x,\tau_n)}{\partial t}\right| \leq g(x)$$

μ-ss na X. Prema prethodnoj teoremi sledi da je

$$\begin{aligned}\frac{dF(t)}{dt} &= \lim_{t_n \to t} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{t_n \to t} \int\limits_X \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x) \\ &= \int\limits_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\mu(x).\end{aligned}$$

Time je dokazana teorema. □

Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji ima primenu i kod integraljenja konvergentnog reda.

Teorema 4.4.9. *Neka je $(f_n)_n$ niz merljivh funkcija na X, tako da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n| d\mu < \infty.$$

Tada red

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konvergira μ-ss na X, $f \in L_1(X,\mu)$ i

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

Dokaz. Na osnovu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n| d\mu < \infty$ sledi $f_n \in L_1(X,\mu)$ za svako n. Prema tome, svaka funkcija f_n je μ-ss konačna. Neka je Y skup na kome su sve

funkcije f_n konačne. Tada je $\mu(X \setminus Y) = 0$. Neka je $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ za $x \in Y$. Tada je

$$\int\limits_Y g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_Y |f_n| d\mu < \infty,$$

odakle sledi da je g μ-ss konačna na Y. Neka je Z merljiv podskup od Y na kome je g konačna. Tada je $\mu(X \setminus Z) = 0$. To znači da za svako $x \in Z$ red $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno konvergira, prema tome i obično konvergira ka funkciji f. Funkcija f je konačna za svako $x \in Z$, i očigledno je $|f| \leq g$. Prema tome, $f \in L_1(Z, \mu)$, odnosno $f \in L_1(X, \mu)$. Neka je $h_n = f_1 + \cdots + f_n$ za $n \in \mathbb{N}$ na skupu Z. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = f$ na Z i $|h_n| \leq g$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu Teoreme o dominantnoj konvergenciji, sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X h_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$, čime je dokazano tvrđenje teoreme. □

Razmatramo odnos integrala i ravnomerno konvergentnog niza funkcija.

Teorema 4.4.10. *Neka je $\mu(X) < \infty$, i neka je $(f_n)_n$ niz ograničenih merljivih funkcija na X, koji konvergira ravnomerno ka funkciji f na skupu X. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f| d\mu = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ i svako $x \in X$ važi $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{\mu(X)}$. Dakle, za $n \geq n_0$ važi $\int\limits_X |f_n - f| d\mu < \epsilon$, odakle sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f| d\mu = 0$. Preostali deo tvrđenja je jednostavan. □

Teorema 4.4.11. *Neka je $\mu(X) < \infty$, $f \in L_1(X, \mu)$, F je zatvoren podskup od $\mathbb{C}$. Pretpostavimo da za svaki skup $E \in \mathcal{R}$ sa svojstvom $\mu(E) > 0$ važi*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f d\mu \in F.$$

Tada $f(x) \in F$ za μ-ss $x \in X$.

Dokaz. Ako je $F = \mathbb{C}$, onda tvrđenje trivijalno važi.

Stoga pretpostavimo da je $F \neq \mathbb{C}$. Skup F^c je otvoren i neprazan. Neka je $D = D[a; r]$ zatvoreni kružni disk sa centrom u a poluprečnika $r > 0$, tako da je $D \subset F^c$. Štaviše, skup F je prebrojiva unija ovakvih diskova. Neka je $E = f^{-1}(D)$. Ako je $\mu(E) > 0$, onda je

$$\left| \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f d\mu - a \right| = \frac{1}{\mu(E)} \left| \int\limits_E (f - a) d\mu \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E |f - a| d\mu \leq r.$$

Međutim, iz $D \subset F^c$ i $\frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f d\mu \in F$, sledi da mora biti

$$\left| \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f d\mu - a \right| > r.$$

Prema tome, nije moguće $\mu(E) > 0$, i stoga važi $\mu(E) = 0$. Iz činjenice da je F^c prebrojiva unija diskova $D[a; r]$ za pogodno odabrane $a \in F^c$ i $r > 0$, sledi da mora biti $\mu(f^{-1}(F^c)) = 0$, te je $f(x) \in F$ za μ-skoro svako $x \in X$. $\square$

Teorema 4.4.12. *Neka je $(E_n)_n$ niz merljivih skupova u X, tako da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Tada za μ-ss $x \in X$ postoji $k(x) \in \mathbb{N}$ tako da je x pripada samo skupovima $E_1, \ldots, E_{k(x)}$.

Dokaz. Neka je A skup svih $x \in X$, tako da postoji beskonačno mnogo skupova E_n koji sadrže x. Neka je $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$. Očigledno, $x \in A$ ako i samo ako je $g(x) = +\infty$. Kako je

$$\int\limits_X g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty,$$

sledi $g \in L_1(X, \mu)$, te je g μ-ss konačna funkcija. Prema tome, $\mu(A) = 0$. $\square$

4.5 Lebegov integral

Ako je $\mathcal{R}^*$ familija Lebeg merljivih skupova na $\mathbb{R}$ i ako je $\mu = m$, onda je

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f dm = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dm = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) dm(x)$$

Lebegov integral funkcije f na skupu $\mathbb{R}$. Takođe, $\int\limits_a^b f dm$ je Lebegov integral funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Sa druge strane, Rimanov integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ je označen sa $\int\limits_a^b f(x)dx$. Ako je $A \in \mathcal{R}^*$, umesto $L_1(A, m)$ kraće se piše $L_1(A)$.

Jednostavno je pokazati prednosti Lebegovog integrala u odnosu na (svojstven) Rimanov integral.

Primer 4.5.1. Posmatrajmo Dirihleovu[4] funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Rimanov integral funkcije f na segmentu $[0, 1]$ ne postoji, jer su donje Darbuove sume uvek jednake 0, a gornje Darbuove sume su uvek jednake 1. Sa druge strane, zbog $m(\mathbb{Q}) = 0$, važi $\int\limits_0^1 f dm = 0$.

Teorema 4.5.1. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ako je f integrabilna u Rimanovom smislu na $[a, b]$, onda je f integrabilna u Lebegovom smislu na $[a, b]$, i ova dva integrala su jednaka.*

Dokaz. Neka je f integrabilna u Rimanovom smislu na $[a, b]$. Tada je f ograničena funkcija.

Neka je (P_k) niz sukcesivnih podela segmenta $[a, b]$:

$$a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{n_k}^k = b,$$

pri čemu maksimalna dužina podela teži nuli kada $k \to \infty$. Takođe, podela P_{k+1} je "finija" od podele P_k, u smislu da se sve podeone tačke $\{x_i^k\}$ nalaze

[4] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar

među podeonim tačkama $\{x_j^{k+1}\}$. Važi $d(P_k) = \max\limits_{1\le i\le n_k} |x_i^k - x_{i-1}^k| \to 0$ kada $k \to \infty$. Neka su $s(P_k)$ i $S(P_k)$, redom, donja i gornja Darbuova suma funkcije f u odnosu na podelu P_k. Drugim rečima, neka je

$$m_i^k = \inf\{f(x) : x_{i-1}^k \le x < x_i^k\},\ M_i^k = \sup\{f(x) : x_{i-1}^k \le x < x_i^k\},$$
$$i = 1, \dots, n_k.$$

Tada je

$$s(P_k) = \sum_{i=1}^{n_k} m_i^k (x_i^k - x_{i-1}^k), \quad S(P_k) = \sum_{i=1}^{n_k} M_i^k (x_i^k - x_{i-1}^k).$$

Na osnovu integrabilnosti funkcije f u Rimanovom smislu, sledi da je

$$\lim_{k\to\infty} s(P_k) = \lim_{k\to\infty} S(P_k) = \int_a^b f(x)dx.$$

Svaka podela P_k indukuje proste funkcije:

$$t_k = \sum_{i=1}^{n_k} m_i^k \chi_{[x_{i-1},x_i)},\ T_k = \sum_{i=1}^{n_k} M_i^k \chi_{[x_{i-1},x_i)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Niz $(P_k)_k$ je niz sukcesivnih podela, odakle sledi

$$t_1 \le t_2 \le \dots \le f \le \dots \le T_2 \le T_1.$$

Očigledno, sve funkcije t_k i T_k su Lebeg-merljive. Postoje Lebeg-merljive funkcije t i T, tako da za svako $x \in [a, b]$ važi

$$\lim_{k\to\infty} t_k(x) = t(x) \le f(x) \le T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x).$$

Takođe je

$$\int_a^b t_k dm = s(P_k),\ \int_a^b T_k dm = S(P_k).$$

Na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji (T_1 je integrabilna funkcija), kao i na osnovu integrabilnosti funkcije f na segmentu $[a, b]$ u

Rimanovom smislu, važi

$$\begin{aligned}\int_a^b t dm &= \lim_{k\to\infty}\int_a^b t_k dm = \lim_{k\to\infty} s(P_k) = \int_a^b f(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty} S(P_k) = \lim_{k\to\infty}\int_a^b T_k dm = \int_a^b T dm.\end{aligned}$$

Iz $T(x) \geq t(x)$ za svako $x \in [a,b]$ sledi da mora biti $T(x) = t(x)$ m-ss na $[a,b]$. Kako je $t(x) \leq f(x) \leq T(x)$ za svako $x \in [a,b]$, sledi da je $f(x) = t(x) = T(x)$ m-ss na $[a,b]$. Lebegova mera je kompletna na $[a,b]$, te je funkcija f Lebeg-merljiva.

Na kraju, trivijalno sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f dm.$$

□

Lebegova mera omogućava jasan kriterijum integrabilnosti u Rimanovom smislu neke ograničene funkcije.

Teorema 4.5.2. *Neka je f ograničena funkcija na $[a,b]$. Funkcija f je integrabilna u Rimanovom smislu na segmentu $[a,b]$, ako i samo ako je f neprekidna svuda na $[a,b]$ osim eventualno na skupu Lebegove mere nula.*

Dokaz. Zadržimo oznake iz dokaza prethdne teoreme. Neka je, dakle $(P_k)_k$ niz sukcesivnih podela segmenta $[a,b]$, tako da $d(P_k) \to 0$ kada $k \to \infty$. Neka je A skup dobijen od skupa $[a,b]$ izbacivanjem svih podeonih tačaka svih particija P_k. Očigledno, $m([a,b] \setminus A) = 0$.

Neka je $x_0 \in A$. Dokazaćemo da je f neprekidna u x_0 ako i samo ako je $t(x_0) = T(x_0)$.

Pretpostavimo da je f neprekidna u tački x_0 i neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x \in [a,b]$ sa svojstvom $|x - x_0| < \delta$ važi $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Neka je I_k interval podele P_k koji sadrži tačku x_0. Tada je $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ i $\lim\limits_{k\to\infty} d(I_k) = 0$. Stoga postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $k \geq k_0$ važi $I_k \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ako je $x \in I_k$, tada je $f(x_0) - \epsilon \leq t_k(x) \leq$

$T_k(x) \leq f(x_0) + \epsilon$. Dakle, za svako $k \geq k_0$ mora važiti $T_k(x_0) - t_k(x_0) \leq 2\epsilon$. Prema tome, $T(x_0) = t(x_0)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $T(x_0) = t(x_0)$. Neka je I_k interval podele P_k koji sadrži x_0. Iz činjenice $\lim\limits_{k\to\infty}(T_k(x_0) - t_k(x_0)) = 0$ sledi da za svako $\epsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $k \geq k_0$ važi $T_k(x_0) - t_k(x_0) < \epsilon$. Funkcije T_k i t_k su konstantne na intervalu I_k, odakle sledi $T_k(x) - t_k(x) < \epsilon$ za svako $x \in I_k$. To znači da za svako $x \in I_k$ važi $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Sledi da je f neprekidna u tački x_0.

Pretpostavimo da je funkcija f integrablina u Rimanovom smislu na $[a, b]$. Tada je $T(x) = t(x) = f(x)$ m-ss na $[a, b]$, pa i m-ss na A. Prema prethodno dokazanom, sledi da je f neprekidna m-ss na A, a samim tim f je neprekidna m-ss na $[a, b]$.

Obrnuto, neka je f neprekidna m-ss na $[a, b]$. Tada je $t(x) = T(x)$ m-ss na $[a, b]$, odakle sledi

$$\int\limits_a^b t dm = \int\limits_a^b T dm.$$

Ako je $\epsilon > 0$ proizvoljno, onda postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $k \geq k_0$ važi $\int\limits_a^b T_k dm - \int\limits_a^b t_k dm < \epsilon$, što je isto kao i $S(P_k) - s(P_k) < \epsilon$. Sledi da je f integrabilna u Rimanovom smislu na $[a, b]$. $\square$

Na osnovu jednakosti Lebegovog i (svojstvenog) Rimanovog inegrala, ne može se izvesti zaključak o jednakosti Lebegovog i nesvojstvenog Rimanovog integrala. Preciznije, postoje funkcije koje su integrabilne u Lebegovom smislu, ali nisu integrabilne u nesvojstvenom Rimanovom smislu. Takođe postoje funkcije koje su integrabilne u nesvojstvenom Rimanovom smislu, ali nisu integrabilne u Lebegovom smislu.

Primer 4.5.2. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in [0, +\infty) \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ne postoji $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$, ali postoji $\int\limits_1^{+\infty} f dm$.

Dokaz. Funkcija f nije integrabilna u Rimanovom smislu ni na jednom segmentu $[1, b]$ za $b > 1$, i stoga ne postoji nesvojstveni Rimanov integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Sa druge strane, $m(\mathbb{Q}) = 0$, odakle sledi da je

$$\int\limits_1^{+\infty} f dm = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

□

Primer 4.5.3. Neka je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ za $x \in (0, +\infty)$. Tada postoji $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$, ali ne postoji $\int_0^{+\infty} f dm$.

Dokaz. Integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ je poznat kao Dirihleov integral.

Sa druge strane, za Lebegov integral važi jednostavna formula $\int\limits_a^b f(x + c)dm(x) = \int\limits_{a+c}^{b+c} f(x)dm(x)$, koja se dokazuje na osnovu tranlsatorne invarijantnosti Lebegove mere. Stoga je

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(x + k\pi)}{x + k\pi} \right| dm$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + k\pi} dm \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^{\pi} \sin x \, dm$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

□

Dakle, ne postoji opšiti odnos između nesvojstvenog Rimanovog integrala i Lebegovog integrala. Sa druge strane, postoji jednostavna veza između apsolutno konvergentnog Rimanovog integrala i Lebegovog integrala.

Teorema 4.5.3. *Neka je funkcija f definisana na intervalu $[a, +\infty)$ i neka postoji nesvojstveni Rimanov integral $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$. Tada je funkcija f Lebeg-integrabilna na $[a, +\infty)$ i važi*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f dm.$$

Dokaz. Neka je $(b_n)_n$ niz brojeva sa osobinama $a < b_1 < b_2 < \cdots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Na svakom segmentu $[a, b_n]$ je funkcija f integrabilna u Rimanovom smislu, dakle i u Lebegovom smislu. Specijalno, funkcije $f\chi_{[a,b_n]}$ su merljive za svako n. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} f\chi_{[a,b_n]} = f$ sledi merljivost funkcije f na $[a, +\infty)$. Tada je

$$\begin{aligned} +\infty > \int_a^{+\infty} |f(x)|dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} |f|dm \\ &= \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a,b_n]} |f|dm = \int_a^{+\infty} |f|dm. \end{aligned}$$

Primetimo da smo u poslednjoj jednakosti iskoristili neprekidnost mere $E \mapsto \varphi(E) = \int_E |f|dm$. Sledi da je funkcija f integrabilna u Lebegovom smislu na $[a, +\infty)$.

Neka je $f_n = f\chi_{[a,b_n]}$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ na $[a, +\infty)$, i $|f_n| \leq |f|$. Na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji je sada

$$\begin{aligned} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{b_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{b_n} f dm = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\chi_{[a,+\infty)} dm \\ &= \int\limits_a^{+\infty} f dm. \end{aligned}$$

□

Potpuno analogno tvrđenje može biti dokazano za integral tipa $\int_a^b f dm$, ako je funkcija f neograničena u okolini tačke a.

Primer 4.5.4. Izračunati $I = \lim\limits_{k\to 0} \int\limits_k^{k+1} \frac{dm(x)}{1+x^2+k^2}$.

Dokaz. Neka je $f(x,k) = \frac{1}{1+x^2+k^2}\chi_{[k,1+k]}$. Tada je $\lim\limits_{k\to 0} f(x,k) = \frac{1}{1+x^2}\chi_{[0,1]} = f(x)$. Ako je $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ za $x \in \mathbb{R}$, tada je $g \in L_1(\mathbb{R})$. Takođe je $|f(x,k)| \leq g(x)$ za svako $k, x \in \mathbb{R}$. Stoga je, na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji

$$I = \lim_{k\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,k)dm(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dm = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Dakle, Lebegov integral je opštiji od svojstvenog Rimanovog integrala, kao i od apsolutno konvergentnog nesvojsvtenog Rimanovog integrala. Sa druge strane, nesvojstven Rimanov integral i Lebegov integral su neuporedivi. Postoji nesvojstven Lebegov integral koji je opštiji od nesvojstvenog Rimanovog integrala.

Glava 5

Konvergencije nizova funkcija

5.1 L_p prostori

Neka je $1 \leq p < +\infty$. Podsećamo da je $L_p(X, \mu)$ skup svih merljivih (proširenih realnih ili kompleksnih) funkcija f definisanih na X, za koje je $\int\limits_X |f|^p \mu < \infty$.

Da bi dokazali neka svojstva prostora $L_p(X, \mu)$, potrebno je formulisati i dokazati nekoliko nejednakosti. Ako je $1 \leq p, q < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onda je (p, q) dualni par brojeva. Specijalno, uređeni parovi $(1, +\infty)$ i $(+\infty, 1)$ jesu takođe dualni parovi.

Teorema 5.1.1. (Jang[1]) *Ako je (p, q) dualni par brojeva $(p, q > 1)$, tada za sve pozitivne brojeve a, b važi nejednakost*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dokaz. Neka je $\varphi(t) = t^p/p + t^{-q}/q$ za $t > 0$. Tada je $\varphi'(t) = (t^{p+q} - 1)/t^{q+1}$. Odavde sledi da je $\varphi'(t) < 0$ za $t \in (0, 1)$, kao i $\varphi'(t) > 0$ za $t > 0$. Prema tome, funkcija φ ima apsolutni minimum u tači $t = 1$, odnosno $\varphi(t) \geq \varphi(1) = 1$ za svako $t > 0$. Neka je $t = a^{1/q} b^{-1/p}$. Tada je $(a^{1/q} b^{-1/p})^p/p + (a^{1/q} b^{-1/p})^{-q}/q \geq 1$, odnosno $ab \leq a^p/p + b^q/q$. $\square$

[1] William Henry Young (1863-1942), engleski matematičar

Teorema 5.1.2. (Helder[2]) *Neka je* (p, q) *dualni par brojeva* $(p, q > 1)$, *i neka su* $f, g : X \to [0, +\infty]$ *merljive funkcije. Tada je*

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Dokaz. Ako je $\int_X f^p d\mu = 0$, onda je $f = 0$ μ-skoro svuda da X, te je i $fg = 0$ μ-skoro svuda na X. U ovom slučaju teorema važi trivijalno. Dakle, pretpostavimo da je $\int_X f^p d\mu > 0$ i $\int_X g^q d\mu > 0$. Ako je $\int_X f^p d\mu = +\infty$, onda teorema očigledno važi.

Stoga neka je $0 < \int_X f^p d\mu < +\infty$ i $0 < \int_X g^q d\mu < +\infty$. Neka je $s \in X$ i

$$F(s) = \frac{f(s)}{\left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p}}, \; G(s) = \frac{g(s)}{\left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q}}.$$

Tada je

$$\int_X F^p d\mu = 1 \text{ i } \int_X G^q d\mu = 1.$$

Tražena nejednakost Heldera ekvivalentna je nejednakosti

$$\int_X FG \, d\mu \leq 1.$$

Iskoristimo Teoremu 5.1.1, pri čemu je $a = F(s)$ i $b = G(s)$. Proizilazi da za svako $s \in X$ važi

$$\frac{f(s)\, g(s)}{\left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q}} \leq \frac{f(s)^p}{p \int_X f^p d\mu} + \frac{g(s)^q}{q \int_X g^q d\mu}.$$

Integraljenjem poslednje nejednakosti na X sledi traženi rezultat. □

[2]Otto Ludwig Hölder (1859-1937), nemački matematičar

Teorema 5.1.3. (Minkovski[3]) *Neka je $p \geq 1$ i $f, g : X \to [0, +\infty]$ merljive funkcije. Tada je*

$$\left(\int_X (f+g)^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p dt\right)^{1/p}.$$

Dokaz. Ako je $p = 1$, onda nejednakost Minkovskog trivijalno važi. Stoga pretpostavimo da je $1 < p, q < +\infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako je $\int_X f^p d\mu = +\infty$, jednakost takođe važi.

Stoga neka je $f, g \in L_p(X, \mu)$. Funkcija $\psi(t) = t^p$ je konveksna za $t \in (0, +\infty)$. Odatle sledi nejednakost

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p).$$

Prema tome, na osnovu $f, g \in L_p(X, \mu)$, sledi $f + g \in L_p(X, \mu)$. Ako je $\int_X (f+g)^p d\mu = 0$, onda je nejednakost dokazana. Pretpostavimo zato da je $0 < \int_X (f+g)^p d\mu < +\infty$. Tada važi

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

Na osnovu nejedankosti Heldera sledi

$$\int_X f(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}.$$

Analogno, važi

$$\int_X g(f+g)^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}.$$

Sabiranjem poslednje dve nejednakosti, i korišćenjem $p + q = pq$, dobijamo

$$\int_X (f+g)^p d\mu \leq \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/q} \left[\left(\int_X f^p \mu)\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\right].$$

[3]Hermann Minkowski (1864-1909), litvanijsko-nemački matematičar

Na kraju sledi tražena nejednakost. □

Posledica 5.1.1. *Ako je* $p \geq 1$, $f, g \in L_p(X, \mu)$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$, *tada je* $\alpha f + \beta g \in L_p(X, \mu)$.

Prema tome, $L_p(X, \mu)$ *je vektorski prostor (nad* $\mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C}$*).*

Dokaz. Neophodno je iskoristiti još jednom konveksnost funkcije $t \mapsto t^p$, kao i nejednakost trougla:

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Rezultat sledi integraljenjem prethodne jednakosti. □

Neka je $f, g \in L_p(X, \mu)$. Tada funkcija d_p, definisana kao

$$d_p(f, g) = \left(\int_X |f - g|^p d\mu \right)^{1/p}$$

zadovoljava osobinu trougla (sledi iz nejednakosti Minkovskog). Pored toga, ova funkcija ima gotovo sve osobine metrike, osim jedne:

Ako je $d_p(f, g) = 0$, onda je $f = g$ μ-ss na X; nije obavezno $f = g$ na X.

Da bi se prevazišao ovaj nedostatak, formalno se može postupiti na sledeći način. Uvedimo relaciju $\sim$ u $L_p(X, \mu)$: $f \sim g$ ako i samo ako je $f = g$ μ-ss na X. Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije u $L_p(X, \mu)$. Posmatrajmo skup $\mathcal{L}_p = L_p(X, \mu)/\sim$. Ako je $[f]_\sim, [g]_\sim \in \mathcal{L}_p$, onda je $d_p([f]_\sim, [g]_\sim) = \left(\int_X |f - g|^p d\mu \right)^{1/p}$. Tada je d_p metrika na $\mathcal{L}_p$.

Međutim, ovakve oznake nisu prikladne. Stoga, umesto pravog metričkog prostora $\mathcal{L}_p$ posmatramo prostor funkcija $L_p(X, \mu)$, koji smatramo metričkim prostorom, i jednostavno poistovećujemo funkcije koje su jednake μ-ss na X.

Ako je 0 nula-funkcija na X, tada je, očigledno, $0 \in L_p(X, \mu)$. Tada je za $f \in L_p(X, \mu)$ veličina

$$\|f\|_p = d_p(f, 0) = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

norma na vektorskom prostoru L_p. Dakle, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ je normirani prostor. Još jednom, ako je $\|f\|_p = 0$, onda je $f = 0$ μ-ss na X. Stoga i u ovom slučaju poistovećujemo funkcije koje su μ-ss jednake.

Merljiva funkcija f je ograničena μ-ss na X, ako postoji $M > 0$, tako da je $|f| \leq M$ μ-ss na X. Najmanji broj M sa prethodom osobinom jeste μ-ss granica funkcije f, ili ∞-norma funkcije f. Drugim rečima,

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : |f| \leq M \ \mu\text{−ss}\}.$$

Skup svih μ-ss ograničenih funkcija na X označen je sa $L_\infty(X, \mu)$. Skup $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ je normirani prostor, naravno uz poistovećivanje μ-ss jednakih funkcija.

Primer 5.1.1. Neka je μ_d mera prebrojavanja na skupu $\mathbb{N}$. Ako je $1 \leq p < \infty$, onda je $L_p(\mathbb{N}, \mu_d) = \ell_p$ skup svih kompleksnih (ili realnih) nizova $x = (x_n)_n$, sa svojstvom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Tada je $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

Skup $L_\infty(\mathbb{N}, \mu_d) = \ell_\infty$ je skup svih ograničenih nizova $x = (x_n)_n$. U ovom slučaju je $\|x\|_\infty = \sup\limits_n |x_n|$.

U skladu sa novim oznakama, nejednakosti Heldera i Minkovskog imaju oblik:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \ f \in L_p, \ g \in L_q,$$
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \ f, g \in L_p.$$

Pri tome je $1 < p < \infty$ i $1/p = 1/q = 1$. Nejednakost Heldera važi i u slučaju kada je $p = 1$ i $q = +\infty$. Nejednakost Minkovskog važi i ako je $p = +\infty$.

Teorema 5.1.4. *Normirani prostor $L_p(X, \mu)$ je Banahov* $(1 \leq p \leq \infty)$.

Dokaz. (1) Neka je $1 \leq p < \infty$. Dovoljno je dokazati da iz apsolutne konvergencije proizvoljnog reda u $L_p(X, \mu)$ sledi obična konvergencija tog istog reda. Neka je $(f_n)_n$ niz u $L_p(X, \mu)$, i neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = A < \infty$. Treba dokazati da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergentan red u $L_p(X, \mu)$. Neka je

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|, \quad x \in X, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Na osnovu nejednakosti trougla sledi $\|g_n\|_p \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq A$, odnosno $\int\limits_X g_n^p d\mu < A^p$. Niz $(g_n)_n$ je rastući po n, i stogapostoji $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$. Tada je g

proširena realna i merljiva funkcija. Na osnovu Teoreme o monotonoj konvergenciji, sledi $\int\limits_X g^p d\mu \leq A^p$. Prema tome, $g \in L_p(X,\mu)$, te je funkcija g μ-ss konačna. Zato je $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ μ-ss konačna i merljiva funkcija. Iz $|f| \leq g$ sledi $f \in L_p(X,\mu)$, te je

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right|^p \leq 2^p[g(x)]^p \ , \ n = 1, 2, \ldots .$$

Na osnovu Teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right|^p d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right|^p d\mu = 0.$$

Dakle, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira ka f u smislu norme $\|\cdot\|_p$. Time je dokazano tvrđenje.

(2) Neka je $p = \infty$ i neka je $(f_n)_n$ Košijev niz u $L_\infty(X,\mu)$. Neka je $A_k = \{x \in X : |f_k(x)| \geq \|f_k\|_\infty\}$ i neka je $B_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \|f_n - f_m\|_\infty\}$, za $k, n, m \in \mathbb{N}$. Neka je $E = \bigcup\limits_k \bigcup\limits_n \bigcup\limits_m (A_k \cup B_{n,m})$. Tada je $\mu(E) = 0$ i $(f_n)_n$ ravnomerno konvergira ka nekoj funkciji f na skupu E^c. Sledi da je f ograničena funkcija na E^c. Neka je $f(x) = 0$ za $x \in E$. Tada je $f \in L_\infty(X,\mu)$ i $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ kada $n \to \infty$. $\square$

Među svim prostorima $L_p(X,\mu)$, najinteresantniji je prostor $L_2(X,\mu)$. Naime, neka je $f, g \in L_2(x,\mu)$. Tada su f, g μ-ss konačne funkcije, te je $f\overline{g}$ μ-ss definisana i konačna. Na osnovu nejednakosti Heldera (za $p = q = 2$) važi

$$\int\limits_X |f\overline{g}|\, d\mu \leq \left(\int\limits_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_X |g|^2 d\mu)\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Sledi da je funkcija $f\overline{g}$ integrabilna na X. Definišimo funkciju $\langle\cdot,\cdot\rangle : L_2(X,\mu) \times L_2(X,\mu) \to \mathbb{C}$ na sledeći način:

$$\langle f, g\rangle := \int\limits_x f\overline{g}\, d\mu.$$

Funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ispunjava sve osobine skalarnog proizvoda, osim jedne: ako je $\langle f,f\rangle = 0$, onda je $f = 0$ μ-ss na X. Tada je $f = 0$ u prostoru $L_2(X,\mu)/\sim$ (podsetimo da je $g \sim h$ ako i samo ako je $g = h$ μ-ss na X). Prema tome, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalarni proizvod u $L_2(X,\mu)/\sim$. U cilju uprošćavanja oznaka, smatramo da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni proizvod u $L_2(X,\mu)$. Tada je

$$\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle, norma $\|\cdot\|_2$ u prostoru $L_2(X,\mu)$ je određena skalarnim proizvodom. Kako je $L_2(X,\mu)$ Banahov prostor, upravo smo utvrdili da je $L_2(X,\mu)$ Hilbertov prostor.

Specijalno ℓ_2 je Hilbertov prostor, pri čemu je za $x = (x_n)_n \in \ell_2$ i $y = (y_n)_n \in \ell_2$ ispunjeno

$$\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n.$$

Napominjemo (još jednom) da se u fizici, po pravilu, konuguje prvi činilac, odnosno $\langle f,g\rangle = \int \overline{f} g\, d\mu$ u L_2, i $\langle x,y\rangle = \sum \overline{x}_n y_n$ u ℓ_2.

Sada dokazujemo interesantan rezultat koji povezuje proste i integrabilne funkcije.

Teorema 5.1.5. *Neka je S klasa svih kompleksnih, merljivih i prostih funkcija s definisanih na prostoru (X,μ), sa svojstvom $\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty$. Ako je $1 \leq p < \infty$, tada je skup S gust u prostoru $L_p(X,\mu)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_p$.*

Dokaz. Neka je $s \in S$ i neka je $X_s = \{x \in X : s(x) \neq 0\}$. Iz merljivosti funkcije s sledi merljivost skupa X_s. Na osnovu $s \in S$ proizilazi $\mu(X_s) < \infty$, te je $\int\limits_X |s|^p d\mu = \int\limits_{X_s} |s|^p \mu < \infty$. Dakle, $S \subset L_p(X,\mu)$.

Neka je $f \in L_p(X,\mu)$ i $f \geq 0$. Prema Teoremi o aproksimaciji pozitivnih funkcija sledi da postoji niz $(s_n)_n$ prostih nenegativnih i merljivih funkcija (s_n) sa svojstvima: $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$ na X. Iz $f \in L_p(X,\mu)$ sledi $s_n \in L_p(X,\mu)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Svaka funkcija s_n uzima konačno mnogo konstantnih vrednosti, odakle sledi $\mu(X_{s_n}) < \infty$. Prema tome, $s_n \in S$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Imajući u vidu da je $|f - s_n|^p \leq 2^p f^p$, može se primeniti Teorema o dominantnoj konvergenciji, te je $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n - f\|_p = 0$. Stoga je $f \in \operatorname{cl} S$, pri čemu je zatvorenje uzeto u smislu norme $\|\cdot\|_p$.

Neka je $f = u + iv = u^+ - u^- + i(v^+ - v^-) \in L_p(X, \mu)$ proizvoljna kompleksna funkcija. Na osnovu $|u| \leq |f|$ i $f \in L_p(X, \mu)$ sledi da je $u, v \in L_p(X, \mu)$. Kako je $u^+ = \frac{|u|+u}{2}$ i $u^- = \frac{|u|-u}{2}$, sledi da je $u^+, u^-, v^+v^- \in L_p(X, \mu)$. Primenom prethodno dokazanog rezultata na nenegativne funkcije u^+, u^-, v^+, v^- dokazujemo tvrđenje teoreme. $\square$

5.2 Konvergencija po meri

Do sada smo razmatrali različite vidove konvergencije nizova funkcija. Pored poznate obične (tačkaste) konvergencije, kao i ravnomerne konvergencije, u ovom kursu je korišćena konvergencija μ-ss, kao i konvergencija u prostoru L_p, odnosno konvergencija u smislu metrike d_p $(1 \leq p \leq \infty)$. Sada ćemo razmotriti konvergenciju niza funkcija po meri μ, koja se još naziva konvergencija po verovatnoći.

Definicija 5.2.1. Neka je $(f_n)_n$ niz μ-ss konačnih merljivih funkcija na $(X, \mathcal{R})$, i neka je f takođe μ-ss konačna merljiva funkcija. Niz f_n *konvergira po meri* μ ka funkciji f, ako je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

za svako $\epsilon > 0$. Oznaka je $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Takođe koristimo oznaku $E_n(\epsilon)\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\epsilon > 0$.

Uslov da su sve funkcije f_n i f μ-ss konačne može se izbeći smanjivanjem skupa X. Naime, tada se posmatra podskup Y na kome sve razlike $f_n - f$ imaju smisla.

Sledeće tvrđenje se odnosi na jednoznačnost granične vrednosti niza, koji konvergira po meri.

Teorema 5.2.1. *Ako niz $(f_n)_n$ μ-ss konačnih i merljivih funkcija, konvergira na skupu $E \in \mathcal{R}$ po meri μ ka merljivim i μ-ss konačnim funkcijama f i g, tada je $f = g$ μ-ss na E.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}&\{x \in E : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subset \\ &\subset \{x \in E : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\} \cup \{x \in E : |g(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}.\end{aligned}$$

Odavde sledi

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in E : |f(x) - g(x)| \ \geq \ \epsilon\}) \leq \mu(\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}) \\ +\mu(\cup\{x \in E : |g(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\})\end{aligned}$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n(\epsilon)) = 0$ za svako $\epsilon > 0$. Na osnovu inkluzije

$$\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

sledi da je $f = g$ μ-ss na E. □

U sledećoj teoremi dat je odnos između konvergencije μ-ss i konvergencije po meri.

Teorema 5.2.2. (Lebeg) *Ako je skup $E \in \mathcal{R}$ takav da je $\mu(E) < \infty$, i niz $(f_n)_n$ μ-ss konačnih funkcija koji μ-ss konvergira ka funkciji f, koja je takođe μ-ss konačna, tada $(f_n)_n$ konvergira po meri μ ka funkciji f na skupu E.*

Dokaz. Pretpostavimo da su f_n i f μ-ss konačne funkcije. Funkcije f_n su merljive, odakle sledi merljivost funkcije f. Neka je $\epsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo skup

$$E_n(\epsilon) = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}.$$

Neka je $A_n = \{x \in E : |f_n(x)| = +\infty\}$, $A = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$ i $B = \{x \in E : f_n(x) \text{ ne teži } f(x)\}$. Tada su svi skupovi A_n, A i B mere nula, te je i skup $Q = A \cup B \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mere nula. Neka je $x \in E \setminus Q$. Tada su $f_n(x)$ i $f(x)$ realni brojevi za svako $n \in \mathbb{N}$, kao i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Za dato $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$ važi $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Drugim rečima, $x \notin E_n(\epsilon)$ za svako $n \geq n_0$. Neka je

$$R_n(\epsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\epsilon), \quad R_\infty(\epsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\epsilon).$$

Očigledno je $R_n(\epsilon) \supset R_{n+1}(\epsilon)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Iz činjenice $x \notin E_n(\epsilon)$ za svkao $n \geq n_0$ sledi da $x \notin R_{n_0}(\epsilon)$, te je $x \notin R_\infty(\epsilon)$. Dakle, dokazali smo $E \setminus Q \subset E \setminus R_\infty(\epsilon)$, odakle sledi $R_\infty(\epsilon) \subset Q$ i $\mu(R_\infty(\epsilon)) = 0$. Na osnovu monotonosti mere μ sledi da je

$$\mu(R_\infty(\epsilon)) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(R_n).$$

Iz $E_n(\epsilon) \subset R_n(\epsilon)$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n(\epsilon)) = 0$, sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n(\epsilon)) = 0$. $\square$

Prethodna teorema ne važi ako je $\mu(E) = \infty$.

Primer 5.2.1. Neka je $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$, $\mu = m$ neka je Lebegova mera, i $E = [0, +\infty)$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Tada je, očigledno, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za svako $x \in E$. Sa druge strane, ako je $0 < \epsilon < 1$, onda je

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - 0| \geq \epsilon\}) = m([n, n+1]) = 1.$$

Dakle, $(f_n)_n$ ne konvergira ka 0 po meri m na skupu E.

Iz konvergenciji po meri ne sledi konvergencija skoro svuda.

Primer 5.2.2. Neka je $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$, $\mu = m$ je Lebegova mera, i neka je $E = [0, 1)$. Za svako $k \in \mathbb{N}$ podelimo interval $[0, 1)$ na intervale dužine $\frac{1}{k}$, odnosno posmatramo intervale $\left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$, $i = 0, \ldots, k-1$, a onda poređamo intervale u niz $(I_n)_n$, počev od najmanjeg k, i za fiksirano k ređamo intervale s leva na desno. Dakle, svako prirodnom broju n odgovara tačno jedan par brojeva k, i, tako da je $0 \leq i \leq k-1$ i $I_n = \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$. Neka je $f_n = \chi_{I_n}$.

Neka je $\epsilon > 0$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - 0| \geq \epsilon\}) = m\left(\left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)\right) = \frac{1}{k}.$$

Očigledno je $n \to \infty$ ako i samo ako $k \to \infty$. Prema tome, niz $(f_n)_n$ teži ka 0 po meri m na skupu $E = [0, 1)$.

Sa druge strane, ako je $x \in E$, tada za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji tačno jedan broj i, $0 \leq i \leq k-1$, tako da je $x \in \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$. To znači da postoji beskonačno brojeva $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $x \in I_n$, odnosno $f_n(x) = 1$. Prema tome, nije tačno da $(f_n)_n$ konvergira ka 0 m-ss na E.

Sledeća teorema na neki način opisuje obrnuto tvrđenje u odnosu na teoremu Lebega.

Teorema 5.2.3. (Ris[4]) *Neka je $(f_n)_n$ niz merljivih i μ-ss konačnih funkcija, koji po meri μ konvergira funkciji f na X, i neka je f merljiva i μ-ss konačna funkcija. Tada postoji podniz $(f_{n_k})_k$ koji μ-ss konvergira ka f na X.*

[4]Frigyes Riesz (1880-1956), mađarski matematičar

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ i $\alpha > 0$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$ sledi da postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \alpha$. Za svako $k \in \mathbb{N}$ neka je $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ i $\alpha_k = \frac{1}{2^k}$. Tada za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $n_k \in \mathbb{N}$, tako da je

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pri tome, jednostavno se može obezbediti $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Na taj način je definisan podniz $(f_{n_k})_k$ niza $(f_n)_n$. Neka je

$$R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{x \in E : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\},$$

za svako $m \in \mathbb{N}$. Očigledno, za svako $m \in \mathbb{N}$ važi $R_m \supset R_{m+1}$, kao i

$$\mu(R_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Neka je $R_\infty = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} R_m$. Prema osobini neprekidnosti mere, sledi da važi $\mu(R_\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0$. Pretpostavimo da $x \notin R_\infty$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $x \notin R_{n_0}$. Sledi da za svako $k \geq n_0$ važi $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$. Time je dokazano $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ za svako $x \in R_\infty^c$, kao i $\mu(R_\infty) = 0$. Dakle, podniz $(f_{n_k})_k$ konvergira ka f μ-ss na X. $\square$

Na kraju dokazujemo rezultat koji povezuje ravnomernu konvergenciju i konvergenciju μ-ss.

Teorema 5.2.4. (Jegorov[5]) *Neka je $E \in \mathcal{R}$ i $\mu(E) < \infty$. Neka je $(f_n)_n$ niz merljvih μ-ss konačnih funkcija, koji na skupu E μ-ss konvergira ka merljivoj μ-ss konačnoj funkciji f. Tada za svako $\epsilon > 0$ postoji skup $E_\epsilon \subset E$, tako da niz $(f_n)_n$ ravnomerno konvergira ka f na skupu E_ϵ, i $\mu(E \setminus E_\epsilon) < \epsilon$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Ispunjeni su uslovi Teoreme Lebega 5.2.2, odakle sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n(\epsilon)) = 0$, pri čemu je $R_n(\epsilon) = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k(\epsilon)$ i $E_k(\epsilon) = \{x \in E :$

[5]Dmitri Fyodorovich Egorov (1869-1931), ruski matematičar

$|f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$. Za svako $k \in \mathbb{N}$ neka je $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ i $\alpha_k = \frac{1}{2^k}$. Tada, kao u Teoremi Risa 5.2.3, postoji niz rastućih prirodnih brojeva $(n_k)_k$, sa svojstvom

$$\mu\left(R_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right)\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon$. Neka je $F_\epsilon = \bigcup\limits_{k=n_0}^{\infty} R_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right)$. Tada je $\mu(F_\epsilon) \leq \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \mu(R_{n_k}) \leq \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon$. Neka je $E_\epsilon = E \setminus F_\epsilon$. Ako je $x \in E_\epsilon$, tada $x \notin F_\epsilon$, odakle sledi da $x \notin R_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right)$ za svako $k \geq n_0$. Prema tome, za svako $k \geq n_0$ postoji $n \geq n_k$ sa svojstvom $x \notin E_n\left(\frac{1}{k}\right)$, odnosno $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$. Izbor broja n_0 ne zavisi od $x \in E_\epsilon$. Stoga je upravo dokazana ravnomerna konvergencija niza $(f_n)_n$ ka funkciji f na skupu E_ϵ. $\square$

Ako je $\mu(E) = +\infty$, onda teorema Jegorova ne mora biti tačna.

Primer 5.2.3. Neka je $X = \mathbb{N}$ i μ_d je mera prebrojavanja na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Neka je f_n karakteristična funkcija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za svako $x \in \mathbb{N}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Neka je $0 < \epsilon < 1$. Ako je $\mu_d(\mathbb{N} \setminus E_\epsilon) < \epsilon$, tada mora biti $E_\epsilon = \mathbb{N}$. Konvergencija $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ ne može biti ravnomerna po $x \in \mathbb{N}$, jer je $f_n(x) = 1$ tek za $n \geq x$, i ovakav broj n se ne može izabrati nezavisno od x.

Glava 6

Kompleksne mere

6.1 Apsolutna varijacija kompleksne mere

Do sada smo izučavali samo pozitivne mere. Ako je $f \in L_1(X, \mu)$ kompleksna funkcija, i $\varphi(E) = \int\limits_E f d\mu$ za svako $E \in \mathcal{R}$, tada je φ prebrojivo aditivna funkcija na $\mathcal{R}$. Ova činjenica sugeriše opštiju definiciju mere.

Definicija 6.1.1. Neka je $\mathcal{R}$ jedna σ-algebra na nepraznom skupu X. Funkcija $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ je *kompleksna mera* na $\mathcal{R}$, ako je $\lambda(\emptyset) = 0$ i ako je λ prebrojivo aditivna na $\mathcal{R}$. Drugim rečima, ako je $(A_n)_n$ proizvoljan niz uzajamno disjunktnih skupova iz $\mathcal{R}$, tada je

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n). \tag{6.1}$$

U prethodnoj definiciji, unija $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ne zavisi od rasporeda skupova A_n, tako da i suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ ne zavisi od redosleda sabiraka. Dakle, posmatrani red (6.1) mora biti apsolutno konvergentan u $\mathbb{C}$.

Jednostavno je proveriti da je svaka kompleksna mera neprekidna u odnosu na monotone familije skupova (dakle, u istom smislu kao i pozitivne mere). Međutim, ne može se govoriti o monotonosti ili subaditivnosti kompleksne mere.

Ako je $A \in \mathcal{R}$, i ako je $A_n \in \mathcal{R}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je niz skupova $(A_n)_n$ particija skupa A pod sledećim uslovima: $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, kao i

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Svakoj kompleksnoj meri λ pridružuje se njena *totalna varijacija* $|\lambda|$, na sledeći način:

$$|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| : (A_i)_i \text{ je particija skupa } A \right\}.$$

Važi $|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$ za svako $A \in \mathcal{R}$. Naime, ako je $(A_n)_n$ proizvoljna particija skupa A, onda je

$$|\lambda(A)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| \leq |\lambda|(A).$$

Očigledno, ako je $\lambda \geq 0$, onda je $|\lambda| = \lambda$.

Dokazujemo sledeće interesantno tvrđenje o minimalnom svojstvu totalne varijacije kompleksne mere.

Teorema 6.1.1. *Ako je λ kompleksna mera na $\mathcal{R}$, tada je $|\lambda|$ pozitivna mera na $\mathcal{R}$. Pri tome, ako je μ proizvoljna pozitivna mera na $\mathcal{R}$ sa svojstvom $|\lambda(A)| \leq \mu(A)$ za svako $A \in \mathcal{R}$, onda važi $|\lambda|(A) \leq \mu(A)$ za svako $A \in \mathcal{R}$.*

Dokaz. Očigleno je $|\lambda|(\emptyset) = 0$. Potrebno je dokazati prebrojivu aditivnost funkcije $|\lambda|$. Neka je $A_n \in \mathcal{R}$ disjunktna familija skupova, i neka je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $t_n \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $t_n < |\lambda|(A_n)$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji particija $(E_{nj})_j$ skupa A_n, tako da je ispunjeno

$$t_n < \sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_{nj})| \leq |\lambda|(A_n).$$

Familija $(E_{nj})_{n,j}$ je particija skupa A, odakle sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(E_{n,j})| \leq |\lambda|(A).$$

Uzimajući supremum po svim dopustivim nizovima $(t_n)_n$, sledi da važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n) \leq |\lambda| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Neka je sada $(F_j)_j$ proizvoljna particija skupa A. Tada je $(A_n \cap F_j)_{n,j}$ particija skupa A, $(A_n \cap F_j)_j$ je particija skupa A_n, i $(A_n \cap F_j)_n$ je particija skupa F_j. Stoga je

$$\begin{aligned}\sum_j |\lambda(F_j)| &= \sum_j \left|\sum_n \lambda(A_n \cap F_j)\right| \leq \sum_j \sum_n |\lambda(A_n \cap F_j)| \\ &= \sum_n \sum_j |\lambda(A_n \cap F_j)| \leq \sum_n |\lambda|(A_n).\end{aligned}$$

Uzimajući sada supremum po svim particijama $(F_j)_j$ skupa A, sledi da važi

$$|\lambda|(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n).$$

Upravo smo dokazali da je $|\lambda|$ pozitivna mera na $(X, \mathcal{R})$.

Neka je sada μ proizvoljna pozitivna mera na $\mathcal{R}$ sa svojstvom $|\lambda(E)| \leq \mu(E)$ za svako $E \in \mathcal{R}$. Neka je $(G_n)_n$ proizvoljna particija skupa E. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(G_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \mu(E).$$

Uzimajući supremum po svim particijama $(G_n)_n$ skupa E, sledi da je $|\lambda|(E) \leq \mu(E)$. □

Ako je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathcal{R}$, onda je, eventualno, moguće $\mu(A) = +\infty$ za neko $A \in \mathcal{R}$. Sa druge strane, ako je λ kompleksna mera na $\mathcal{R}$, uvek je $\lambda(A) \in \mathbb{C}$ za svako $A \in \mathcal{R}$. Specijalno, ako je λ kompleksna mera i $\lambda \geq 0$, onda je uvek λ konačna mera. Dakle, pozitivna mera u opštem slučaju nije specijalan slučaj kompleksne mere.

Ako je λ kompleksna mera koja uzima samo realne vrednosti, onda je λ *realna mera*, ili *mera sa znakom*.

Dokazujemo interesnantno tvrđenje o ograničenosti kompleksne mere. Pre glavnog tvrđenja, formulišemo pomoćni rezultat tehničke prirode.

Tvrđenje 6.1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Postoji podskup S skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je*

$$\left|\sum_{j \in S} z_j\right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Teorema 6.1.2. *Neka je λ kompleksna mera na $(X, \mathcal{R})$. Tada za svako $A \in \mathcal{R}$ važi*

$$|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A) \leq |\lambda|(X) < \infty.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati poslednju nejednakost. Pretpostavimo da je $|\lambda|(X) = +\infty$. Neka je $t = \pi(1 + |\lambda(X)|)$. Na osnovu $|\lambda|(X) > t$, sledi da postoji particija $(E_j)_j$ skupa X, tako da je $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\lambda(E_j)| > t$. Takođe sledi da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\sum\limits_{j=1}^{n} |\lambda(E_j)| > t$. Na osnovu prethodnog Tvrđenja 6.1.1, sledi da postoji $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je

$$\left| \sum_{j \in S} \lambda(E_j) \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |\lambda(E_j)| > \frac{t}{\pi} = 1 + |\lambda(X)|.$$

Neka je $A = \bigcup\limits_{j \in S} E_j$. Tada je

$$|\lambda(A)| = \left| \sum_{j \in S} \lambda(E_j) \right| \geq \frac{t}{\pi} > 1.$$

Neka je $B = X \setminus A$. Tada je

$$|\lambda(B)| = |\lambda(X) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(X)| > \frac{t}{\pi} - |\lambda(X)| = 1.$$

Dakle, uz pretpostavku $|\lambda|(X) = +\infty$, sledi da postoje merljivi i uzajamno disjunktni skupovi A, B, tako da je $X = A \cup B$, $|\lambda(A)| > 1$ i $|\lambda(B)| > 1$. Takođe je $|\lambda|(A) = +\infty$, ili $|\lambda|(B) = +\infty$. Neka je $A_1 = A$ i $B_1 = B$. Pretpostavimo da je $|\lambda|(B_1) = +\infty$. Tada postoje disjunktni merljivi skupovi A_2, B_2, sa svojstvima $|\lambda(A_2)| > 1$ i $|\lambda|(B_2) = +\infty$. Nastavimo ovaj postupak za svaki prirodan broj n. Tada je $(A_n)_n$ niz uzajamno disjunktnih merljvih skupova sa svojstvom $|\lambda(A_n)| > 1$. Kako je $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \subset X$, sledi da red

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

mora biti konvergentan, što nije moguće jer je opšti član po modulu uvek veći od 1.

Dakle, polazna pretpostavka $|\lambda|(X) = +\infty$ nije moguća. $\square$

Ako su λ_1, λ_2 kompleksne mere na $\mathcal{R}$, i ako su c_1, c_2 kompleksni brojevi, tada je jednostavno proveriti da je $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$ takođe kompleksna mera. Takođe, nije teško proveriti da je skup svih kompleksnih mera na $(X, \mathcal{R})$ kompleksan normiran prostor, pri čemu je $\|\lambda\| := |\lambda|(X)$.

Ako je λ kompleksna mera, onda na osnovu elementarnog razlaganja $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, sledi da su λ_R i λ_I realne mere.

Ako je λ realna mera, onda su

$$\lambda^+ = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda), \quad \lambda^- = \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$$

pozitivne mere. Lako je proveriti da su λ^+ i λ^- ograničene mere. λ^+ i λ^- su *pozitivna* i *negativna varijacija mere* λ. Tada važi

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-, \quad |\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-.$$

Prva formula se naziva *Žordanova*[1] *dekompozicija realne mere* λ. Žordanova dekompozicija realne mere je minimalna u smislu sledećeg tvrđenja.

Teorema 6.1.3. *Neka je λ realna mera na $\mathcal{R}$, i neka je $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, pri čemu su λ_1 i λ_2 pozitivne mere na $\mathcal{R}$. Tada je $\lambda_1 \geq \lambda^+$ i $\lambda_2 \geq \lambda^-$.*

Tvrđenje dokazujemo naknadno.

Na kraju, neka je f kompleksna merljiva funkcija na X, i neka je λ kompleksna mera na σ-algebri $\mathcal{R}$. Na osnovu

$$\lambda = (\lambda_R^+ - \lambda_R^-) + i(\lambda_I^+ - \lambda_I^-),$$

sledi da je, po definiciji:

$$\int_X f d\lambda := \int_X f d\lambda_R^+ - \int_X f d\lambda^- + i\left(\int_X f d\lambda_I^+ - \int_X f d\lambda_I^-\right),$$

pod uslovom da su svi integrali u prethodnoj formuli konačni. Na taj način se integrabilnost funkcije u odnosu na kompleksnu meru svodi na integrabilnost te funkcije u odnosu na četiri pozitivne ograničene mere. Lako je proveriti da važe osnovna svojstva integrala.

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), francuski matematičar

6.2 Apsolutna neprekidnost i uzajamna singularnost

Neka su $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu$ mere na σ-algebri $\mathcal{R}$ skupa X, pri čemu je $\mu \geq 0$.

Mera λ je *apsolutno neprekidna* u odnosu na meru μ, u oznaci $\lambda \ll \mu$, ako za svako $E \in \mathcal{R}$ važi implikacija

$$\mu(E) = 0 \implies \lambda(E) = 0.$$

Primer 6.2.1. Neka je μ pozitivna mera i $f \in L_1(X, \mu)$. Ako je

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{R},$$

tada je $\lambda \ll \mu$.

Dokazaćemo kasnije da je ovaj primer najvažniji u pogledu razmatranja apsolutne neprekidnosti jedne mere u odnosu na drugu.

Mera λ je *skoncentrisana na skupu* $A \in \mathcal{R}$, ako za svako $E \in \mathcal{R}$ važi $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$. Ekvivalentno, λ je skoncentrisana na skupu A, ako iz $E \in \mathcal{R}$ i $E \cap A = \emptyset$ sledi $\lambda(E) = 0$.

Mere λ_1 i λ_2 su *uzajamno singularne*, ako su skoncentrisane na međusobno disjunkntnim skupovima (u oznaci $\lambda_1 \perp \lambda_2$).

Jednostavno je dokazati sledeći rezultat.

Teorema 6.2.1. *Pretpostavimo da su $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu$ mere na σ-algebri $\mathcal{R}$, pri čemu je $\mu \geq 0$. Tada važi:*

(1) *Ako je λ skoncentrisana na skupu $A \in \mathcal{R}$, tada je $|\lambda|$ takođe skoncentrisana na A;*

(2) *Ako je $\lambda_1 \perp \lambda_2$, onda je $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$;*

(3) *Ako je $\lambda_1 \perp \lambda$ i $\lambda_2 \perp \lambda$, tada je $(\lambda_1 + \lambda_2) \perp \lambda$;*

(4) *Ako je $\lambda_1 \ll \mu$ i $\lambda_2 \ll \mu$, onda je $(\lambda_1 + \lambda_2) \ll \mu$;*

(5) *Ako je $\lambda \ll \mu$, onda je $|\lambda| \ll \mu$;*

(6) *Ako je $\lambda_1 \ll \mu$ i $\lambda_2 \perp \mu$, onda je $\lambda_1 \perp \lambda_2$;*

(7) *Ako je $\lambda \ll \mu$ i $\lambda \perp \mu$, onda je $\lambda = 0$.*

Dokazujemo važnu karakterizaciju apsolutne neprekidnosti mera, čime opravdavamo korišćenje pojma "neprekidnost".

Teorema 6.2.2. *Neka je λ kompleksna mera, a μ neka je pozitivna mera na $(X, \mathcal{R})$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalenta:*

(1) $\lambda \ll \mu$.

(2) *Za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svako $E \in \mathcal{R}$ važi implikacija:*

$$\mu(E) < \delta \implies |\lambda(E)| < \epsilon.$$

Dokaz. (2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo da važi tvrđenje (2), i neka je $E \in \mathcal{R}$ sa svojstvom $\mu(E) = 0$. Tada je za svako $\delta > 0$ ispunjeno $\mu(E) < \delta$, te onda prema (2) važi da je $|\lambda(E)| < \epsilon$ za svako $\epsilon > 0$. Dakle, mora biti $\lambda(E) = 0$, te je i $\lambda \ll \mu$.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Pretpostavimo da ne važi tvrđenje (2). Tada postoji $\epsilon > 0$, tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $E_n \in \mathcal{R}$ sa svojstvima: $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ i $|\lambda(E_n)| \geq \epsilon$. Za ovakve skupove E_n važi $|\lambda|(E_n) \geq \epsilon$. Neka je

$$F_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} E_j, \qquad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $F_n \supset F_{n+1}$. Takođe je, prema osobini subaditivnosti pozitivne mere μ, ispunjeno:

$$\mu(F_n) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \mu(E_j) < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Na osnovu neprekidnosti mere μ sledi da je

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0,$$

dok na osnovu neprekidnosti mere $|\lambda|$ sledi

$$|\lambda|(F) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(E_n) \geq \epsilon > 0.$$

Dakle, nije $|\lambda| \ll \mu$, i stoga ne može biti $\lambda \ll \mu$. Prema tome, tvrđenje (1) ne važi. $\square$

Prethodna teorema ne važi ako λ nije ograničena mera.

Primer 6.2.2. Neka je m Lebegova mera na Lebeg merljivim skupovima $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*([0, +\infty))$, i neka je λ funkcija definisana na $\mathcal{R}^*$ sa

$$\lambda(E) = \int_E x \cdot dm(x), \qquad E \in \mathcal{R}^*.$$

Funkcija λ je neograničena pozitivna mera na $\mathcal{R}$:

$$\lambda([0,+\infty)) = \lim_{n\to\infty} \lambda([0,n)) = \frac{n^2}{2} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Takođe je $\lambda \ll m$.

Sa druge strane, ako je $x_0 \geq 0$, $\epsilon > 0$ i $\delta > 0$, onda je

$$m\left(\left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}\right]\right) < \delta,$$

$$\lambda\left(\left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}\left(x_0\delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \geq \epsilon,$$

ako je x_0 dovoljno veliki broj. Dakle, ne važi tvrđenje (2) prethodne Teoreme 6.2.2.

Dokazujemo sličan rezultat za uzajamnu singularnost mera.

Teorema 6.2.3. *Neka su λ i μ pozitivne mere na $(X, \mathcal{R})$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) $\lambda \perp \mu$.

(2) *Za svako $\epsilon > 0$ postoje $A, B \in \mathcal{R}$, tako da je $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, $\lambda(A) < \epsilon$ i $\mu(B) < \epsilon$.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Ova implikacija je jednostavna.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo da važi tvrđenje (2), i neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada postoje skupovi $E_n \in \mathcal{R}$, tako da je $\lambda(E_n) < \frac{1}{2^n}$ i $\mu(E_n^c) < \frac{1}{2^n}$. Neka je

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Tada je $A_n \supset A_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Takođe je

$$\lambda(A_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(E_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Prema osobini neprekidnosti mere λ, sledi da je $\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$. Na osnovu

$$A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c, \quad A_n^c \subset A_{n+1}^c, \quad A_n^c = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c \subset E_n^c,$$

i na osnovu osobine neprekidnosti mere μ, sledi da je

$$\mu(A^c) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n^c) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^c) = 0.$$

Dakle, λ je skoncentrisana na skupu A^c, dok je μ skoncentrisana na skupu A, te je $\lambda \perp \mu$. $\square$

6.3 Teoreme Radona-Nikodime i Lebega

Teorema Radon[2]-Nikodime[3] zauzima centralno mesto u teoriji mere. Ova teorema implicira da je Primer 6.2.1 u stvari jedini važan primer apsolutne neprekidnosti mera.

Teorema 6.3.1. *Neka je μ pozitivna i σ-konačna mera na $(X, \mathcal{R})$. Tada postoji funkcija $w \in L_1(X, \mu)$, tako da je $0 < w(x) < 1$ za svako $x \in X$.*

Dokaz. Mera μ je pozitivna i σ-konačna, te sledi da postoji niz merljivih skupova $(A_n)_n$, tako da je $\mu(A_n) < \infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$, kao i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Neka je

$$w_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in X \setminus A_n, \\ \frac{1}{2^n(1+\mu(A_n))}, & x \in A_n \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $w(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n(x)$, $x \in X$. Tada je w tražena funkcija. $\square$

Ideja prethodne teoreme je da mera μ i mera $E \mapsto \int\limits_E w d\mu$ imaju iste skupove mere nula.

Sada dokazujemo teoreme Radon-Nikodime i Lebega. Iako se ovi rezultati u literaturi sreću kao dve odvojene teoreme, koristimo dokaz fon Nojmana[4], koji objedinjuje oba rezultata.

Teorema 6.3.2. *Neka je λ kompleksna mera na $(X, \mathcal{R})$, i neka je μ pozitivna σ-konačna mera na $(X, \mathcal{R})$.*

[2]Johann Karl August Radon (1887-1956), austrijski matematičar

[3]Otto Marcin Nikodým (1887-1974), poljski matematičar

[4]John von Neumann (Margittai Neumann Janos - Johan Lajos) (1903-1957), mađarsko-američki matematičar

(1) *Postoje jedinstvene mere* λ_a *i* λ_s *na* $\mathcal{R}$*, tako da je*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

(2) *Postoji jedinstven elemenat* $f \in L_1(X, \mu)$*, tako da za svako* $E \in \mathcal{R}$ *važi*

$$\lambda(E) = \int\limits_E f d\mu.$$

Napomena 6.3.1. Uređeni par mera (λ_a, λ_s) iz dela (1) naziva se *Lebegova dekompozicija mere* λ *u odnosu na meru* μ. Jedinstvenost mera λ_a i λ_s se jednostavno dokazuje, tako da je u ovom slučaju akcenat na egzistenciji pomenute dekompozicije.

Tvrđenje (2) predstavlja *Teoremu Radona-Nikodime*. Napomenimo da je u ovom slučaju f jedinstveni elemenat prostora $L_1(X, \mu)$, ali ako se f posmatra kao funkcija, onda je f definisana μ-skoro svuda na X.

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva para mera (λ_a, λ_s) i (λ'_a, λ'_s), koji zadovoljavaju tvrđenje (1). Tada je

$$\lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s.$$

Iz $\lambda_a - \lambda'_a \ll \mu$ i $\lambda'_s - \lambda_s \perp \mu$, sledi da je $\lambda_a = \lambda'_a$ i $\lambda_s = \lambda'_s$.

Pretpostavimo da je λ pozitivna i ograničena mera na $\mathcal{R}$. Neka je $w \in L_1(X, \mu)$ funkcija sa svojstvom $0 < w(x) < 1$ za svako $x \in X$. Posmatrajmo meru φ na $\mathcal{R}$, definisanu kao

$$\varphi(E) = \lambda(E) + \int\limits_E w d\mu.$$

Tada je $\varphi \geq 0$ i $\varphi(X) = \lambda(X) + \int\limits_X w d\mu < \infty$. Dakle, φ je pozitivna i ograničena mera na X. Ako je $s = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ prosta nenegativna merljiva

funkcija ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$), onda je

$$\begin{aligned}\int_X s d\varphi &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\lambda(A_j) + \int_{A_j} w d\mu \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda(A_j) + \int_X \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} \right) w d\mu \\ &= \int_X s d\lambda + \int_X s w d\mu.\end{aligned}$$

Neka je f proizvoljna pozitivna merljiva funkcija na X. Tada postoji rastući niz $(s_n)_n$ prostih pozitivnih merljivih funkcija na X, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$. Uzimajući u obzir da važi dokazana formula

$$\int_X s_n d\varphi = \int_X s_n d\lambda + \int_X s_n w d\mu, \qquad n \in \mathbb{N},$$

primenimo Teoremu o monotonoj konvergenciji. Sledi da važi

$$\int_X f d\varphi = \int_X f d\lambda + \int_X f w d\mu.$$

Neka je sada $f \in L_2(X, \varphi)$ proizvoljna funkcija. Funkciji f pridružimo $F(f) = \int_X f d\lambda$. Primećujemo da na osnovu $\lambda \leq \varphi$, kao i na osnovu nejednakosti Heldera važi:

$$|F(f)| = \left| \int_X f d\lambda \right| \leq \int_X |f| d\lambda \leq \int_X |f| d\varphi \leq \left(\int_X |f|^2 d\varphi \right)^{1/2} (\varphi(X))^{1/2}.$$

Uzimajući u obzir $\varphi(X) < \infty$, sledi da je F ograničen linearan funkcional na Hilbertovom prostoru $L_2(X, \varphi)$. Prema Risovoj teoremi o reprezentaciji linearnih funkcionala, sledi da postoji jedinstveni elemenat g Hilbertovog prostora $L_2(X, \varphi)$, tako da je

$$F(f) = \int_X f d\lambda = \int_X f g d\varphi, \quad f \in L_2(X, \varphi). \tag{6.2}$$

Elemenat g je jedinstven u $L_2(X,\varphi)$, ali je funkcija g definisana φ-skoro svuda. Dakle, zaključak se ne menja ako se promeni vrednost funkcije g na nekom skupu φ-mere nula.

Neka je $E \in \mathcal{R}$ sa svojstvom $\varphi(E) > 0$. Na osnovu ograničenosti mere φ sledi da je $\chi_E \in L_2(X,\varphi)$. Stoga možemo razmatrati $F(\chi_E)$. Važi

$$0 \leq \lambda(E) = \int\limits_X \chi_E d\lambda = F(\chi_E) = \int\limits_E g d\varphi,$$

te je $g \geq 0$ φ-ss. Na osnovu $0 \leq \lambda \leq \varphi$, sledi da je

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int\limits_E g d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1.$$

Na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti integrala, sledi da je $g(x) \in [0,1]$ za φ-skoro svako $x \in X$. Prema ranije navedenom, možemo smatrati da je $0 \leq g(x) \leq 1$ za svako $x \in X$.

Na osnovu (6.2), proizilazi da važi formula

$$\int\limits_X (1-g) f d\lambda = \int\limits_X f g w d\mu \tag{6.3}$$

za svako $f \in L_2(X,\varphi)$.

Uočimo skupove

$$A = \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\}, \qquad B = \{x \in X : g(x) = 1\}.$$

Očigledno je $A \cup B = X$ i $A \cap B = \emptyset$.

Definišemo mere λ_a i λ_s na sledeći način:

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E), \qquad \lambda_s(E) = \lambda(B \cap E).$$

Na osnovu ograničenosti mere φ sledi da je $\chi_B \in L_2(X,\varphi)$, odakle sledi da se u formuli (6.3) može uzeti $f = \chi_B$. Tada važi

$$0 = \int\limits_B (1-g) d\lambda = \int\limits_X \chi_B g w d\mu = \int\limits_B w d\mu.$$

Kako je $w > 0$, sledi da je $\mu(B) = 0$. Prema tome, $\lambda_s \perp \mu$.

Funkcija g je ograničena, te sledi $f = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_E \in L_2(X, \varphi)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $E \in \mathcal{R}$. Dakle, ovako uzeta funkcija f može biti razmatrana u (6.3), i sledi:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{A\cap E} (1 - g^{n+1})d\lambda + \int\limits_{B\cap E} (1 - g^{n+1})d\lambda \\ = &\int\limits_{E} (1 - g^{n+1})d\lambda = \int\limits_{E} g(1 + g + g^2 + \cdots + g^n)wd\mu. \end{aligned}$$

Sada je $\int\limits_{B\cap E} (1 - g^{n+1})d\lambda = 0$. Zbog $0 \leq g < 1$ na skupu A, sledi da niz $\Big((1 - g^{n+1})\Big)_n$ monotono raste ka 1 na skupu $E \cap A$. Dakle, na osnovu Teoreme o monotonoj konvergenciji, sledi

$$\int\limits_{A\cap E} (1 - g^{n+1})d\lambda \to \lambda_a(E), \qquad n \to \infty.$$

Niz $g(1 + g + g^2 + \cdots + g^n)w$ je takođe monotono rastući i konvergentan ka nenegativnoj merljivoj (eventualno proširenoj realnoj) funkciji h . Sledi da za svako $E \in \mathcal{R}$ važi

$$\lambda_a(E) = \int\limits_{E} hd\mu.$$

Ako je $E = X$, onda je

$$\int\limits_{X} hd\mu = \lambda_a(X) = \lambda(A \cap X) < \infty,$$

odakle sledi da je $h \in L_1(X, \mu)$. Na kraju, očigledno je $\lambda_a \ll \mu$, i teorema je dokazana u slučaju da je λ pozitivna i konačna mera.

Opšti slučaj komleksne mere λ sledi jednostavno na osnovu dekompozicije $\lambda = \lambda_R^+ - \lambda_R^- + i(\lambda_I^+ - \lambda_I^-)$, i primenom prethodnog rezultata na svaku od četiri pozitivne i ograničene mere. □

Dokazujemo teoremu u slučaju kada su obe mere pozitivne i σ-konačne.

Teorema 6.3.3. *Neka su λ i μ pozitivne i σ-konačne mere na σ-algebri $\mathcal{R}$ skupa X.*

(1) *Postoje pozitivne mere* λ_a *i* λ_s *na* $\mathcal{R}$*, tako da važi*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

(2) *Postoji nenegativna proširena merljiva funkcija* h*, tako da je*

$$\lambda_a(E) = \int\limits_E h d\mu, \qquad E \in \mathcal{R}.$$

Dokaz. Postoje skupovi $X_n \in \mathcal{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) tako da je $X = \bigcup\limits_n X_n$ i $\lambda(X_n) < \infty$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Bez gubljena opštosti može se pretpostaviti da su skupovi X_n uzajamno disjunktni. Prema prethodnoj Teoremi 6.3.2, sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje mere λ_a^n i λ_s^n, sa svojstvom

$$\lambda|_{X_n} = \lambda_a^n + \lambda_s^n, \quad \lambda_a^n \ll \mu|_{X_n}, \quad \lambda_s^n \perp \mu|_{X_n},$$

a takođe postoje funkcije $h_n \in L_1(X_n, \mu|_{X_n})$ tako da je

$$\lambda_a^n(E) = \int\limits_E h_n d\mu|_{X_n}.$$

Lako je proveriti da se može uzeti:

$$\lambda_a(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_a^n(E \cap X_n), \quad E \in \mathcal{R},$$

$$\lambda_s(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_s^n(E \cap X_n), \quad E \in \mathcal{R},$$

$$h(x) = h_n(x) \text{ za } x \in X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Definicija 6.3.1. Ako je $\lambda \ll \mu$ i $d\lambda = f d\mu$, tada je funkcija f *Radon-Nikodimov izvod mere* λ *u odnosu na meru* μ, u oznaci $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$.

Svi uslovi u Teoremi Radona-Nikodime su važni, a to pokazuje sledeći primer.

Primer 6.3.1. Neka je $X = [0,1]$, $\mathcal{R}^*$ je familija Lebeg merljivih skupova na $[0,1]$, m je Lebegova mera na $\mathcal{R}^*$, μ_d je mera prebrojavanja na $\mathcal{R}^*$. Mera m je σ-konačna, ali mera μ_d nije σ-konačna. Ako je $\mu_d(E) = 0$, onda je $E = \emptyset$, te je i $m(E) = 0$. Dakle, $m \ll \mu_d$. Pretpostavimo da postoji $h \in L_1(X, \mu_d)$, tako da za svako $E \in \mathcal{R}^*$ važi $m(E) = \int\limits_E h d\mu_d$. Očigledno je da h ne može biti jednako nula-funkciji. Neka je $x_0 \in [0,1]$ tako da je $h(x_0) \neq 0$, i neka je $E = \{x_0\}$. Tada je $0 = m(E) = \int\limits_E h d\mu_d = h(x_0) \neq 0$. Sledi da ne važi Teorema Radona-Nikodime, iako je $m \ll \mu_2$.

6.4 Dekompozicija mere i prostora

Teorema Radon-Nikodime ima važne posledice. Sledeća teorema je poznata kao *polarna dekompozicija* kompleksne mere.

Teorema 6.4.1. *Neka je neka je λ kompleksna mera na $(X, \mathcal{R})$. Tada postoji merljiva funkcija h, tako da je $|h| = 1$ i $d\lambda = hd|\lambda|$.*

Dokaz. Na osnovu $\lambda \ll |\lambda|$ i Teoreme Radona-Nikodime, sledi da postoji funkcija $h \in L_1(X, |\lambda|)$ tako da je $d\lambda = hd|\lambda|$.

Posmatrajmo skup $A_t = \{x \in X : |h(x)| < t\}$ za $t > 0$. Neka je $(E_n)_n$ proizvoljna particija skupa A_t. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int\limits_{E_n} f d|\lambda| \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} t|\lambda|(E_n) = t|\lambda|(A_t).$$

Ako je $t \in (0,1)$, onda očigledno mora biti $|\lambda|(A_t) = 0$. Sledi da je $|h| \geq 1$ $|\lambda|$-ss.

Pretpostavimo da je $|\lambda|(E) > 0$. Tada je

$$\left| \frac{1}{|\lambda|(E)} \int\limits_E h d|\lambda| \right| = \frac{|\lambda(E)|}{|\lambda|(E)} \leq 1.$$

Prema teoremi o srednjoj vrednosti sledi da je $|h(x)| \leq 1$ $|\lambda|$-ss.

Dakle, $|h| = 1$ $|\lambda|$-ss. Bez gubljenja opštosti može se funkcija h predefinisati na skupu $|\lambda|$-mere jednake nuli, tako da je $|h| = 1$ na X. $\square$

Teorema 6.4.2. *Neka je μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{R})$, $g \in L_1(X, \mu)$ i $d\lambda = gd\mu$. Tada je $d|\lambda| = |g|d\mu$.*

Dokaz. Postoji funkcija h, tako da je $|h| = 1$ i $d\lambda = hd|\lambda|$. Dakle, $hd|\lambda| = gd\mu$, te je i $d|\lambda| = \overline{h}gd\mu$. Na osnovu $\mu \geq 0$ i $|\lambda| \geq 0$ sledi $\overline{h}g \geq 0$ μ-ss, te je $\overline{h}g = |g|$ μ-ss. □

Poslednja teorema ove lekcije je Hanovo[5] razlaganje prostora indukovano realnom merom.

Teorema 6.4.3. (Han) *Neka je λ realna mera na $(X, \mathcal{R})$. Tada postoje skupovi $A, B \in \mathcal{R}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, tako da za svako $E \in \mathcal{R}$ pozitivna varijacija λ^+ i negativna varijacija λ^- mere λ zadovoljavaju uslove:*

$$\lambda^+(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda^-(E) = -\lambda(B \cap E).$$

Dokaz. Postoji h tako da je $|h| = 1$ i $d\lambda = |h|d|\lambda$. Mera λ je realna, te je $|h|$ $|\lambda|$-ss realna. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostavti da je h realna funkcija. Tada je $h(x) = \pm 1$ za svako $x \in X$. Neka je

$$A = \{x \in X : h(x) = 1\}, \quad B = \{x \in X : h(x) = -1\}.$$

. Važi $\lambda^+ = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda)$, i takođe

$$\frac{1}{2}(1 + h) = \begin{cases} h, & \text{na } A, \\ 0, & \text{na } B. \end{cases}$$

Stoga je za svako $E \in \mathcal{R}$ ispunjeno

$$\lambda^+(E) = \frac{1}{2}\int_E (1 + h)d|\lambda| = \int_{A \cap E} hd|\lambda| = \lambda(A \cap E).$$

Na osnovu $\lambda(E) = \lambda(A \cap E) + \lambda(B \cap E)$ i $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, sledi da je $\lambda^-(E) = -\lambda(B \cap E)$. □

Kao posledicu, navodimo ranije najavljeno minimalno svojstvo pozitivne i negativne varijacije realne mere.

Posledica 6.4.1. *Neka je λ realna mera i $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, pri čemu su λ_1, λ_2 pozitivne mere. Tada je $\lambda^+ \leq \lambda_1$ i $\lambda^- \leq \lambda_2$.*

Dokaz. Kako je $\lambda \leq \lambda_1$, sledi da za svako $E \in \mathcal{R}$ važi

$$\lambda^+(E) = \lambda(A \cap E) \leq \lambda_1(A \cap E) \leq \lambda_1(E).$$

Analogno se dokazuje i drugi deo teoreme. □

[5] Hans Hahn (1879-1934), austrijski matematičar

Glava 7

Izvod

7.1 Vitalijev pokrivač

Jedan od najvažnijih rezultata u matematici (ako uopšte ima smisla postaviti pitanje "Koji rezultat u matematici je najvažniji?"), jeste teorema Njutn-Lajbnica, odnosno rezultat koji tvrdi da su izvod i integral uzajamno inverzne transformacija na skupovima dopustivih funkcija. Ovoj teoremi se može pristupiti na više načina. Jedan od njih je korišćenje Vitalijevog[1] pokrivača.

Definicija 7.1.1. Neka je $E \subset \mathbb{R}$, i neka je $\mathcal{A}$ familija nekih zatvorenih segmenata u $\mathbb{R}$. Familija $\mathcal{A}$ je *Vitalijev pokrivač* skupa E, ako važe sledeća svojstva:

(1) $E \subset \bigcup\limits_{J \in A} J$;

(2) Za svako $x \in E$ i svako $\epsilon > 0$ postoji $J \in \mathcal{A}$ tako da je $x \in J$ i $m(J) < \epsilon$.

U vezi sa Vitalijevim pokrivažem, dokazujemo sledeći rezultat, koji praktično svaki Vitalijev pokrivač svodi suštinski na prebrojiv pokrivač. Podsetimo da je sa m^* označena spoljna Lebegova mera na $\mathcal{P}(\mathcal{R})$.

Teorema 7.1.1. (Vitali) *Neka je $E \subset \mathbb{R}$ i neka je $\mathcal{A}$ Vitalijev pokrivač skupa E. Tada postoji najviše prebrojivo mnogo uzajamno disjunktnih segmenata $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ iz $\mathcal{A}$, tako da je*

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_k J_k\right) = 0.$$

[1] Giuseppe Vitali (1875-1932), italijanski matematičar

Dokaz. Skup E ne mora biti Lebeg merljiv. Međutim, uvek postoji spoljna Lebegova mera skupa E, koja može biti konačna ili beskonačna.

Pretpostavimo prvo da je $m^*(E) < \infty$. Postoji otvoren skup U tako da je $E \subset U$ i $m(U) < \infty$. Neka je $\mathcal{A}_0 = \{J \in \mathcal{A} : J \subset U\}$. Jednostavno je utvrditi da je $\mathcal{A}_0$ takođe Vitalijev pokrivač skupa $\mathcal{A}$, sa očiglednom osobinom $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$.

Neka je $J_1 \in \mathcal{A}_0$ proizvoljan segment. Ako je $A \subset J_1$, ili je $m^*(E \setminus J_1) = 0$, onda je dokaz završen: traženi niz $(J_k)_k$ se svodi na jedan element J_1. Stoga pretpostavimo da je $m^*(E \setminus J_1) > 0$. Skup J_1 je zatvoren, te je $U_1 = U \setminus J_1$ otvoren. Kako je $E \setminus J_1 \subset U_1$, sledi da je $U_1 \neq \emptyset$. Proizilazi da je

$$0 < c_1 = \sup_{J \in \mathcal{A}_0, J \subset U_1} m(J) < +\infty.$$

Sledi da postoji $J_2 \in \mathcal{A}_0$ tako da je

$$0 < \frac{1}{2} c_1 < m(J_2) \leq c_1, \quad J_1 \cap J_2 = \emptyset.$$

Ako je $E \subset J_1 \cup J_2$, ili je $m^*(E \setminus (J_1 \cup J_2)) = 0$, dokaz je završen: traženi niz $(J_k)_k$ se svodi na skup $\{J_1, J_2\}$. Stoga pretpostavimo da je $m^*(E \setminus (J_1 \cup J_2)) > 0$. Skup $U_2 = U \setminus (J_1 \cup J_2)$ je otvoren i neprazan. Postoji $J_3 \in \mathcal{A}_0$ tako da je

$$0 < \frac{1}{2} c_2 < m(J_3) \leq c_2 = \sup_{J \in \mathcal{A}_0, J \subset U_2} m(J) < +\infty.$$

Opisani postupak možemo nastaviti sve dok je $m^*(E \setminus (J_1 \cup \cdots \cup J_n)) > 0$. Ako bi prethodna spolja Lebegova mera bila jednaka nuli, dokaz bi bio završen: traženi najviše prebrojiv niz $(J_k)_k$ se svodi na konačan skup $\{J_1, \ldots, J_n\}$. Ako se postupak nikada ne prekida u konačnom broju koraka, onda dolazimo do beskonačnog niza $(J_k)_k$ sa sledećim svojstvima: $J_k \cap J_n = \emptyset$ za $k \neq n$, kao i

$$0 < \frac{1}{2} c_k < m(J_{k+1}) \leq c_k = \sup_{J \in \mathcal{A}_0, J \subset U_k} m(J) < +\infty,$$

gde je $U_k = U \setminus (J_1 \cup \cdots \cup J_k)$.

Dokaz je završen ako pokažemo $m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \right) \right) = 0$.

Primetimo da važi

$$E \setminus \left(\bigcup_k J_k \right) \subset E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k \right) \subset U \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k \right) = U_n,$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$. Za svako $x \in E \setminus (\bigcup_k J_k) \subset G_{n_0}$ postoji $J(x) \in \mathcal{A}_0$ tako da je $x \in J(x) \subset U_{n_0}$.

Tvrdimo da nije moguće $J(x) \subset U_k$ za svako $k \geq n_0$. Ako bi ipak bilo $J(x) \subset U_k$ za svako $k \geq n_0$, onda bi sledilo $m(J(x)) \leq c_k < 2m(J_{k+1})$ za svako $k \geq n_0$. Međutim, na osnovu $\bigcup\limits_k J_k \subset U$ i $m\left(\bigcup_k J_k\right) = \sum\limits_k m(J_k) \leq m(U) < +\infty$. Sledi da je red $\sum\limits_k m(J_k)$ konvergentan i $\lim\limits_{k\to\infty} m(J_k) = 0$. Poizilazilo bi $m(J(x)) = 0$, što nije moguće.

Na osnovu prethodnog obrazloženja, sledi da postoji $p(x) \in \mathbb{N}$ i $p(x) > n_0$ tako da je $J(X) \subset U_{n_0}, U_{n_0+1}, \ldots, U_{p(x)-1}$, ali nije $J(x) \subset U_{p(x)}$.

Kako je $J(x) \subset U_{p(x)-1} = U \setminus (J_1 \cup \cdots \cup J_{p(x)-1})$, sledi $J(x) \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{p(x)-1} J_k\right) = \emptyset$. Na osnovu $J(x) \nsubseteq U_{p(x)}$ sledi $J(x) \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{p(x)} J_k\right) \neq \emptyset$. Dakle, $J(x) \cap J_{p(x)} \neq \emptyset$ i $m(J(x)) \leq c_{p(x)-1} < 2m(J_{p(x)})$.

Neka je $d = m(J(x))$ i $d_p = m(J_{p(x)})$, neka je a centar intervala $J_{p(x)}$ i $y \in J(x)$ je proizvoljna tačka. Tada je $|y - a| \leq d + \frac{1}{2}d_p \leq \frac{5}{2}d_p$. Sledi da se $J(x)$ nalazi unutar intervala $D_{p(x)}$ čiji je centar a, dok je dužina ovog intervala jednaka $5d_p$.

Sada za svaki interval J_k konstruišemo interval D_k sa istim centrom i 5 puta većom dužinom. Za svako $n_0 \in \mathbb{N}$ ispunjeno je $x \in E \setminus \left(\bigcup\limits_k J_k\right) \subset U_{n_0}$. Kako je $p(x) > n_0$, onda je $x \in J(x) \subset D_{p(x)}$. Stoga je

$$E \subset \left(\bigcup_l J_k\right) \subset \bigcup_{k=n_0}^{\infty} D_k$$

za svako $n_0 \in \mathbb{N}$. Sledi

$$m^*\left(E \setminus \left(\bigcup_l J_k\right)\right) \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} m^*(D_k) = 5\sum_{k=n_0}^{\infty} m(J_k) \to 0, \quad n_0 \to \infty.$$

Proizilazi da je $m^*\left(E \setminus \left(\bigcup\limits_k J_k\right)\right) = 0$.

U clju kompletiranja dokaza, pretpostavimo sada da je $m^*(E) = +\infty$. Neka je $E_k = E \cap (k, k+1)$ za $k \in \mathbb{Z}$. Tada je $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} E_k$, pri čemu je

za svako $k \in \mathbb{Z}$ ispunjeno $m^*(E_k) < +\infty$. Neka je $(J_{kn})_n$ Vitalijev pokrivač skupa J_k, za svako $k \in \mathbb{Z}$. Tada je $(J_{kn})_{k,n}$ Vitalijev pokrivač skupa E. Time je dokaz završen. □

Posledica 7.1.1. *Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi prethodne teoreme, i neka je $m^*(E) < \infty$. Za svako $\epsilon > 0$ postoji konačno mnogo uzajamno disjunktnih zatvorenih segmenata $J_1, \ldots, J_n$ Vitalijevog pokrivača $\mathcal{A}$ skupa E, tako da je*

$$m * \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k \right) \right) < \epsilon.$$

Dokaz. Prema Teoremi Vitalija, postoji niz zatvorenih i uzajamno disjunktnih segmenata $(J_k)_k$, tako da je $m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_k J_k \right) \right) = 0$. Sledi da je red $\sum_k m(J_k)$ konvergenta, te postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\sum_{k=n+1}^{\infty} m(J_k) < \epsilon$. Važi

$$E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k \right) \subset E = \left(E \cap \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} J_k \right) \right) \cup \left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \right)^c \right),$$

te je

$$m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k \right) \right) \leq m^* \left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \right) \right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} m(J_k) < \epsilon.$$

Time je posledica dokazana. □

7.2 Monotone funkcije

Osnovni cilj ove lekcije jeste dokaz da monotona funkcija ima izvod m-skoro svuda. Osim toga, važi "jedan smer nejednakosti" u Njutn-Lajbnicovoj formuli.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija i neka je $x \in (a, b)$. Izvod funkcije f u tački x je, ukoliko postoji, sledeća granična vrednost:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Izvod funkcije u nekoj tački ne mora postojati. Zato ima smisla nametnuti slabije zahteve, kao što su levi ili desni izvod u tački, kao i gornji i donji (levi ili desni) izvod funkcije u tački.

Definicija 7.2.1. (Dinijevi[2] izvodi) Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i neka je $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, kao i

$$\varphi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Dinijevi izvodi funkcije f u tački x jesu sledeće vrednosti u skupu $\mathbb{R}^*$:

(1) $D_-f(x) = \liminf\limits_{y \to x-} \varphi(x, y)$ (donji levi izvod);

(2 $D^-f(x) = \limsup\limits_{y \to x-} \varphi(x, y)$ (gornji levi izvod);

(3) $D_+f(x) = \liminf\limits_{y \to x+} \varphi(x, y)$ (donji desni izvod);

(4) $D^+f(x) = \limsup\limits_{y \to x+} \varphi(x, y)$ (gornji desni izvod).

Proizilazi da je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački $x \in [a, b]$, ako i samo ako su sva četiri Dinijeva izvoda konačna i jednaka.

Dokazujemo sledeću teoremu Lebega o izvodu monotone funkcije.

Teorema 7.2.1. (Lebeg) *Neka je $[a, b]$ ograničen i zatvoren segment, i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neopadajuća funkcija. Tada funkcija f ima konačan izvod u m-skoro svim tačkama segmenta $[a, b]$;*

Dokaz. Dokazaćemo da je Lebegova mera sup tačaka E, u kojima se razlikuju dva Dinijeva izvoda, jednaka nuli (odnosno $m(E) = 0$). Primetimo da je za svako $x \in (a, b)$, zbog monotonosti funkcije f, kao i zbog osobina donje i gornje granične vrednosti, ispunjeno:

$$D_-f(x) \leq D^-f(x) \leq D_+f(x) \leq D^+f(x).$$

Neka je, na primer,

$$E = \{x \in (a, b) : D_+f(x) < D^+f(x)\}.$$

Kako je sa m^* označena spoljna Lebegova mera na $\mathbb{R}$, dokazaćemo da je $m^*(E) = 0$. Posmatrajmo niz skupova

$$E_{uv} = \{x \in (a, b) : D_+f(x) < u < v < D^+f(x)\}, \quad u, v \in \mathbb{Q}.$$

[2]Ulisse Dini (1845-1918), italijanski matematičar

Tada je

$$E = \bigcup_{u,v\in\mathbb{Q}} E_{uv}.$$

Očigledno, za svako $u, v \in \mathbb{Q}$ važi $m^*(E_{uv}) < +\infty$. Takođe, za svako $\epsilon > 0$ postoji otvoren skup U konačne mere, tako da je $E_{uv} \subset U$ i $m(U) < m^*(E_u v) + \epsilon$.

Konstruisaćemo Vitalijev pokrivač za svaki skup E_{uv}.

Kako je

$$D_+ f(x) = \sup_{t>0} \left(\inf_{h\in(0,t)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) < v,$$

proizilazi da je

$$\inf_{h\in(0,t)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < v$$

za svako $t > 0$. Dakle, za svako $t > 0$ postoji $h \in (0, t)$ tako da je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < v.$$

Obzirom da je $t > 0$ proizvoljno, sledi da h može uzeti proizvoljno mali pozitivan broj. Svakoj tački $x \in E_{uv}$ odgovara familija zatvorenih intervala $[x, x+h]$, $h > 0$, tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) $[x, x+h] \subset U \cap [a, b]$;

(ii) $f(x+h) - f(x) - f(x) < vh$;

(iii) $h > 0$ može biti proizvoljno mali broj.

Sledi da upravo opisana familija $\mathcal{A} = ([x, x+h])_{x,h}$ formira Vitalijev pokrivač skupa E_{uv}. Na osnovu Teoreme Vitalija, sledi da za svako $\epsilon > 0$ postoji konačno mnogo uzajamno disjunktnih intervala $I_1, \ldots, I_{k_0} \in \mathcal{A}$ ($I_k = [x_k, x_k + h_k]$), tako da je

$$m^* \left(E_{uv} \setminus \bigcup_{k=1}^{k_0} I_k \right).$$

Na osnovu $f(x_k + h_k) - f(x_k) < vh_k$ za svako $k = 1, \ldots, k_0$, sledi

$$\sum_{k=1}^{k_0} (f(x_k + h_k) - f(x_k)) < v \sum_{k=1}^{k_0} h_k \leq v \cdot m(U),$$

kao i

$$\sum_{k=1}^{k_0}(f(x_k+h_k)-f(x_k)) < v\cdot(m^*(E_{uv}+\epsilon).$$

Uvedimo oznaku $I_k^\circ = (x_k, x_k+h_k)$ za svako $k=1,\dots,k_0$, $V = \bigcup_{k=1}^{k_0} I_k^\circ$, kao i $A_{uv} = E_{uv}\cap V$. Tada za svako $y\in A_{uv}$ važi

$$u < D^+f(y) = \inf_{t>0}\left(\sup_{s\in(0,t)}\frac{f(y+s)-f(y)}{s}\right).$$

Na već opisani način konstruišemo Vitalijev pokrivač $\mathcal{A}_1$ skupa A_{uv}, koji ima sledeća svojstva:

(i) Za svako $y\in A_{uv}$ postoji segment $[y, y+s]$, $s>0$, tako da je $[y,y+s]\subset V\cap(a,b)$;

(ii) $us < f(y+l)-f(y)$;

(iii) s je proizvoljno mali pozitivan broj.

Prema posledici Teoreme Vitalija, sledi da postoji konačno mnogo uzajamno disjunktnih elemenata $J_k = [y_k, y_k+s_k]\in\mathcal{A}_1$, $k=1,\dots,k_1$, tako da je

$$m^*\left(A_{uv}\setminus\bigcup_{k=1}^{k_1}J_k\right) < \epsilon.$$

Takođe je

$$u\sum_{k=1}^{k_1}s_k < \sum_{k=1}^{k_1}(f(y_k+s_k)-f(y_k)).$$

Segmenti J_k su sadržani u segmentima I_l, segmenti J_k su uzajamno disjuntni, segmenti I_l su uzajamno disjunktni, funkcija f je neopadajuća. Stoga je

$$\sum_{k=1}^{k_1}(f(y_k+s_k)-f(y_k)) \le \sum_{k=1}^{k_0}(f(x_k+h_k)-f(x_k)).$$

Na osnovu činjenice

$$E_{uv} = \left(E_{uv}\cap\left(\bigcup_{k=1}^{k_0}I_k\right)^c\right)\cup\left(E_{uv}\cap\left(\bigcup_{k=1}^{k_0}I_k\right)\right),$$

kao i

$$m^*(A_{uv}) = m^*\left(E_{uv} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k_0} I_k^\circ\right)\right) = m^*\left(E_{uv} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k_0} I_k\right)\right),$$

proizilazi da važi

$$m^*(E_{uv}) \leq \epsilon + m^*(A_{uv}).$$

Važi i sledeće:

$$m^*\left(A_{uv} \setminus \bigcup_{k=1}^{k_1} J_k\right) = m^*(A_{uv}) - m^*\left(A_{uv} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k_1} J_k\right)\right) < \epsilon.$$

Stoga je

$$m^*(A_{uv} \leq \epsilon + m^*\left(A_{uv} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{k_1} J_k\right)\right) \leq \epsilon + m^*\left(\bigcup_{k=1}^{k_1} J_k\right).$$

Na kraju, sledi da važi

$$\begin{aligned} u(m^*(E_{uv}) - 2\epsilon) &\leq u(m^*(A_{uv}) - \epsilon) \leq u\sum_{k=1}^{k_1} I_k \leq \sum_{k=1}^{k_1}(f(y_k + s_k) - f(y_k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0}(f(x_k + h_k) - f(x_k)) \leq v(m^*(E_{uv}) + \epsilon). \end{aligned}$$

Kako je tvrđenje dokazano za svako $\epsilon > 0$, onda je

$$u\, m^*(E_{uv}) \leq v\, m^*(E_{uv}$$

odnosno

$$(v - u)m^*(E_{uv}) = 0.$$

Sledi da mora biti $m^*(E_{uv}) = 0$, te je $E_{uv} \in \mathcal{R}^*$. Dakle, u svim prethodnim izrazimo može se pisati m umesto m^*.

Lako je proveriti da se i za ostale izvode moě dokazati isto tvrđenje. Sledi da $f'(x)$ postoji za m-skoro svako $x \in [a, b]$. □

Koristan je tehnički rezultat o Borel-merljivosti monotonih funkcija.

Teorema 7.2.2. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona funkcija, onda je f Borelova funkcija. Samim tim, f je Lebeg-merljiva funkcija.*

Dokaz. Funkcija f ima najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida. Sledi da je skup E tačaka prekida funkcije f Borelov, i $m(E) = 0$. Prema tome, f je Borelova funkcija. □

Sledeća teorema je takođe poznata kao Teorema Lebega.

Teorema 7.2.3. (Lebeg) *Neka je $[a, b]$ ograničen i zatvoren segment, i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neopadajuća funkcija. Tada je f' integrabilna funkcijai važi*

$$\int_a^b f'(x)dm(x) \leq f(b) - f(a).$$

Dokaz. Neka je $(h_n)_n$ niz pozitivnih brojeva, tako da je $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Neka je $f(x) = f(b)$ za svako $x > b$, i neka je

$$g_n(x) = \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}, \quad x \in [a, b], n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x)$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$. $(g_n)_n$ je niz pozitivnih i merljivih funkcija. Na osnovu Fatuove leme sledi da je

$$\int_a^b f(x)dm(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dm(x).$$

Sa druge strane, na osnovu translatorne invarijantnosti Lebegove mere (bez smene promenljivih!), važi

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_n(x)dm(x) &= \frac{1}{h_n}\left(\int_{a+h_n}^{b+h_n} f(x)dm(x) - \int_a^b f(x)dm(x)\right) \\
&= \frac{1}{h_n}\left(\int_b^{b+h_n} f(x)dm(x) - \int_a^{a+h_n} f(x)dm(x)\right) \\
&= f(b) - \frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} f(x)dm(x) \leq f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Time je teorema dokazana. □

7.3 Funkcije ograničene varijacije

Funkcije ograničene varijacije mogu biti izučavane nezavisno od potreba mere i integracije. Ovu sekciju navodimo imajući u vidu potrebu za potpunijim izlaganjem materije.

Definicija 7.3.1. Neka je f realna (ili kompleksna) funkcija definisana na $[a, b]$. Ako postoji konstanta $C > 0$ tako da za svaku podelu P segmenta $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

važi

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C,$$

onda je funkcija f *ograničene varijacije* na $[a, b]$.

Skup svih funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$ označava se sa $BV[a, b]$.

Definicija 7.3.2. Ako je $f \in BV[a, b]$, tada je veličina

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \sup_P \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

totalna varijacija funkcije f na $[a, b]$, pri čemu je supremum uzet po svim podelama P segmenta $[a, b]$.

Lako je uvideti da ako je f realna i monotona funkcija na segmentu $[a, b]$, onda je f ograničene varijacije na $[a, b]$, pri čemu je $\mathrm{V}_a^b(f) \leq |f(b) - f(a)|$. Takođe, ako je $f \in BV[a, b]$, onda je f ograničena funkcija na $[a, b]$.

Dokazaćemo osnovna tvrđenja o funkcijama ograničene varijacije.

Teorema 7.3.1. *Neka je $f, g \in BV[a, b]$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Tada je $\alpha f, f + g \in BV[a, b]$, $\mathrm{V}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \, \mathrm{V}_a^b(f)$ i $\mathrm{V}_a^b(f + g) \leq \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$.*

Dokaz. Formula $\mathrm{V}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \, \mathrm{V}_a^b(f)$ je očigledno tačna, odakle sledi $\alpha f \in BV[a, b]$. Neka je $h = f + g$ i $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ proizvoljna podela segmenta $[a, b]$. Tada je

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})| &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &\leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g), \end{aligned}$$

odakle sledi $\mathrm{V}_a^b(f+g) \leq \mathrm{V}_a^b(f) + \mathrm{V}_a^b(g)$. □

Teorema 7.3.2. *Neka je $f, g \in BV[a,b]$. Tada je $fg \in BV[a,b]$. Ako postoji konstanta $c > 0$ tako da je $|f(x)| \geq c$ za svako $x \in [a,b]$, tada je $1/f \in BV[a,b]$.*

Dokaz. Neka, je $f, g \in BV[a,b]$. Tada postoje konstante M i N tako da je $|f(x)| \leq M$ i $|g(x)| \leq N$ za svako $x \in [a,b]$. Tada je

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\
&= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1}) + f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1})| \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\
&\leq M \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| + N \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\
&\leq M \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) + N \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).
\end{aligned}$$

Time je dokazano $fg \in BV[a,b]$. Drugi deo tvrđenja ostavljen je čitaocu za samostalan rad. □

Teorema 7.3.3. *Neka je $a, b, c \in \mathcal{R}$, $a < b < c$, i neka je f realna funkcija definisana na segmentu $[a,b]$. Tada je $f \in BV[a,b]$, ako i samo ako je $f \in (BV[a,c]) \cap (BV[c,b])$. Pri tome je*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f).$$

Dokaz. $\Longrightarrow$: Neka je $f \in BV[a,b]$. Posmatrajmo podele P_1 i P_2 segmenata $[a,c]$ i $[c,b]$ redom, odnosno

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = c = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b.$$

Očigledno, $P = P_1 \cup P_2$ je podela segmenta $[a, b]$. Stoga je

$$\sum_{k=1}^{m} |f(y_k) - f(y_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Sledi da je

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f) \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

$\Longleftarrow$: Neka je $f \in (BV[a, c]) \cap (BV[c, b])$, i neka je $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ podela segmenta $[a, b]$.

Ako je c jedna tačka podele P, recimo $c = x_j$, tada je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{j} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=j+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^c(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f),$$

odakle sledi

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leq \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f).$$

Ako c nije tačka podele P, tada postoji j tako da je $x_j < c < x_{j+1}$. Stoga je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{j} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(c) - f(x_j)|$$
$$+ |f(x_{j+1}) - f(c)| + \sum_{k=j+2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f),$$

odakle takođe sledi

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leq \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}}(f).$$

Time je dokazano tvrđenje. □

Posledica 7.3.1. *Ako je $f \in BV[a, b]$, tada je $x \mapsto V(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ rastuća funkcija na $[a, b]$.*

Dokaz. Neka je $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ i $f \in BV[a, b]$. Na osnovu prethodne teoreme je

$$V(x_1) = \overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leq \overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}}(f) = \overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) = V(x_2).$$

□

Teorema 7.3.4. (Žordan) *Neka je f realna funkcija definisana na segmentu $[a,b]$. Tada je $f \in BV[a,b]$, ako i samo ako je $f = g - h$, pri čemu su g i h rastuće funkcija na $[a,b]$.*

Dokaz. $\Longleftarrow$: Ako su g i h dve rastuće funkcije na $[a,b]$. Tada je $g, h \in BV[a,b]$ i $f = g - h \in BV[a,b]$.

$\Longrightarrow$: Neka je $f \in BV[a,b]$ i $g(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$. Tada je g rastuća funkcija na $[a,b]$. Neka je $h(x) = \mathrm{V}_a^x(f) - f(x)$. Tada je $f(x) = g(x) - h(x)$. Dovoljno je dokazati da je h takođe rastuća funkcija na $[a,b]$.

Neka je $a < x_1 < x_2 < b$. Tada je $f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \mathrm{V}_{x_1}^{x_2}(f)$. Stoga je

$$h(x_2) - h(x_1) = \overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) - f(x_2) - \overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + f(x_1) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}}(f) - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0.$$

Time je dokazano da je f rastuća funkcija na $[a,b]$. $\square$

Monotone funkcije jesu ograničene varijacije, ali nisu neprekidne. Takođe postoje neprekidne funkcije koje nisu ograničene varijacije.

Primer 7.3.1. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Tada je f neprekidna funkcija na $[0,1]$, ali nije ograničene varijacije na $[0,1]$.

Dokaz. Neka je P_n podela segmenta $[0,1]$:

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \frac{1}{2n} + 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Time je dokazano da f nije ograničene varijacije na $[a,b]$. $\square$

Imajući u vidu da realne funkcije definisane na segmentu $[a,b]$ mogu imati najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida, i pri tome su svi prekidi prve vrste, zaključujemo da važi sledeći rezultat.

Posledica 7.3.2. *Neka je $f \in BV[a,b]$. Tada funkcija f može imati prekide samo prve vrste na $[a,b]$, i to njih najviše prebrojivo mnogo.*

Dokaz. Na osnovu $f = u+iv = (u_1-u_2)+i(v_1-v_2)$, pri čemu su u_1, u_2, v_1, v_2 realne neopadajuće funkcije na $[a,b]$. □

Posledica 7.3.3. *Ako je $f \in BV[a,b]$ tada je f Borelova (samim tim i Lebeg-merljiva) funkcija.*

Posledica 7.3.4. *Ako je $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i ako je $f \in BV[a,b]$, tada postoji $f'(x)$ m-skoro svuda na $[a,b]$. Pri tome, f' je Lebeg-integrabilna na $[a,b]$.*

7.4 Apsolutno neprekidne funkcije

U ovoj glavi od interesa je razmotriti diferencijabilnost funkcija. Posebno, najvažnije je dokazati uzajamnu inverziju diferenciranja i integraljenja. Od fundamentalnog interesa jeste izučavanje apsolutno neprekidnih funkcija.

Definicija 7.4.1. Neka je f (realna ili kompleksna) funkcija definisana na segmentu $[a,b]$. Funkcija f je *apsolutno neprekidna* na $[a,b]$, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da za svaku disjunkntu familiju intervala

$$(\alpha_1, \beta_1), \cdots, (\alpha_n, \beta_n)$$

iz $[a,b]$ važi implikacija:

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \epsilon.$$

Skup svih apsolutno neprekidnih funkcija na $[a,b]$ označava se sa $AC[a,b]$

Posledica 7.4.1. *Ako je f apsolutno neprekidna, onda je f ravnomerno neprekidna na $[a,b]$: uzeti $n = 1$ u definiciji apsolutne neprekidnosti.*

Primer 7.4.1. Ako f zadovoljava Lipšicov uslov na segmentu $[a,b]$, onda jednostavno sledi da je f apsolutno neprekidna na $[a,b]$.

Teorema 7.4.1. *Ako je $f \in AC[a,b]$, tada je $f \in BV[a,b]$.*

Dokaz. Neka broju $\epsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ u definiciji apsolutne neprekidnosti funkcije f. Interval $[a, b]$ podelimo tačkama $x_0, \ldots, x_n$, tako da je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

i pri tome $|x_j - x_{j-1}| < \delta$ za svako $j = 1, \ldots, n$. Dokazaćemo da je $f \in BV[x_{j-1}, x_j]$ za svako $j = 1, \ldots, n$. Neka je

$$x_{j-1} = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = x_j.$$

Tada je

$$m\left(\bigcup_j (t_{j-1}, t_j)\right) = \sum_j (t_j - t_{j-1}) = |x_j - x_{j-1}| < \delta,$$

odakle, prema apsolutnoj neprekidnosti funkcije f sledi

$$\sum_j |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \epsilon.$$

Dakle, $f \in BV[x_{j-1}, x_j]$. Na osnovu dobro poznatih svojstava funkcija ograničene varijacije, sledi da je $f \in BV[a, b]$. □

Posledica 7.4.2. *Ako je $a, b \in \mathbb{R}$ i $f \in AC[a, b]$, tada postoji $f'(x)$ m-skoro svuda na $a, b]$ i $f' \in L_1([a, b], m)$.*

Dokazujemo interesantan rezultat.

Teorema 7.4.2. (Teorema o anulaciji integrala) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebeg merljiva funkcija. Ako za svako $x \in [a, b]$ važi $\int_a^x f dm = 0$, onda je $f = 0$ m-skoro svuda na $[a, b]$.*

Dokaz. Neka je $E = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$, $E_1 = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$, $E_2 = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Tada je $E = E_1 \cup E_2$.

Pretpostavimo da je $m(E_1) > 0$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan broj. Postoji zatvoren skup $F \subset E_1$ tako da je $m(E_1 \setminus F) = m(E_1) - m(F) < \epsilon$. Sledi da je $m(F) > 0$. Skup $U = (a, b) \setminus F$ je otvoren. Stoga postoji niz uzajamno

disjunktnih intervala $(\alpha_j, \beta_j)_j$, tako da je $U = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j)$. Tada je $(a, b) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (\alpha_j, \beta_j) \cup F$. Važi

$$\int\limits_a^b f dm = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} f dm + \int\limits_F f dm.$$

Na osnovu pretpostavki teoreme je $\int\limits_a^b f dm = 0$,

$$\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} f dm = \int\limits_a^{\beta_j} f dm - \int\limits_a^{\alpha_j} f dm = 0,$$

te sledi da je $\int\limits_F f dm = 0$. Kako je $f > 0$ na E_1 i $F \subset E_1$, mora biti $f = 0$ m-skoro svuda na F, te je $m(F) = 0$. Ovo nije moguće zbog $m(F) > 0$.

Sledi $m(E_1) = 0$. Analogno je $m(E_2) = 0$, te je $m(E) = 0$. Time je dokazamo $f = 0$ m-skoro svuda na $[a, b]$. □

Teorema 7.4.3. *Neka je $g \in L_1[a, b]$ i neka je*

$$f(x) = \int\limits_a^x g\, dm + C, \quad x \in [a, b],$$

pri čemu je C konstanta. Tada je:

(1) *$f \in AC[a, b]$;*

(2) *$f'(x) = g(x)$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$.*

(3) *$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \int\limits_a^b |g| dm$.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da su $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ uzajamno disjunktni intervali u $[a, b]$. Tada je

$$|f(\beta_j) - f(\alpha_j)| = \left| \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} g\, dm \right| \leq \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} |g|\, dm,$$

odakle sledi

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \leq \int\limits_{\bigcup\limits_j (\alpha_j, \beta_j)} |g|\, dm.$$

Mera λ, definisana kao $d\lambda = |g| dm$ je apsolutno neprekidna u odnosu na m. Ako je $\epsilon > 0$, tada postoji $\delta > 0$, tako da za svako $E \in \mathcal{R}^*$ važi implikacija

$$m(E) < \delta \implies \lambda(E) < \epsilon.$$

Neka je $E = \bigcup\limits_j (\alpha_j, \beta_j)$. Tada važi implikacija

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| = \int\limits_{\bigcup\limits_j (\alpha_j, \beta_j)} |g| dm = \lambda(E) < \epsilon.$$

Time je dokazana apsolutna neprekidnost funkcije f na $[a, b]$.

(2) Dokazaćemo najpre ovo tvrđenje u specijalnom slučaju: pretpostavimo da je g ograničena integrabilna funkcija na $[a, b]$. Dakle, postoji $M > 0$ tako da je $|g| \leq M$ na $[a, b]$. Kako je f apsolutno neprekidna na $[a, b]$, time i funkcija ograničene varijacije, sledi da $f'(x)$ postoji za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Pretpostavimo da je $f_n(x) = n\left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right)$ za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \in [a, b]$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Sledi da važi

$$|f_n(x)| = n \left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right| \leq n \int\limits_{x}^{x+\frac{1}{n}} |g(t)| \leq M.$$

Konstantna funkcija $x \mapsto M$ je integrabilna na $[a, b]$, te na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi da za svako $x_0 \in [a, b]$ važi

$$\int\limits_{a}^{x_0} f' dm = \int\limits_{a}^{x_0} (\lim_{n\to\infty} f_n) dm = \lim_{n\to\infty} n \int\limits_{a}^{x_0} \left(f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t) \right) dm(t).$$

Na osnovu translatorne invarijantnosti Lebegove mere važi

$$\int\limits_{a}^{x_0} f\left(t + \frac{1}{n}\right) dm(t) = \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f dm.$$

Stoga je

$$\int_a^{x_0} f' dm = \lim_{n\to\infty} n \left(\int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} f dm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f dm \right).$$

Iskoristimo sada činjenicu da je f neprekidna na $[a,b]$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$, tako da za $x \in [a,b]$ i $|x-a| < \delta$ važi $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{1}{n_0} < \delta$. Tada za svako $n \geq n_0$ važi

$$\left| n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f dm - f(a) \right| \leq n \int_a^{a+\frac{1}{n}} |f - f(a)| \, dm < \epsilon.$$

Sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f dm = f(a).$$

Analogno,

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} f dm = f(x_0).$$

Dakle,

$$\int_a^{x_0} f' dm = f(x_0) - f(a) = \int_a^{x_0} g dm.$$

Prema tome,

$$\int_a^{x_0} (f' - g) dm = 0$$

za svako $x_0 \in [a,b]$. Prema Teoremi o anulaciji integrala sledi da je $f' = g$ m-skoro svuda na $[a,b]$.

Prethodni dokaz je suštinski zavisio od činjenice da je g ograničena funkcija na $[a,b]$. Sada pretpostavimo da je g proizvoljna integrabilna funkcija na $[a,b]$. Tada je $g = g^+ - g^-$. Dovoljno je dokazati formulu za g^+, ili, jednostavnije, pretpostaviti da je $g \geq 0$ proizvoljna integrabilna funkcija.

Definišemo niz ograničenih funkcija za svako $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & g(x) \leq n, \\ n, & g(x) > n. \end{cases}$$

Tada je $0 \leq g_n(x) \leq g(x)$ za svako $x \in [a, b]$ i svako $n \in \mathbb{N}$. Takođe je $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. Funkcija

$$x \mapsto h_n(x) = \int\limits_a^x (g(t) - g_n(t))dm(t), \quad x \in [a, b],$$

je neopadajuća funkcija. Stoga postoji $h_n'(x)$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Kako su funkcije g_n ograničene, prema prethodno dokazanom specijalnom slučaju, važi

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x g_n(t)dm(t) = g_n(x)$$

za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Stoga je

$$h_n'(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_a^x g(t)dm(t) - g_n = f'(x) - g_n(x)$$

za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Kako je h_n neopadajuća funkcija, sledi $h_n' \geq 0$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Stoga je $f'(x) \geq g(x)$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Sledi

$$\int\limits_a^b f'dm \geq \int\limits_a^b gdm.$$

Na osnovu Lebegove teoreme za neopadajuću funkciju f, sledi da je

$$\int\limits_a^b f'dm \leq f(b) - f(a) = \int\limits_a^b gdm.$$

Na osnovu svega dokazanog, sledi

$$\int\limits_a^b f'dm = \int\limits_a^b gdm.$$

Tada je $\int\limits_a^b (f' - g)dm = 0$. Kako je $f' \geq g$ m-skoro svuda na $[a, b]$, sledi da je $f' = g$ m-skoro svuda na $[a, b]$.

(3) Definišemo funkciju $x \mapsto v(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$, $x \in [a, b]$. Funkcija v je rastuća na $[a, b]$. Ako je $a \leq x < y \leq b$, onda je

$$|F(y) - F(x)| \leq v(y) - v(x) = \overset{y}{\underset{x}{\mathrm{V}}} f.$$

Sledi da je

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq \frac{v(y) - v(x)}{y - x}.$$

Funkcija v je monotona, pa postoji $v'(x)$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Na osnovu dela (2) sledi

$$|g(x)| = |f'(x)| \leq |v'(x)| = v'(x)$$

za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Na osnovu Lebegove teoreme za monotone funkcije, sledi

$$\int\limits_a^b |g| dm \leq \int\limits_a^v v' dm \leq v(b) - v(a) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f.$$

Neka je sada $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ proizvoljna particija segmenta $[a, b]$. Tada je

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |g| dm, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sledi da je

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f \leq \int\limits_a^b |g| dm.$$

Time je dokazano tvrđenje. □

Formulišemo sledeće tehničko tvrđenje.

Teorema 7.4.4. *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *i neka je* $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i\left((\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-\right)$. *Funkcija* f *je apsolutno neprekidna na* $[a, b]$ *ako i samo ako su sve nenegativne funkcije* $(\operatorname{Re} f)^+, (\operatorname{Re} f)^-, (\operatorname{Im} f)^+, (\operatorname{Im} f)^-$ *apsolutno neprekidne na* $[a, b]$.

Jedna od najvažnijih osobina apsolutno neprekidnih funkcija sledi.

Teorema 7.4.5. *Neka je* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *i neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *apsolutno neprekidna funkcija. Ako je* $f'(x) = 0$ *m-skoro svuda na* $[a, b]$, *tada je* f *konstantna funkcija na* $[a, b]$.

Dokaz. Neka je $a < c < b$ i neka je $E = \{x \in (a, c) : f'(x) = 0\}$. Tada je $m(E) \leq c - a$. Formiramo Vitalijev pokrivač skupa E, na sledeći način.

Za svako $x \in E$ je ispunjeno

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Zato za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za $0 < h < \delta$ važi

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \epsilon. \tag{7.1}$$

Ako prethodna nejednakost važi za neko $h_0 \in (0, \delta)$, onda ova nejednakost važi i za svako $h \in (0, h_0)$. Sledi da svakoj tački $x \in (a, c)$ možemo pridružiti segment $[x, x + h]$, pri čemu važi: $h > 0$, $[x, x + h] \subset (a, c)$ i h je proizvoljno mali broj, tako da važi nejednačina (7.1). Familija segmenata $([x, x + h])_{x,h}$ je Vitalijev pokrivač skupa E.

□

Napomena 7.4.1. Ako se samo pretpostavi $f' = 0$ m-skoro svuda, onda nije obavezno f konstantna funkcija. Videti primer Kantor-Lebegove singularne funkcije.

7.5 Osnovne teoreme diferencijalnog i integralnog računa

U ovoj lekciji dokazujemo osnovne teoreme koje povezuju izvod i integral.

Teorema 7.5.1. (Njutn-Lajbnicova formula) *Neka je data funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, *pri čemu je* $[a, b]$ *ograničen segment. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $f \in AC[a, b]$;

(2) $f' \in L_1[a, b]$ *i* $f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f' dm$.

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je f realna funkcija. Tada je $f = f_1 - f_2$, pri čemu su f_1 i f_2 rastuće funkcije. Tada je $f' = f_1' - f_2'$ m-skoro svuda na $[a, b]$. Stoga je $|f| \leq f_1' + f_2'$. Na osnovu Lebegove teoreme za rastuću funkciju $f_1 + f_2$, važi

$$\int\limits_a^b |f'| dm \leq \int\limits_a^b (f_1' + f_2') dm \leq f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a) < +\infty.$$

Sledi $f' \in L_1[a, b]$.

Funkcija

$$x \mapsto F(x) = f(x) - \int\limits_a^x f' dm, \quad x \in [a, b],$$

je razlika dve apsolutno neprekidne funkcije, te je i sama apsolutno neprekidna funkcija. Takođe je $F' = 0$ za m-skoro svako $x \in [a, b]$. Stoga je F konstantna funkcija. Dakle, postoji konstanta C, tako da je

$$f(x) = \int\limits_a^x f' dm + C, \quad x \in [a, b].$$

Očigledno je $f(a) = C$, odale sledi

$$\int\limits_a^b f' dm = f(b) - f(a).$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Ova implikacija je dokazana u prethodnoj lekciji. □

Situacija je malo komplikovanija na neograničenim intervalima.

Teorema 7.5.2. *Neka je data funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *Postoji* $g \in L_1(\mathbb{R}, m)$ *tako da je* $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} g dm$ *za svako* $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) *Važe sledeća tri uslova:*

(2.1) $f \in AC[-a, a]$ *za svako* $a > 0$*;*

(2.2) $\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}} f < +\infty$*;*

(2.3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Dokazujemo Teoremu o parcijalnoj integraciji za Lebegov integral.

Teorema 7.5.3. (Parcijalna integracija) *Neka je* $[a, b]$ *ograničen segment,* $g \in L_1[a, b]$, $f \in AC[a, b]$. *Tada važi formula*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dm(x) = [f(x)G(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)G(x)dm(x),$$

pri čemu je $G(x) = \int\limits_a^x g dm$.

Dokaz. Funkcija fG je apsolutno neprekidna na $[a, b]$. Stoga je, prema Njutn-Lajbnicovoj formuli, ispunjeno

$$\int\limits_a^b (fG)dm = f(b)G(b) - f(a)G(a) = [fG)]_a^b.$$

Sledi da važi

$$\int\limits_a^b f'Gdm + \int\limits_a^b fgdm = [fG]_a^b,$$

što je i trebalo dokazati. □

Dokazujemo pomoćni rezultat.

Teorema 7.5.4. *Neka je* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *apsolutno neprekidna i strogo rastuća funkcija, i neka je* $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ *apsolutno neprekidna funkcija. Tada je* $f \circ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *takođe apsolutno neprekidna funkcija.*

Dokaz. Funkcija g je apsolutno neprekidna. Stoga za svako *delta* > 0 postoji $\eta > 0$, tako da važi implikacija

$$\sum_{j=1}^{m}(v_j - u_j) < \eta \implies \sum_{j=1}^{m}|g(v_j) - g(u_j)| < \delta$$

za svaku konačnu familiju $(u_1, v_1), \ldots, (u_m, v_m)$ uzajamno disjunkntih intervala u $[a, b]$.

Neka je $\epsilon > 0$, $g(u_j) = t_j$, $g(v_j) = s_j$, $j = 1, \ldots, n$. Funkcija g je strogo rastuća, te je $(t_1, s_1), \ldots, (t_n, s_n)$ uzajamno disjunktan niz intervala u $[g(a), g(b)]$. Za dato $\epsilon > 0$ neka je $\delta > 0$ odovarajući broj iz $\epsilon - \delta$ definicije apsolutne neprekdinsti funkcije f.

Ako je $m = n$, $u_j = u'_j$ i $v_j = v'_j$ za svako $j = 1, \ldots, n$, onda sledi apsolutna neprekidnost funkcije $f \circ g$.

$$\sum_{j=1}^{n}|f(s_j) - f(t_j)| < \epsilon.$$

Time je dokazana apsolutna neprekidnost funkcije $f \circ g$. □

Teorema 7.5.5. (Smena promenljive) *Neka je $[a, b]$ ograničen segment, $f \in L_1[a, b]$, $G \in AC[\alpha, \beta]$, i neka je G strogo rastuća funkcija, tako da je $G(\alpha) = a$ i $G(\beta) = b$. Tada je*

$$\int_a^b f(x)dm(x) = \int_\alpha^\beta f(G(t))G'(t)dm(t).$$

7.6 Diferencijabilne funkcije kao skup prve kategorije

Podsetimo da je topološki prostor X prve kategorije, ako je X najviše prebrojiva unija nigde gustih skupova. Svaki topološki prostor koji nije prve kategorije, jeste druge kategorije. Ako je (X, d) kompletan metrički prostor, tada je X skup druge kategorije.

Neka je $C[a, b]$ prostor realnih ili kompleksnih neprekidnih funkcija na segmentu $[a, b]$, i neka je $\|\cdot\|_\infty$ norma na ovom prostoru. Tada je $(C[a, b], \|\cdot$

$\|_\infty$) Banahov prostor. Prema Teoremi Bera o kategorijama, $C[a,b]$ je druge kategorije.

Označimo sa $D[a,b]$ skup svih funkcija $f \in C[a,b]$, tako da postoji $f'(x)$ za neko $x \in [a,b]$. Drugim rečima, $D[a,b]$ je skup neprekidnih funkcija na $[a,b]$, koje imaju izvod u bar jednoj tački iz $[a,b]$. Tada je $ND[a,b] = C[a,b] \backslash D[a,b]$ skup neprekidnih funkcija koje nemaju izvod ni u jednoj tački segmenta $[a,b]$.

Dokazaćemo da je $D[a,b]$ skup prve kategorije u $C[a,b]$. Kao posledica ovog važnog rezultata, sledi da postoje neprekidne funkcije na $[a,b]$ koje nisu diferencijabilne ni u jednoj tački iz $[a,b]$. Štaviše, mnogo više ima neprekidnih nediferencijabilnih funkcija, nego što ima neprekidnih diferencijabilnih funkcija. Dakle, posmatrano u skupu neprekidnih funkcija, diferencijabilnost konkretne funkcije (u bar jednoj tački) je izuzetak, a nediferencijabilnost funkcije ni u jednoj tački je pravilo. Međutim, konstrukcija neprekidne funkcije koja nema izvod ni u jednoj tački je relativno komplikovana, kao što će se videti u sledećoj sekciji.

Počinjemo rezultatom tehničkog karaktera.

Definicija 7.6.1. Funkcija $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je *deo po deo linearna*, ako je p neprekidna na $[a,b]$ i ako postoji podela $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ segmenta $[a,b]$, tako da je funkcija p linearna na svakom segmentu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Skup svih deo po delo linearnih funkcija na $[a,b]$ označava se sa $PL[a,b]$.

Teorema 7.6.1. *Skup $PL[a,b]$ je gust u skupu $C[a,b]$ u smislu norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Dokaz. Neka je $f \in C[a,b]$ i neka je $\epsilon > 0$. Funkcija f je ravnomerno neprekidna na $[a,b]$. Stoga postoji $\delta > 0$ tako da za svako $x, y \in [a,b]$ sa svojstvom $|x-y| < \delta$ važi $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Posmatrajmo particiju $P : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ segmenta $[a,b]$, tako da je $a_{i+1} - a_i < \delta$ za svako $i = 0, \ldots, n-1$. Definišimo funkciju $p : [a,b] :\to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$p(x) = \begin{cases} f(a_i), & x = a_i,\ i = 0, \ldots, n, \\ \text{linearno}, & x \in [a_i, a_{i+1}],\ i = 0, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Tada je očigledno $p \in PL[a,b]$. Neka je $x \in [a,b]$ proizvoljan. Tada postoji $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tako da je $x \in [a_i, a_{i+1}]$. Važi

$$|f(x) - p(x)| \leq |f(x) - f(a_i)| + |p(a_i) - p(x)| < \frac{\epsilon}{2} + |p(a_i) - p(a_{i+1}| < \epsilon.$$

Dakle, $\|f - p\|_\infty < \epsilon$, te je $PL[a,b]$ gust u skupu $C[a,b]$.

Primetimo da je dokaz potuno isti u slučaju kompleksnog prostora $C[a,b]$. Tada je funkcija p linearna na segmentu $[a_i, a_{i+1}]$, kako p preslikava $[a_i, a_{i+1}]$ linearno na duž $[f(a_i), f(a_{i+1})]$ u skupu $\mathbb{C}$. $\square$

Dokazujemo najvažniju teoremu ove sekcije.

Teorema 7.6.2. *Skup $D[a,b]$ je skup prve kategorije u $C[a,b]$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$. Skup $ND[a,b]$ je skup druge kategorije u $C[a,b]$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati teoremu za $[a,b] = [0,1]$. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$ i neka je

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \{f \in C[a,b] : (\exists x \in [a,b])(\forall t \in [a,b]) \\ &\qquad \left(0 < |t-x| < \frac{1}{m} \implies \left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| < n\right)\Bigg\}. \end{aligned}$$

Ako je $f \in D[a,b]$, onda postoje $n, m \in \mathbb{N}$ tako da je $f \in A_{n,m}$. Dakle, $D[a,b] \subset A := \bigcup\limits_{n,m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$.

Dokazaćemo da je $A_{n,m}$ zatvoren skup za svako $n, m \in \mathbb{N}$. Neka je $(f_k)_k$ Košijev niz u $A_{n,m}$. Tada postoji $f \in C[a,b]$ tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$. Na osnovu $f_k \in A_{n,m}$, sledi da za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji $x_k \in [a,b]$ tako da za svako $t \in [a,b]$ važi implikacija

$$0 < |x_k - t| < \frac{1}{m} \implies \left|\frac{f_k(t) - f_k(x_k)}{t - x_k}\right| < n.$$

Niz $(x_k)_k$ je ograničen, te postoji konvergentan podniz ovog niza. Bez gubljenja opštosti, novi konvergentan podniz označimo sa $(x_k)_k$, pri čemu smo, eventualno, izostavili neke x_l i odgovarajuće f_l. Neka je $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \in [a,b]$. Ako je $t \in [a,b]$ i $0 < |t - x_0| < \frac{1}{m}$, tada je, zbog neprekidnosti svih funkcija f_k i f, ispunjeno

$$\left|\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{f_k(t) - f_k(x_k)}{t - x_k}\right| \le n.$$

Dokazali smo da je $f \in A_{n,m}$, te je $A_{n,m}$ zatvoren skup.

Dokažimo da je $A_{n,m}$ nigde gust, odnosno da je unutrašnost ovog zatvorenog skupa jednaka praznom skupu. Pretpostavimo da je $f \in \operatorname{int} A_{n,m}$ za neko $n, m \in \mathbb{N}$. Tada postoji neko $\epsilon > 0$ tako da je

$$K(f,\epsilon) = \{h \in C[a,b] : \|f - h\|_\infty < \epsilon\} \subset A_{n,m}.$$

Prema prethodnoj teoremi, postoji $p \in PL[a,b]$ tako da je $\|f-p\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.

Funkcija p je diferencijabilna svuda, osim eventualno u konačno mnogo tačaka. Primetimo da su izvodi funkcije p na svakom podeonom intervalu konstante. Stoga postoji konstanta $M \in \mathbb{N}$, tako da je $|p'(x)| \leq M$ za svako $x \in [a,b]$ za koje postoji $p'(x)$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $k > \frac{2(M+n)}{\epsilon}$.

Posmatrajmo particiju $Q : 0 = a_0 < a_1 = \frac{1}{k} < a_2 = \frac{2}{k} < \cdots a_k = 1$. Neka je $q \in PL[0,1]$ sa odgovarajućom particijom Q, tako da je $q(a_i) = 0$ ako je i paran broj, i $q(a_i) = 1$ ako je i neparan broj. Sledi da je $|q(x)| \leq 1$ za svako $x \in [0,1]$, kao i $q'(x) = \pm k$ za svako $x \in [0,1]$ za koje $q'(x)$ postoji.

Neka je

$$g(x) = p(x) + \frac{\epsilon}{2} q(x), \quad x \in [a,b].$$

Tada je $g \in C[a,b]$ i g je deo po delo linearna.

Na osnovu $\|f-p\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ i $\|g-p\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$, sledi da je $\|f-g\|_\infty < \epsilon$. Dakle, mora biti $g \in K(f,\epsilon) \subset A_{n,m}$, odnosno $g \in A_{n,m}$.

Međutim, dokazaćemo $g \notin A_{n,m}$. Neka je $x \in [0,1]$ sa svojstom da $p'(x)$ i $q'(x)$ postoje. Tada je

$$|g'(x)| = \left| p'(x) \pm \frac{\epsilon}{2} k \right|.$$

Na osnovu $|p'(x)| \leq M$ i $k > \frac{2(M+n)}{\epsilon}$, sledi da važi

$$|g'(x)| \geq \frac{\epsilon}{2} k - |p'(x)| > n.$$

Postoji $l \in \mathbb{N}$ i $l > m$, tako da je funkcija g linearna na segmentu $\left[x - \frac{1}{l}, x + \frac{1}{l}\right]$. Kako je $|g'(x)| > n$, sledi da za svako $t \in [a,b]$ sa svojstvom $0 < |x-t| < \frac{1}{l} < \frac{1}{m}$ važi

$$\left| \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right| > n.$$

Dokazali smo $g \notin A_{n,m}$, te je $A_{n,m}$ nigde gust skup.

Sledi da je skup $A = \bigcup_{n,m} A_{n,m}$ prve kategorije u $C[a,b]$. Kako je $D[a,b] \subset A$, sledi da je $D[a,b]$ takođe prve kategorije. Sledi da $ND[a,b]$ mora biti skup druge kategorije. $\square$

Posledica 7.6.1. *Postoje neprekidne funkcije na $[a,b]$, koje nisu diferencijabilne ni u jednoj tački tog segmenta.*

Napomena 7.6.1. Teorema tvrdi mnogo više, nego što je zaključak prethodne posledice.

Neprekidnih nigde diferencijabilnih funkcija ima mnogo više, nego što ima funkcija koje su neprekidne i diferencijabilne u bar jednoj tački segmenta (poređenje je uzeto u smislu skupova prve ili druge kategorije).

Stoga je diferencijabilnost neprekidne funkcije u jednoj tački izuzetak, a nediferencijabilnost neprekidne funkcije ni u jednoj tački je pravilo.

7.7 Važni primeri u teoriji funkcija

Ova sekcija sadrži primere u teoriji funkcija. Neki primeri mogu biti shvaćeni kao kontra-primeri u razumevanju uzajamnog odnosa neprekidnosti i diferencijabilnosti. Drugi primeri pokazuju da se pojedine pretpostavke u važnim teoremama ne mogu izostaviti.

Neprekidne nigde diferencijabilne funkcije

Navodimo primere neprekidnih funkcija, koje nigde (ili uglavnom nigde) nemaju izvod.

Primer 7.7.1. (Vajerštrasova[3] funkcija) Neka je $0 < a < 1$, b je prirodan i neparan broj, tako da je $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Neka je

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tada je W neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, i pri tome f nije diferncijabilna ni u jednoj tački $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je

$$g_n(x) = a^n \cos(b^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Tada su sve funkcije g_n neprekidne. Kako je $|g_n(x) \leq a^n$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i svako $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $0 < a < 1$, prema Vajerštrasovom kriterijumu, funkcija W je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Problem u ovoj konsturkciji je dokazati da W nije diferencijabilna ni u jednoj tački $x \in \mathbb{R}$. □

[3]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), nemački matematičar

Navodimo bitno jednostavniji primer van der Vardena[4] iz 1930 godine [26].

Primer 7.7.2. (van der Vardenova funkcija) Za svako $x \in \mathbb{R}$ neka je $]x[$ rastojanje tačke x od skupa $\mathbb{Z}$. Dakle, $0 \leq]x[\leq \frac{1}{2}$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Posmatrajmo funkciju

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{]10^n x[}{10^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija V je neprekidna na $\mathbb{R}$ i nigde diferencijabilna na $\mathbb{R}$.

Dokaz. Funkcije $x \mapsto \frac{]10^n x[}{10^n}$ su neprekidne i ograničene sa $\frac{1}{10^n}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Prema Vajerštrasovom kriterijumu, red kojim je definisana funkcija f, ravnomerno konvergira na $\mathbb{R}$, te je V neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$.

Neka je sada $0 \leq x < 1$ i neka je $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ decimalni zapis broja x, pri čemu se cifra 9 ne ponavlja beskonačno puta na kraju ovog zapisa. Ako je ovaj decimalni zapis konačan, onda na kraju dopišemo beskonačno mnogo cifara 0.

Tada je $10^n x = a_1 a_2 \ldots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \ldots$. Posmatrajmo $y = 0, a_{n+1} a_{n+2} \ldots$. Važi

$$]10^n x[= \begin{cases} y, & y \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - y, & y > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Definišimo niz $(h_k)_k$ na sledeći način:

$$h_k = \begin{cases} -\frac{1}{10^k}, & a_k \in \{4, 9\}, \\ \frac{1}{10^k}, & a_k \notin \{4, 9\}. \end{cases}$$

Očigledno je $\lim\limits_{k \to \infty} h_k = 0$. Važi

$$\frac{V(x + h_k) - V(x)}{h_k} = 10^k \sum_{n=0}^{\infty} \pm \frac{]10^n (x \pm 10^{-k})[-]10^n x[}{10^n} = 10^k \left(\sum_{n=0}^{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \right).$$

Posmatrajmo prvu sumu, gde je $0 \leq n \leq k$. Brojilac ove sume je uvek oblika $\pm 10^{n-k}$, te je $10^k \sum\limits_{n=0}^{k}$ uvek ceo broj. Kod druge sume, u slučaju $n > k$, je uvek brojilac jednak nuli.

[4] Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996), holandski matematičar

Sledi da je

$$\frac{V(x+h_k)-V(x)}{x}$$

ceo broj, i to nazmenično paran ili neparan, za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako je $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0$, sledi da funkcija V nije diferencijabilna u tački x.

Jednostavno je proširiti dokaz ako je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan broj. □

Primer 7.7.3. (Rimanova funkcija) Neka je $R(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^1}\sin(k^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$. Funkcija R je neprekidna na $\mathbb{R}$ i diferencijabilna samo u tačkama $x_0 = \pi\frac{2p+1}{2q+1}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Pri tome je $R'(x_0) = -\frac{1}{2}$.

Dakle, funkcija R je nediferencijabilna na skupu koji je svuda gust u $\mathbb{R}$. Ovde je interesantno pomenuti da je Vajerštras jedini poznat izvor o povezanosti ove funkcije i Rimana. Naime, Vajerštras je prisustvovao Rimanovim predavanjima, i tako dokumentovao ovaj deo Rimanovog matematičkog doprinosa.

Monotona funkcija za koju ne važi formula Njutn-Lajbnica

Pokazali smo da za neopadajuću funkciju f na ograničenom segmenttu $[a, b]$ važi formula $\int\limits_a^b f'(x)dm(x) \leq f(b) - f(a)$. Dobro je poznato da je monotona funkcija na segmentu uvek integrabilna u Rimanovom smislu. Dakle, prethodna formula važi i za Rimanov integral. Prirodno je postaviti pitanje: da li postoji neopadajuća funkcija f, tako da prethodna nejednakost jeste stroga? Odgovor je DA, i pokazujemo to sledećim primerom. Konstruišemo Kantor-Lebegovu funkciju.

Primer 7.7.4. (Kantor-Lebeova singularna funkcija) Neka je C Kantorov skup na $[0, 1]$.

Neka je $K(0) = 0$ i $K(1) = 1$.

U prvom koraku izbačen je centralni interval $I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Neka je $K(x) = \frac{1}{2}$ za $x \in I_1^1$.

U drugom koraku izbačeni su intervali $I_1^2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $I_2^2 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Neka je

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in I_1^2, \\ \frac{3}{4}, & x \in I_2^2. \end{cases}$$

U trećem koraku izbačeni su intervali $I_1^3 = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $I_2^3 = \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $I_3^3 = \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$, $I_4^3 = \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$. Neka je

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x \in I_1^3, \\ \frac{3}{8}, & x \in I_2^3, \\ \frac{5}{8}, & x \in I_3^3, \\ \frac{7}{8}, & x \in I_4^3. \end{cases}$$

Očigledno, postupak možemo nastaviti na opisani način na svim izbačenim intervalima.

Skup C je nigde gust. Dakle, ako je $x_0 \in C$, onda u svakom intervalu $(x_0 - \epsilon, x_0)$ postoji neki izbačeni interval, odnosno postoje tačke iz skupa $[0,1] \setminus C$. Stoga je prirodno uzeti sledeće:

$$K(x_0) = \sup\{K(x) : x < x_0, x \in [0,1] \setminus C\}, \quad x_0 \in C.$$

Upravo činjenica da je C nigde gust u $[0,1]$ ima za posledicu da je K neprekidna funkcija. Očigledno je K neopadajuća funkcija. K je konstantna na svim izbačenim intervalima, i stoga je $K'(x) = 0$ za svako $x \in [0,1] \setminus C$. Kako je $m(C) = 0$, sledi da je $K' = 0$ m-skoro svuda na $[0,1]$.

Iz svega navedenog proizilazi:

$$0 = \int_0^1 K'(x)dm(x) < K(1) - K(0) = 1.$$

Dakle, formula Njutn-Lajbnica ne važi. Odmah sledi da funkcija K nije apsolutno neprekidna na $[0,1]$.

Kantorova funkcija dopušta jednostavnu generalizaciju. Neka je $x \in [0,1)$. Tada je $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_k \frac{1}{2^k}$ jedinstven binarni zapis broja x, pri čemu je $a_k \in \{0,1\}$, i nije moguće da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $a_n = 1$ za svako $n \geq n_0$. Neka je

$$K_h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k h^k.$$

Sada je $K_{1/3} = K$ Kantor-Lebegova funkcija.

U skladu sa prethodnim primerom dolazimo do definicije.

Definicija 7.7.1. Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je singularna, ako važe sledeći uslovi:

(1) f je neprekidna i nepoadajuća na $[a, b]$, pri čemu je $f(a) < f(b)$;

(2) $f'(x) = 0$ m-skoro svuda na $[a, b]$.

Dakle, Kantor-Lebegova funkcija je singularna.

Strogo rastuća funkcija čiji je izvod skoro svuda jednak nuli

Interesantni istorijski podaci

Na osnovu prethodne sekcije, znamo da je postoje neprekidne i nigde diferencijabilne funkcije na segmentu. Međutim, konstrukcija takve funkcije nije jednostavna. Stoga su vodeći matematičari u 18. i 19. veku smatrali da iz neprekidnosti funkcije na nekom segmentu sledi diferencijabilnost te funkcije svuda na segmentu, osim eventualno u konačno mnogo izolovanih tačaka, koje su nazvane singularitetima funkcije.

Jedan od prvih matematičara koji je postavio piranje da li je zaista to tačno, jeste Amper[5] 1806. godine [2].

Imajući u vidu sadašnje poznavanje činjenica, primere neprekidnih i nigde diferencijabilnih funkcija poznavali su: Bolcano[6] (primer odgovarajuće funkcije je pronašao 1830. godine; rezultat je publikovan 1922. godine poshumno), Kelerije[7] (primer funkcije je pronašao oko 1860. godine; rezultat je publikovan 1890. godine posthumno), Riman (približan primer odgovarajuće funkcije je pronašao oko 1861. godine, i saopštavao na svojim predavanjima; rezultat nije publikovan), Vajerštras(rezultat saopšten 1872. godine, objavljen 1886. godine), Darbu[8] (rezultat dobijen 1873. godine; publikovano 1875. godine), Peano[9] (rezultat publikovan 1890. godine). Sve ideje su slične: konstruiše se beskonačna suma brzo oscilujućih funkcija.

Imajući u vidu da su rezultati Bolcana i Kelerija objavljeni posthumno, ovi rezultati nisu imali uticaja na matematiku tog vremena. Sa druge strane, funkcija koju je konstruisao Riman, nije diferencijabilna samo na skupu koji je svuda gust u $\mathbb{R}$.

[5] André-Marie Ampère (1775-1836), franuski matematičar i fizičar

[6] Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), češki matematičar, nemačke nacionalne pripadnosti

[7] Charles Cellérier, švajcerski matematičar

[8] Jean-Gaston Darboux (1842-1917), francuski matematičar

[9] Giuseppe Peano (1858-1932), italijanski matematičar

Stoga se kao primer prve neprekidne funkcije koja nije nigde diferencijabilna, uzima funkcija Vajerštrasa. Pri tome, funkcija koje je dobio Darbu, nezavisna je od rezultata Vajerštrasa.

Priča se ovde ne završava. Vajerštras je javno saopštio rezultat o postojanju neprekidne nigde diferencijabilne funkcije u Pruskoj akademiji nauka 1872. godine, ali taj rezultat je objavljen prvi put u radu Du Bua-Rejmona[10] 1875. godine [8].

[10]Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831-1889), nemački matematičar

Glava 8

Mera i integracija na proizvodu prostora

8.1 Proizvod merljvih prostora

Neka su $(X, \mathcal{R}_1)$ i $(Y, \mathcal{R}_2)$ merljvi prostori. Ako je $A \in \mathcal{R}_1$ i $B \in \mathcal{R}_2$, onda je $C = A \times B$ *merljivi pravougaonik* u $X \times Y$. Ako su $C_1, \ldots, C_n$ uzajamno disjunknti merljivi pravougaonici u $X \times Y$, tada je $D = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ *merljiva elementarna figura* u $X \times Y$.

Definicija 8.1.1. $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ je najmanja σ-algebra u $X \times Y$, koja sadrži sve merljive pravougaonike.

Ako je $E \subset X \times Y$, $x \in X$ i $y \in Y$, onda definišemo sledeće skupove:

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \qquad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Skup E_x je x-sekcija skupa E, i važi $E_x \subset Y$. Skup E^y je y-sekcija skupa E, kao i $E^y \subset X$.

Teorema 8.1.1. *Ako je $E \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, tada za svako $x \in X$ i svako $y \in Y$ važi $E_x \in \mathcal{R}_2$ i $\mathcal{R}^y \in \mathcal{R}_1$.*

Dokaz. Označimo sa Ω skup svih $E \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, sa svojstvom da je $E_x \in \mathcal{R}_2$ za svako $x \in X$. Jednostavno je proveriti da svaki merljivi pravougaonik pripada familiji Ω. Naime, ako je $C = A \times B$, pri čemu je $A \in \mathcal{R}_1$ i $B \in \mathcal{R}_2$, tada je

$$C_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A. \end{cases}$$

Dokažimo da je Ω jedna σ-algebra na $X \times Y$. Očigledno je $X \times Y \in \Omega$. Ako je $E \in \Omega$, na osnovu $(E_x)^c = (E^c)_x$, sledi da je $E^c \in \Omega$. Na kraju, ako je $E_1, E_2, \dots \in \Omega$, tada je

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x,$$

odakle sledi $\bigcup E_n \in \Omega$.

Na osnovu činjenice da je $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ najmanja σ-algebra koja sadrži sve merljive pravougaonike, sledi da je $\Omega = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$.

Analogno se dokazuje drugi deo tvrđenja. □

Teorema 8.1.2. *$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ je najmanja monotona familija koja sadrži sve merljive elementarne figure u $X \times Y$.*

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{E}$ familiju svih merljivih elementarnih figura u $X \times Y$, i označimo sa $\mathcal{M}$ najmanju monotonu familiju u $X \times Y$ koja sadrži $\mathcal{E}$. Na osnovu činjenice da je $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ jedna σ-algebra, sledi da je $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ monotona familija. Na osnovu $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$ sledi $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$.

Da bi dokazali obrnutu inkluziju $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{M}$, pretpostavimo $A_1, A_2 \in \mathcal{R}_1$ i $B_1, B_2 \in \mathcal{R}_2$. Tada važi

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)).$$

Sledi da je presek dva merljiva pravougaonika opet merljivi pravougaonik, dok je razlika dva merljiva pravougaonika disjunkta unija dva merljiva pravougaonika – odnosno jedna merljiva elementarna figura. Dakle, ako je $C, D \in \mathcal{E}$, onda je $C \cap D \in \mathcal{E}$, $C \setminus D \in \mathcal{E}$, $C \cup D = (C \setminus D) \cup D \in \mathcal{E}$.

Za svaki spup $P \subset X \times Y$ definišemo familiju skupova $\Omega(P)$ na sledeći način:

$$\Omega(P) = \{Q : Q \subset X \times Y, P \setminus Q \in \mathcal{M}, Q \setminus P \in \mathcal{M}, P \cup Q \in \mathcal{M}\}.$$

Očigledno, $Q \in \Omega(P)$ ako i samo ako $P \in \Omega(Q)$. Kako je $\mathcal{M}$ monotona familija, sledi da je i $\Omega(P)$ monotona familija.

Pretpostavimo sada da je $P \in \mathcal{E}$. Na osnovu osobina familije $\mathcal{E}$, sledi da za svako $Q \in \mathcal{E}$ važi $Q \in \Omega(P)$. Sledi $\mathcal{E} \subset \Omega(P)$. Kako je $\mathcal{M}$ najmanja monotona familija koja sadrži $\mathcal{E}$, sledi da je $\mathcal{M} \subset \Omega(P)$ za svako $P \in \mathcal{E}$.

Neka je sada $Q \in \mathcal{M}$. Upravo smo pokazali da ako je $P \in \mathcal{E}$, onda je $Q \in \Omega(P)$.

□

Glava 9

Reprezentacije funkcionala

9.1 Reprezentacija pozitivnih funkcionala na $C_c(X)$

U ovoj sekciji razmatramo Risov rezultat u vezi reprezentacije pozitivnih funkcionala na prostoru $C_c(X)$, pri čemu je X lokalno kompaktan Hausdorfov prostor.

Podsetimo da je nosač neprekidne funkcije $f : X \to \mathbb{C}$ definisan kao $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{cl}(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$. Pretpostavljamo da je $C_c(X)$ prostor kompleksnih neprekidnih funkcija na X, koje imaju kompaktne nosače u X. Neka je $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$ linearno preslikavanje (linearan funkcional). Ako iz činjenice $f \geq 0$ na X proizilazi $\Lambda f \geq 0$, tada je Λ *pozitivan linearan funkcional* na $C_c(X)$.

Neka je μ pozitivna Borelova mera, tako da je mera svakog kompakta konačna. Neka je $f \in C_c(X)$. Iz činjenice da je f neprekidna na kompaktu $\mathrm{supp}(f)$, sledi da je f ograničena na $\mathrm{supp}(f)$. Recimo, neka je $|f| \leq M$ na $\mathrm{supp}(f)$, a samim tim i na X. Tada je f je integrabilna na X iz sledećeg razloga:

$$\int_X |f| d\mu = \int_{\mathrm{supp}(f)} |f| d\mu \leq M \cdot \mu(\mathrm{supp}(f)) < \infty.$$

Lako je proveriti da je formulom

$$\Lambda f := \int_X f d\mu, \quad f \in C_c(X),$$

definisan pozitivan linearan funkcional na C_c.

Interesantno je da u veoma važnom specijalnom slučaju važi i obrnut rezultat, koji formulišemo u sledećoj teoremi.

Teorema 9.1.1. (Ris) *Neka je X lokalno kompaktan Hausdorfov prostor, i neka je Λ pozitivan linearan funkcional na $C_c(X)$. Tada postoji σ-algebra $\mathcal{R}$ na X, tako da je $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{R}$, i postoji jedinstvena pozitivna mera μ na $\mathcal{R}$, sa svojstvima:*

(1) *Za svako $f \in C_c(X)$ važi $\Lambda f = \int\limits_X f d\mu$;*

(2) *$\mu(K) < \infty$ za svako $K \in \kappa$;*

(3) *Za svako $E \in \mathcal{R}$ važi $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \in \tau\}$;*

(4) *Ako je $E \in \tau$, ili je $E \in \mathcal{R}$ i $\mu(E) < \infty$, tada je $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \in \kappa\}$;*

(5) *Mera μ je kompletna na $\mathcal{R}$.*

9.2 Aproksimacije neprekidnim funkcijama

9.3 Reprezentacia ograničenih funkcionala na $L_p(X, \mu)$

U ovoj sekciji obrađujemo reprezentatije ograničenih linearnih funkcionala na prostorima pozitivnih mera $L_p(X, \mu)$. Ako je X Banahov prostor, onda je njegov dualan prostor označen sa X^*. Cilj ove lekcije jeste dokaz sledećeg tvrđenja: ako je $1 < p, q < +\infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onda je dualni Banahov prostor prostora $L_p(X, \mu)$ izomorfan prostoru $L_q(X, \mu)$. Ovaj izomorfizm je precizno opisan sledećom teoremom.

Teorema 9.3.1. *Neka je (X, μ) prostor pozitivne mere, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako je $g \in L_q(X, \mu)$, tada važi:*

(1) *Preslikavaje $\varphi_g : L_p(X, \mu) \to \mathbb{C}$, definisano kao*

$$\varphi_g(f) = \int\limits_X fg d\mu, \quad f \in L_p(X, \mu),$$

jeste ograničen linearan funkcional na prostoru $L_p(X, \mu)$; pri tome je $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$;

(2) *Preslikavanje* $F : g \mapsto \varphi_g$ *je izomorfizam iz Banahovog prostora* $L_q(X,\mu)$ *na Banahov prostor* $(L_p(X,\mu))^*$.

Dokaz. (1) Ako je $f \in L_p(X,\mu)$, na osnovu nejednakosti Heldera sledi da važi

$$|\varphi_g(f)| = \left| \int_X fg d\mu \right| \leq \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proizilazi da je φ_g ograničen linearan funkcional na $L_p(X,\mu)$ sa osobinom $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$.

Potrebno je dokazati da navedenu formu ima svaki ograničen linearan funkcional ψ na prostoru $(L_p(X,\mu))^*$. Neka je, dakle, $\psi \in (L_p(X,\mu))^*$ proizvoljan.

Slučaj 1. Pretpostavimo da je μ konačna mera. Ako je $E \in \mathcal{R}$, tada je $\chi_E \in L_p(X,\mu)$. Definišemo funkciju $\lambda : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ na sledeći način:

$$\lambda(E) = \psi(\chi_E), \quad E \in \mathcal{R}.$$

Funkcional ψ je linaran, te odmah sledi konačna aditivnost funkcije λ. Dokazaćemo prebrojivu aditivnost ove funkcije.

Neka je $(E_n)_n$ niz uzajamno disjunktnih skupova iz $\mathcal{R}$, i neka je $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Neka je $F_n = E_1 \cup \cdots \cup E_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $F_n \subset F_{n+1}$ za svako n, kao i $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$. Takođe je

$$\|\chi_E - \chi_{F_n}\|_p = \left(\int_X |\chi_E - \chi_{F_n}|^p d\mu \right)^{1/p} = (\mu(E \setminus F_n)^{1/p}.$$

Niz $(E \setminus F_n)_n$ je opadajući, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n) = \emptyset$, te na osnovu osobine neprekidnosti mere μ sledi da je ispunjeno $\lim_{n\to\infty} \|\chi_E - \chi_{F_n}\|_p = 0$. Funkcional ψ je neprekidan, te je $\lim_{n\to\infty} \psi(F_n) = \psi(E)$, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda(E_1) + \cdots + \lambda(E_n)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \lambda(E).$$

Sledi da je λ prebrojivo aditivna, te je λ kompleksna mera.

Ako je $E \in \mathcal{R}$ i $\mu(E) = 0$, onda je $\|\chi_E\|_p = 0$, te je i $\lambda(E) = 0$. Sledi $\lambda \ll \mu$. Prema Teoremi Radona-Nikodime, proizilazi da postoji $g \in L_1(X, \mu)$, tako da za svako $E \in \mathcal{R}$ važi

$$\psi(\chi_E) = \lambda(E) = \int\limits_E g d\mu = \int\limits_X \chi_E g d\mu.$$

Ako je s prosta merljiva funkcija, onda je s linearna kombinacija karakterističnih funkcija. Imajući u vidu linearnost funkcionala i linearnost integrala, proizilazi da važi formula

$$\psi(s) = \int\limits_X s g d\mu$$

za svaku merljivu prostu funkciju s.

Neka je sada $f \in L_\infty(X, \mu)$. Tada je $f = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, pri čemu je ova granična vrednost ravnomerna, a $(s_n)_n$ je niz merljivih prostih funkcija. Iz ravnomerne konvergencije $s_n \to f$ na X sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\|_p = 0$. Na osnovu neprekidnosti funkcionala ψ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(s_n) = \psi(f)$. Takođe, imajući u vidu da je $f, s_n \in L_\infty(X, \mu)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X s_n g d\mu = \int\limits_X f g d\mu$. Dakle, formula

$$\psi(f) = \int\limits_X f g d\mu \tag{9.1}$$

važi za svaku funkciju $f \in L_\infty(X, \mu)$.

Dokažimo da je $g \in L_q(X, \mu)$. Postoji merljiva funkcija h, tako da je $|h| = 1$ i $hg = |g|$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ neka je $A_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, i neka je $f = \chi_{A_n} |g|^{q-1} h$. Ako je $x \in A_n$, onda je $|f(x)|^p = |g(x)|^q$. Očigledno je f ograničena funkcija, i stoga formula (9.1) implicira

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_n} |g|^q d\mu &= \int\limits_{A_n} |f|^p d\mu = \int\limits_X f g d\mu = \psi(f) \leq \|\psi\| \left(\int\limits_{A_n} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \|\psi\| \left(\int\limits_{A_n} |g|^q d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Sledi

$$\left(\int\limits_{A_n} |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\psi\|.$$

Na osnovu $q \in L_q(X, \mu)$ sledi da je g μ-skoro svuda konačna (ovaj komentar je u slučaju da uzimamo u obzir i proširene realne funkcije). Ako je $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, onda je $\mu(X \setminus Y) = 0$. Na osnovu $A_n \subset A_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$, kao i na osnovu neprekidnosti mere μ, sledi da je

$$\left(\int\limits_{Y} |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{A_n} |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\psi\|.$$

Dakle,

$$\left(\int\limits_{X} |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\psi_g\|.$$

Time je dokazano $\|g\|_q = \|\psi_g\|$.

□

9.4 Reprezentacija ograničenih funkcionala na $C_0(X)$

Glava 10

Diferenciranje mera

Glava 11

Vektorske mere

Literatura

[1] S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.

[2] A. M. Ampère, *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui condusent 'a une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à lexpression finie des termes quon néglige lorsquon arrete cette série à un terme quelconque*, J. Ècole Polytech. 6 (1806), No. 13, 148181.

[3] M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić, *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 1997.

[4] V. Bogachev, *Measure theory, volumes 1 and 2*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2007.

[5] C. Constatinescu, W. Filter, K. Weber, A. Sontag, *Advanced integration theory*, Kluwer, Dordrecht-Boston-Londnon, 1998.

[6] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[7] B. Driver, *Analysis tools with examples*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 2003.

[8] P. Du Bois-Reymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Funktionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, J. Reine Angew. Math. 79 (1875), 2137

[9] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators, part I*, Interscience Publishers, 1958.

[10] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer, New York, 1969.

[11] P. Halmos, *Measure thery*, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1950.

[12] E. Hewit, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, New York - Heidelberg - Berlin.

[13] N. Ivanovski, *Realna analiza*, Prosvetno delo, Skopje, 1997.

[14] N. Ivanovski, *Funkcionalna analiza*, Prirodno-matematički fakultet, Skopje, 2003.

[15] D. S. Kurtz and C. W. Schwartz, *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*, World Scientific, New Jersey, 2004.

[16] S. Lang, *Real and functional analysis*, Springer, New York Inc. 1993.

[17] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, drugi dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[18] B. Mirković, *Teorija mera i integrala*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[19] L. Nachbin, *The Haar integral*, D. van Nostrand, New Jersey, 1964.

[20] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[21] L. F. Richardson, *Measure and integration: a concise introduction to real analysis*, Wiley, New Jersey, 2009.

[22] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGrow-Hill, New Yokr, 1987.

[23] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.

[24] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Functional analysis: introduction to further topics of analysis*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2011.

[25] J. Thim, *Continuous nowhere differentiable functions*, Master thesis, Lulea University of Technologu, 320 CIV, 2003.

[26] B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Zeit. 32 (1930), 474-475.

[27] K. Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, Julius Springer, Berlin, 1886.

[28] A. C. Wheeden, A Zigmund, *Measure and integral*, Marcel Dekker, New York, 1977.

[29] J. Yeh, *Real analysis: theory of measure and integration*, World Scientific, New Jersey, 2006.

[30] A. C. Zaanen, *Integration*, North Holland, Amsterdam, 1967.