Teorija operatora

Septembarski ispitni rok

26.08.2020.

1. Neka je H Hilbertov prostor i $T \in B(H)$. Definišimo operator $S = I + T^*T$. Dokazati da postoji $S^{-1} : S(H) \to H$.

2. Neka je H kompleksan Hilbertov prostor i $S(H)$ skup svih samokonjugovanih operatora na H. Dokazati da je $S(H)$ zatvoren realan potrpostor u $B(H)$ i da je

$$B(H) = S(H) + iS(H).$$

3. Odrediti adjungovani operator A' operatora $A : l_1 \to c_0$ definisanog sa

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (\tfrac{x_1}{2}, \tfrac{x_2}{3}, \ldots, \tfrac{x_n}{n+1}, \ldots), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1.$$

4. Neka je operator $S : l^2 \to l^2$ definisan sa

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2.$$

   $a)$ Odrediti $\|S\|$ i S^*;

   $b)$ Dokazati da je $\sigma_p(S) = \emptyset$ i $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in C : |\lambda| < 1\}$;

   $c)$ Dokazati da je $\sigma(S) = \sigma(S^*) = \{\lambda \in C : |\lambda| \leq 1\}$.

5. Neka je X kompleksan Banahov prostor i neka operatori $A, B \in B(X)$ komutiraju. Dokazati da ako $\sigma(A) = \{0\}$, onda $\sigma(AB) = \{0\}$.