Metode funkcionalne analize u ekonomiji

December 16, 2020

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Konveksni skupovi

Neka je X realan vektorski prostor, i neka je $K \subset X$. Skup K je *konveksan*, ako za svako $x, y \in K$ i svako $\lambda \in [0,1]$ važi $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

Neka je $A \subset X$. *Konveksna obvojnica* skupa A jeste skup

$$\mathrm{Co}(A) = \left\{ x \in X : n \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, (\forall j)(a_j \in A \,\mathrm{i}\, 0 \leq \lambda_j \leq 1), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dokazujemo važnu karakterizaciju konveksnih obvojnica.

Teorema 1.1.1. *Neka je X realan vektorski prostor i neka je $A \subset X$. Tada je $\mathrm{Co}(A)$ najmanji konveksan podskup od X koji sadrži A.*

Dokaz. Neka je $x, y \in \mathrm{Co}(A)$. Tada je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,\ (\forall j)(a_j \in A \text{ i } 0 \leq \lambda_j \leq 1),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

$$y = \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k,\ (\forall l)(b_l \in A \text{ i } 0 \leq \mu_l \leq 1),\ \sum_{k=1}^{m} \mu_k = 1.$$

Neka je $\alpha \in [0,1]$. Tada je

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i a_i + \sum_{k=1}^{m} (1-\alpha)\mu_k b_k,$$

pri čemu je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i + \sum_{k=1}^{m} (1-\alpha)\mu_k = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Prema konstrukciji skupa $\mathrm{Co}(A)$, sledi da je $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathrm{Co}(A)$, te je $\mathrm{Co}(A)$ konveksan skup.

Sada pretpostavimo da je K proizvoljan konveksan skup u X, tako da je $A \subset K$. Indukcijom po n dokazujemo da svaka linearna kombinacija $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ iz definicije skupa $\mathrm{Co}(A)$ mora pripadati skupu K.

Neka je $n = 2$. Tada $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ i $a_1, a_2 \in A \subset K$. Skup K je konveksan, i stoga je $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \in K$.

Sada pretpostavimo da ako je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,\ (\forall j)(a_j \in A \text{ i } 0 \le \lambda_j \le 1),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

onda $x \in K$. Neka je

$$y = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k b_k,\ (\forall j)(b_j \in A \text{ i } 0 \le \mu_j \le 1),\ \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k = 1.$$

Ako bi bilo $\mu_{n+1} = 1$, onda $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, te je trivijalno $y = b_{n+1} \in K$. Stoga pretpostavimo da je $0 \le \mu_{n+1} < 1$. Neka je $\alpha_k = \frac{\mu_k}{1-\mu_{n+1}}$, $k = 1, \ldots, n$. Tada je $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, odakle je i $0 \le \alpha_k \le 1$ za svako k. Prema induktivnoj pretpostavci, $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k b_k \in K$. Sada je

$$y = (1-\mu_{n+1})z + \mu_{n+1} b_{n+1} \in K.$$

Time smo dokazali da je $\mathrm{Co}(A) \subset K$, te je $\mathrm{Co}(A)$ najmanji konveksan skup koji sadrži A. $\square$

1.2 Konvergencija u topološkim prostorima

Neka je Λ neprazan skup u neka je $\leq$ binarna relacija na skupu Λ. Uređen par $(\Lambda, \leq)$ je *usmeren skup* (ili, jednostavnije, Λ je usmeren skup), ako važe sledeća svojstva:

(1) $(\forall \alpha \in \Lambda)\ \alpha \leq \alpha$;

(2) $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda)$ (ako je $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \gamma$, onda je $\alpha \leq \gamma$);

(3) $(\forall \alpha, \beta \in \Lambda)(\exists \gamma \in \Lambda)(\alpha < \gamma$ i $\beta < \gamma)$.

Neka je X neprazan skup, i neka je $(\Lambda, \leq)$ usmeren skup. Preslikavanje $x : \Lambda \to X$ je *mreža*. Ako je $\alpha \in \Lambda$, onda koristimo oznaku $x(\alpha) = x_\alpha$. Na taj način mreža x je označena kao $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, ili jednostavnije $(x_\alpha)_\alpha$. U ovom slučaju je Λ indeksni skup.

Mreža $(x_\alpha)_\alpha$ se naziva i uopšteni niz.

Neka je $\Omega \subset \Lambda$ i neka je $\alpha : \Lambda \to \Omega$ strogo rastuće preslikavanje, odnosno ako je $\beta_1 < \beta_2$, onda je $\alpha(\beta_1) < \alpha(\beta_2)$. Ako je $x : \Lambda \to X$ mreža u X, tada je $x \circ \alpha : \Lambda \to X$ podmreža od x. Ako uvedemo oznaku $\alpha(\beta) = \alpha_\beta$, onda je, pod prethodno opisanim uslovima, $(x_{\alpha_\beta})_\beta$ podmreža od $(x_\alpha)_\alpha$.

Neka su $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ i $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ dve mreže u skupu X. Usmereni skupovi Λ i Δ odfređuju usmeren skup $\Lambda \times \Delta$ na sledeći način:

$$(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_2, \beta_2) \text{ u } \Lambda\times\Delta \text{ ako i samo ako } \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ u } \Lambda \text{ i } \beta_1 \leq \beta_2 \text{ u } \Delta.$$

Neka je X neprazan skup, i neka je τ topologija na X. Elementi familije τ jesu otvoreni skupovi. Familija svih zatvorenih skupova jeste $\mathcal{F}$.

Neka je $x \in X$ i neka je $(x_\alpha)_\alpha$ mreža u X. Mreža $(x_\alpha)_\alpha$ konvergira ka x, ako za svaku okolinu U tačke x postoji $\alpha_x \in \Lambda$, tako da za svako $\alpha \geq \alpha_x$ važi $x_\alpha \in X$. Konvergencija mreža u topološkim prostorima poznata je pod nazivom konvergencija po Mur-Smitu.

Dokazujemo važnu karakterizaciju zatvorenja i zatvorenih skupova u topološkim prostorima.

Teorema 1.2.1. *Neka je A podskup topološkog prostora X, i neka je $x \in X$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $x \in \operatorname{cl} A$;

(2) *Postoji mreža $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u skupu A tako da je $\lim x_\alpha = x$.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Neka je $x \in \operatorname{cl} A$. Posmatrajmo skup svih otvorenih okolina tačke x, koji označavamo sa U_x, i postmatrajmo relaciju $\subset$. Ako je $V, W \in U_x$, tada je $V \cap W \in U_x$, $V \cap W \subset V, W$. Sledi da je $(U_x, \subset)$ usmeren skup. Iz činjenice $x \in \operatorname{cl} A$ proizilazi da za svako $V \in U_x$ postoji tačka $a_V \in V \cap A$. Konstruisali smo mrežu $(a_V)_{V \in U_x}$ u skupu A. Neka je sada W proizvoljna okolina tačke x. Tada je i $W \in U_x$. Za svako $V \in U_x$ sa svojstvom $V \subset W$ ispunjeno $a_V \in V$ odakle je i $a_V \in W$. Prema tome, $a_V \to x$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo da je $x_\alpha \in A$ za svako $\alpha \in \Lambda$, kao i $\lim x_\alpha = x$. Neka je U okolina tačke x. Tada postoji $\alpha_x \in \Lambda$ sa svojstvom da za svako $\alpha \geq \alpha_x$ važi $x_\alpha \in U$. Proizilazi da svaka okolina U tačke x ima neprazan presek sa A. Prema tome, $x \in \operatorname{cl}(A)$. □

Posledica 1.2.1. *Neka je A podskup topološkog prostora X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *A je zatvoren skup;*

(2) *Ako je $(x_\alpha)_\alpha$ mreža u A i $\lim x_\alpha = x$, tada $x \in A$.*

Proizilazi da je skup zatvoren, ako i samo ako sadrži sve granične vrednosti svih svojih konvergentnih mreža. Posebno je pitanje jedinstvenosti granične vrednosti, ukoliko ona postoji. Osnovna pretpostavka jeste da topološki prostor mora biti Hausdorfov.

Teorema 1.2.2. *Neka je X Hausdorfov prostor, i neka je $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža u X. Ako je $\lim x_\alpha = a$ i $\lim x_\alpha = b$, tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Tada postoje uzajamno disjunktne okoline ovih tačaka. Neka je U okolina tačke a, i V je okolina tačke b sa svojstvom $U \cap V = \emptyset$. Postoji $\beta \in \Lambda$ tako da za svako $\alpha \geq \beta$ važi $x_\alpha \in V$. Takođe, postoji $\gamma \in \Lambda$ tako da za svako $\alpha \geq \gamma$ važi $x_\alpha \in V$. Postoji $\delta \in \Lambda$ tako da je $\delta \geq \beta$ i $\delta \geq \gamma$. Ako je $\alpha \geq \delta$, tada je $x_\alpha \in U \cap V$, što je nemoguće zbog $U \cap V = \emptyset$. Prema tome, $a = b$. □

Razmotramo pitanje neprekidnosti funkcije između dva topološka prostora.

Teorema 1.2.3. *Neka su (X, τ_1) i (Y, τ_2) topološki prostori, $x \in X$, i neka je $f : X \to Y$ preslikavanje. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *Funkcija f je neprekidna u tački x;*

(2) *Za svaku mrežu $(x_\alpha)_\alpha$ u X važi implikacija: ako $\lim x_\alpha = x$, onda $\lim f(x_\alpha) = f(x)$.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Neka je f neprekidna u tački x, i neka je $\lim x_\alpha = x$. Pretpostavimo da je $V \in \tau_2$ okolina tačke $f(x)$. Na osnovu neprekidnosti funkcije f u x, sledi da postoji okolina $U \in \tau_1$ tačke x sa svojstvom $f(U) \subset V$. Iz $\lim x_\alpha = x$ sledi da postoji indeks α_U, tako da za svako $\alpha \geq \alpha_U$ važi $x_\alpha \in U$. Sledi da za svako $\alpha \geq \alpha_U$ važi $f(x_\alpha) \in V$. Prema tome, $\lim f(x_\alpha) = f(x)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo da važi svojstvo (2), a da pri tome f nije neprekidna u tački x. Tada postoji okolina $V \in \tau_2$ tačke $f(x)$, tako da $f^{-1}(V)$ nije okolina tačke x. Neka je U proizvoljna okolina tačke x. Postoji tačka $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$. Kao i ranije, familija U_x svih okolina tačke x jeste usmeren skup u odnosu na relaciju $\subset$. Stoga posmatramo mrežu $(x_U)_{U \in U_x}$ sa svojstvom $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$. Očigledno je $\lim x_U = x$, te je po pretpostsavci (2) ispunjeno $\lim f(x_U) = x$. Počev od nekog indeksa $U \in U_x$ važi $f(x_U) \in V$, te je $x \in U_x \cap V$. Poslednje tvrđenje je nemoguće, prema konstrukciji mreže $(x_U)_U$. $\square$

Na kraju, od interesa je ispitati prirodu konvergencije mreža u proizvodu topoloških prostora.

Teorema 1.2.4. *Neka su X i Y topološki prostori, i neka je $Z = X \times Y$ topološki prostor u odnosu na proizvod topologija. Neka je $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža u X, i neka je $(y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža u Y. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) *$x_\alpha \to x$ u X i $y_\alpha \to y$ u Y;*

(2) *$(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$ u $X \times Y$.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Pretpostavimo da je $\lim x_\alpha = x$ u X i $\lim y_\alpha = y$ u Y. Neka je V okolina tačke (x, y) u $X \times Y$. Tada okolina V sadrži neku baznu okolinu $U_1 \times U_2$, pri čemu je U_1 okolina tačke x u X, i U_2 je okolina tačke y u Y. Postoji indeks $\alpha_1 \in \Lambda$ tako da za svako $\alpha \geq \alpha_1$ važi $x_\alpha \in U_1$. Takođe, postoji indeks $\alpha_2 \in \Lambda$ tako da za svako $\alpha \geq \alpha_2$ važi $x_\alpha \in U_2$. Neka je $\alpha_3 \geq \alpha_1$ i $\alpha_3 \geq \alpha_2$. Za svako $\alpha \geq \alpha_3$ važi $x_\alpha \in U_1$ i $y_\alpha \in U_2$. Sledi da za svako $\alpha \geq \alpha_3$ važi $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_1 \times U_2 \subset V$. Time je dokazano $\lim(x_\alpha, y_\alpha) = (x, y)$ u $X \times Y$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Posmatrajmo preslikavanja $P : X \times Y \to X$ i $Q : X \times Y \to Y$, definisana kao

$$P(x, y) = x, \quad Q(x, y) = y, \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

Ako je U otvorena okolina tačke x u X, tada je $P^{-1}(U) = U \times Y$ otvorena bazna okolina tačke (x, y) u $X \times Y$. Time je dokazana neprekidnost preslikavanja P. Iz istih razloga je neprekidno i preslikavanje Q. Neka je $\lim(x_\alpha, y_\alpha) = (x, y)$ u $X \times Y$. Iz neprekidnosti preslikavanja P i Q sledi da je $\lim x_\alpha = x$ i $\lim y_\alpha = y$. □

Napomena 1.2.1. Bez bitnih izmena, preothodna teorema važi za proizvod proizvoljne familije topoloških prostora.

1.3 Strictly convex sets

Let X be a Hausdorf topologicas space and a real vector space, such that the operations on X are continuous. This means that the addition $+$ is continuous from $X \times X$ to X, and the scalar multiplication $\cdot$ is continuous from $\mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$. Then X is a togological vector space.

This setting allows the definition of a strictly convex set.

A set $E \subset X$ is strictly convex, provided that the following holds for every $x, y \in E$ and every $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(x \neq y,\ 0 < \lambda < 1) \implies \lambda x + (1 - \lambda) y \in \operatorname{int} E.$$

1.4 Teorema o konačnom preseku

Neka je (X, τ) topološki prostor, i neka je K podskup od X. Skup K je kompaktan, ako i samo ako se svako otvoreno pokrivanje skupa K može svesti na konačno pokrivanje. Topološki prostor X je kompaktan, ako je X kompaktan skup.

Dualno otvorenim pokrivanjima, mogu se razmatrati preseci zatvorenih skupova.

Definicija 1.4.1. Neka je $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ proizvoljna familija podskupova nekog skupa X. Familija $\mathcal{A}$ ima svojstvo konačnog preseka, ako svaki konačan niz skupova iz $\mathcal{A}$ ima neprazan presek.

Interesantno je iz pretpostavke o konačnom preseku zaključiti da familija $\mathcal{A}$ ima neprazan presek, odnosno da je $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Formulišemo i dokazujemo sledeći važan rezultat.

Teorema 1.4.1. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) *X je kompaktan prostor;*

(b) *Za svaku familiju $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ zatvorenih podskupova od X koja ima svojstvo konačnog preseka, važi da $\mathcal{A}$ ima svojstvo nepraznog preseka.*

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b): Pretpostavimo da je skup X kompaktan. Neka je $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ familija zatvorenih podskupova od K, koja ima svojstvo konačnog preseka. Neka je $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$. Svaki skup A_i^c je otvoren. Primetimo da važi

$$X = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Na osnovu kompaktnosti skupa X, prethodno otvoreno pokrivanje može biti svedeno na konačno pokrivanje. Stoga postoje $i_1, \ldots, i_n \in I$ tako da je

$$X = A_{i_1}^c \cup \cdots \cup A_{i_n}^c.$$

Razmatranjem komplemenata ovih skupova, dolazimo do zaključka da je

$$\emptyset = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}.$$

Poslednje tvrđenje je u kontradikciji sa pretpostavkom da familija $\mathcal{A}$ ima svojstvo konačnog preseka. Dakle, mora biti

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

(b) $\Longrightarrow$ (a): Neka važi svojstvo (2). Pretpostavimo da X nije kompaktan skup. Tada postoji familija otvorenih skupova $(G_i)_{i\in I}$, tako da je $X = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, ali ne postoji konačan skup J, $J \subset I$, tako da je $X = \bigcup\limits_{i\in J} G_i$. Posmatramo familiju $\mathcal{A} = (G_i^c)_{i\in I}$. $\mathcal{A}$ je familija zatvorenih skupova. Pretpostavimo da $\mathcal{A}$ nema svojstvo konačnog preseka. Sledi da postoji konačan skup $J \subset I$, tako da je

$$\emptyset = \bigcap_{i\in J} G_i^c.$$

Razmatranjem komplemenata ovih skupova, dolazimo do zaključka

$$X = \bigcup_{i \in J} G_i,$$

što je suprotno pretpostavci da se iz pokrivanja $(G_i)_{i \in I}$ ne može izdvojiti konačno pokrivanje skupa X. Dakle, familija $\mathcal{A}$ ima svojstvo konačnog preseka, a onda očigledno sledi da X mora biti kompaktans skup. $\square$

1.5 Teoreme o fiksnim tačkama

Neka X neprazan skup, i neka je dato preslikavanje $\psi : X \to X$. Elemenat $x \in X$ je fiksna tačka preslikavanja ψ, ako je $\psi(x) = x$.

Od interesa je posmatrati fiksne tačke višeznačnih preslikavanja. Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X. Preslikavanje $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ je koincidenca (višeznačno preslikavanje). Elemenat $x \in X$ je fiksna tačka koincidence φ, ako je $x \in \varphi(x)$.

Teorema 1.5.1. (Kakutani) *Neka je X neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Neka je $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ koincidenca, tako da za svako $x \in X$ skup $\varphi(x)$ je neprazan i konveksan. Ako je graf $G(\varphi)$ zatvoren u $X \times X$, tada postoji $x \in X$ tako da je $x \in \varphi(x)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X simpleks sa temenima $v^0, \dots, v^n$. Formirajmo k-tu simplicijalnu pdelu od X, i definišemo funkciju $\varphi^{(k)}$ na sledeći način.

Ako je $x \in\in \{v^0, v^1, \dots, v^n\}$, neka je $\varphi^{(k)}(x) = y \in \varphi(X)$;

Ako je x bilo koja druga tačka ćelije, neka je $\varphi^{(k)}(x)$ definisana interpolacijom vrednosti funkcije $\varphi^{(k)}$ u tememima simpleksa. Preciznije, ako je $x = \sum_{i=1}^{n} \theta_i v^i$, onda je $\varphi^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \varphi^{(k)}(v^j)$.

Ako je tačka x na duži koja spaja dve ćelije, onda je prethodna definicija funkcije $\varphi^{(k)}$ korektna. Dakle, $\varphi^{(k)}$ su dobro definisane funkcije.

Sve funkcije $\varphi^{(k)} : X \to X$ su neprekidne funkcije. Prema Brauderovoj teoremi o fiksnoj tački, svaka funkcija $\varphi^{(k)}$ ima fiksnu tačku $x^{(k)}$. $\square$

Glava 2

Risovi prostori

2.1 Osobine Risovih prostora

U matematičkim modelima ekonomije koriste se realni parcijalno uređeni vektorski prostori. Uređeni realni vektorski prostori, sa određenim dodatnim osobinama, jesu Risovi[1] prostori. Razmatramo samo realne vektorske prostore, te ovu činjenicu nećemo posebno naglašavati.

Skup nenegativnih realnih brojeva označen je sa $\mathbb{R}_+$.

Definicija 2.1.1. Neka je X vektorski prostor, i neka je $\leq$ parcijalno uređenje na X. Uređenje $\leq$ je kompatibilno sa algebarskom strukturom prostora X, ako važe sledeća svojstva:

(1) $(\forall x, y, z \in X)(x \leq y \implies x + z \leq y + z)$;

(2) $(\forall x, y \in X)(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+)(x \leq y \implies \lambda x \leq \lambda y)$.

Tada je $(X, \leq)$ uređen vektorski prostor.

Ako je $x, y \in X$ i $x \leq y$, onda je ravnopravna oznaka $y \geq x$. Ako je $x \leq y$ i $x \neq y$, onda je $x < y$, ili, ekvivalentno, $y > x$. Elemenat $x \in X$ je pozitivan, ako je $x \geq 0$. Skup svih pozitivnih elemenata u $(X, \leq)$ označen je sa X^+.

Ako je $x \geq 0$, onda je $x + (-x) \geq -x$, odnosno $0 \geq -x$. Slično, ako je $x \leq y$, onda je $-x \geq -y$.

Definicija 2.1.2. Neka je X vektorski prostor, i neka je $K \subset X$. Skup K je konveksan konus, ako važi:

[1]Frigyes Riesz (1880-1956), mađarski matematičar

(1) $K + K \subset K$;
(2) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+)(\lambda K \subset K)$;
(3) $K \cap (-K) = \{0\}$.

Jednostvano je dokazati sledeće rezultat.

Teorema 2.1.1. *Neka je $(X, \leq)$ uređen vektorski prostor, i neka je X^+ skup svih pozitivnih elemenata u X. Tada je X^+ konveksan konus.*

Dokaz. Ako je $x, y \in X^+$, onda jednostavno sledi $x + y \geq 0$. Takođe, ako je $\lambda \in \mathbb{R}_+$, onda je $\lambda x \in \mathbb{R}_+$. Konačno, ako je $x \in X^+ \cap (-X)$, onda je $x \geq 0$ i $x \leq 0$, odakle sledi $x = 0$. □

Sa druge strane, ukoliko u nekom vektorskom prostoru postoji konveksan konus, onda je u tom vektorskom prostoru moguće uvesti parcijalno uređenje na prirodan način.

Teorema 2.1.2. *Neka je K konveksan konus vektorskog prostora X. Definišemo relaciju $\leq$ na X na sledeći način:*

$$x \leq y \text{ ako i samo ako } y - x \in K.$$

Tada je $\leq$ parcijalno uređenje na X, a K je skup pozitivnih elemenata u odnosu na uređenje $\leq$.

Dokaz. Neka je $x \in X$. Tada je $x - x = 0 \in K \cap (-K)$, te je $x \leq x$. Ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x - y \in K \cap (-K)$, te je $x = y$. Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $y - x \in K$ i $z - y \in K$. Stoga je $z - x = (y - x) + (x - y) \in K$, te je $x \leq z$. Time smo dokazali da je $\leq$ parcijalno uređenje na X.

Neka je sada $x, y, z \in X$ i $x \leq y$. Tada je $y + z - (x + z) = y - x \in K$, te je $x + \leq y + z$. Ako je pri tome $\lambda \in \mathbb{R}_+$, onda zbog $y - x \in K$ sledi $\lambda(y - x) \in K$, te je $\lambda x \leq \lambda y$. Dokazali smo da je $(X, \leq)$ uređen vektorski prostor.

Na kraju, neka je X^+ skup pozitivnih elemenata u odnosu na relaciju $\leq$. Ako je $x \in X^+$, onda je $x \geq 0$, te je $x = x - 0 \in K$. Stoga je $X^+ \subset K$. Ako je $x \in K$, onda je još jednom $x - 0 \in K$, te je $x \geq 0$, odnosno $x \in X^+$. Time je dokazano $K \subset X^+$. □

Definicija 2.1.3. Neka je $(X, \leq)$ uređen vektorski prostor, i neka je $A \subset X$.

Elemenat $m \in X$ je gornja granica skupa A, ako za svako $a \in A$ važi $a \leq m$. Elemenat $u \in X$ je supremum skupa A, ako je u najmanja gornja granica skupa A, odnosno ako važi sledeće:

u je gornja granica skupa A, i ako je b gornja granica skupa A tada je $u \leq b$.

Elemenat $n \in X$ je donja granica skupa A, ako za svako $a \in A$ važi $n \leq a$. Elemenat $v \in X$ je infimum skupa A, kao je v najveća donja granica skupa A, odnosno ako važi:

v je donja granica skupa A, i ako je c donja granica skupa A onda je $c \leq v$.

Supremum skupa A, ukoliko postoji, označava se sa $\sup A$. Infimum skupa A, ukoliko postoji, označen je sa $\inf A$.

Ako je A proizvoljan skup uređenog vektorskog prostora $(X, \leq)$, onda ne moraju postojati donje ili gornje granice skupa A. U slučaju da postoje donje i gornje granice skupa A, ne sledi da obavezno postoje $\inf A$ ili $\sup A$.

Definicija 2.1.4. Neka je $(X, \leq)$ uređen vektorski prostor. Ako za svaki konačan podskup A skupa X postoji $\sup A \in X$, tada je X Risov prostor, ili vektorska rešetka.

Jednostavno je dokazati rezultat.

Teorema 2.1.3. *Neka je $(X, \leq)$ uređen vektorski prostor. X je Risov prostor, ako i samo ako za svaka dva elementa $x, y \in X$ postoji $\sup\{x, y\} \in X$.*

Dokazujemo teoremu o dualnosti postojanja supremuma i infimuma u uređenim vektorskim prostorima.

Teorema 2.1.4. *Neka je $(X, \leq)$ uređen vektorski prostor. X je Risov prostor, ako i samo ako za svako $x, y \in X$ postoji $\inf\{x, y\} \in X$.*

Dokaz. Neka je X Risov prostor, i neka je $x, y \in X$. Prema pretpostavci, postoji $\sup\{-x, -y\} = z \in X$. Neka je $w = -z$. Kako je $-x, -y \leq z$, sledi da je $x, y \geq -z = w$. Dakle, w je donja granica skupa $\{x, y\}$. Neka je u bilo koja donja granica skupa $\{x, y\}$. Tada je $u \leq x, y$, te je $-u \geq -x, -y$. Sledi da je $-u$ gornja granica skupa $\{-x, -y\}$. Sa druge strane, z je najmanja gornja granica skupa $\{-x, -y\}$, te je $z \leq -u$, onosno $u \leq w$. Dokazali smo da je w najveća donja granica skupa $\{x, y\}$, odnosno $w = \inf\{x, y\} \in X$.

Drugi deo dokaza sledi analogno. $\square$

Koriste se jednostavnije oznake za supremum i infimum skupova u Risovim prostorima. Neka je $x, y, x_1, \dots, x_n \in X$ i neka je $K \subset X$. Tada je

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad \bigvee_{i=1}^{n} x_i = \sup\{x_1, \dots, x_n\},$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \inf\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Ako postoji supremum skupa K u X, onda je

$$\sup K = \bigvee_{x \in K} x \ \in X.$$

Analogno, ako postoji infimum skupa K u X, onda je

$$\inf K = \bigwedge_{x \in K} x \ \in X.$$

U skladu sa novim oznakama, formulišemo jednostavan rezultat.

Teorema 2.1.5. *Ako je X Risov prostor, tada za svako $x, y \in X$ važi*

$$x \wedge y = -\Big((-x) \vee (-y)\Big) \quad \text{i} \quad x \vee y = -\Big((-x) \wedge (-y)\Big).$$

Definicija 2.1.5. Neka je X Risov prostor, i neka je $x \in X$. Tada:

(1) Pozitivan deo elementa x jeste $x^+ = x \vee 0$;
(2) Negativan deo elementa x jeste $x^- = (-x) \vee 0$;
(3) Apsolutna vrednost elementa x jeste $|x| = x \vee (-x)$.

Smatramo da su operacije $\wedge$ i $\vee$ višeg prioriteta od operacija $+$ i $-$ u Risovom prostoru. Dakle, $x+y\wedge z = x+(y\wedge z)$, $x-y\vee z = x-(y\vee z)$, za $x, y, z \in X$. Operacije $\wedge$ i $\vee$ su ravnopravne sa operacijom množenja vektora skalarom, te pišemo precizno $(\lambda x) \wedge y$ i $x \vee (\lambda y)$, za $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dokazujemo sledeći rezultat, koji sadrži više fundamentalnih identiteta u Risovim prostorima.

Teorema 2.1.6. (Fundamentalni identiteti) *Neka je X Risov prostor, i neka je $x, y, x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada:*

(1) $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$, $\quad x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$;
(2) $x - y \wedge z = (x - y) \vee (x - z)$, $\quad x - y \vee z = (x - y) \wedge (x - z)$;
(3) $x \vee y = (x - y)^+ + y = (y - x)^+ + x$;
(4) $\lambda(x \vee y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$, $\quad \lambda(x \wedge y) = (\lambda x) \wedge (\lambda y)$, *za svako* $\lambda \in \mathbb{R}_+$;
(5) $|\lambda x| = |\lambda||x|$;
(6) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$;
(7) $x + y = x \vee y + x \wedge y$;
(8) $x = x^+ - x^-$, $\quad x^+ \wedge x^- = 0$;
(9) $|x| = x^+ + x^-$;
(10) $|x| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$;
(11) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$;
(12) $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$;
(13) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$;
(14) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\Big||x + y| - |x - y|\Big|$.

Proof. (1) Neka je $t = y \vee z$. Tada je $y \leq t$ i $z \leq t$, te je $x + y \leq x + t$ i $x + y \leq x + t$. Sledi da je $x + t$ gornja granica za $x + y$ i $x + z$. Pretpostavimo da je s proizvoljna gornja granica za $x + y$ i $x + z$, odnosno neka je $x + y \leq s$ i $x + z \leq s$. Tada je $y \leq s - x$ i $z \leq s - x$. Tada je $t = y \vee z \leq s - x$, odnosno $x + t \leq s$. Dakle, $x + t$ je najmanja gornja granica za $x + y$ i $x + z$, odnosno $x + t = (x + y) \vee (x + z)$.

Drugi deo ovog tvrđenja dokazuje se analogno.

(2) Na isti način kao (1).

(3) Na osnovu definicije pozitivnog dela nekog elementa, kao i (1), sledi da važi

$$(x - y)^+ + y = (x - y) \vee 0 + y = (x - y + y) \vee (0 + y) = x \vee y.$$

Drugi deo tvrđenja sledi na isti način.

(4) Ako je $\lambda = 0$, onda je tvrđenje očigledno. Pretpostavimo da je $\lambda > 0$. Na osnovu $x \leq x \vee y$ i $y \leq x \vee y$, sledi da je $\lambda x \leq \lambda(x \vee y)$ i $\lambda y \leq \lambda(x \vee y)$. Dakle, $\lambda(x \vee y)$ je gornja granica za $\{\lambda x, \lambda y\}$, te je $(\lambda x) \vee (\lambda y) \leq \lambda(x \vee y)$. Sada neka je t gornja granica za $\{\lambda x, \lambda y\}$, odnosno $\lambda x \leq t$ i $\lambda y \leq t$. Tada je $x \leq \frac{1}{\lambda}t$ i $y \leq \frac{1}{\lambda}t$, odakle sledi $x \vee y \leq \frac{1}{\lambda}t$, kao i $\lambda(x \vee y) \leq t$. Proizilazi da je $\lambda(x \vee y)$ najmanja gornja granica za $\{\lambda x, \lambda y\}$, te je $(\lambda x) \vee (\lambda y) = (\lambda x) \vee (\lambda y)$.

Dokaz drugog dela ovog tvrđenja je analogan.

(5) Pretpostavimo da je $\lambda \geq 0$. Tada, po definiciji apsolutne vrednosti vektora, kao i prema (4), važi:

$$|\lambda x| = (\lambda x) \vee (-\lambda x) = \lambda(x \vee (-x)) = |\lambda||x|.$$

Neka je sada $\lambda < 0$. Tada je $-\lambda = |\lambda|$, i važi:

$$|\lambda x| = (\lambda x) \vee (-\lambda x) = -\lambda((-x) \vee x) = |\lambda||x|.$$

(6) Koristimo definiciju apsolutne vrednosti vektora, kao i tvrđenje (1) i (4):

$$\frac{1}{2}\Big(x+y+|x-y|\Big) = \frac{1}{2}\Big(x+y+(x-y)\vee(y-x)\Big) = \frac{1}{2}\Big((2x)\vee(2y)\Big) = x\vee y.$$

Slično, koristimo tvrđenja (2) i (4):

$$\frac{1}{2}\Big(x+y-|x-y|\Big) = \frac{1}{2}\Big(x+y-(x-y)\vee(y-x)\Big) = \frac{1}{2}\Big((2y)\wedge(2x)\Big) = x\wedge y.$$

(7) Ovo tvrđenje sledi sabiranjem jednakosti dobijenih u tvrđenju (6).

(8) Neka je $y = 0$ u (7), a zatim iskoristimo odnos supremuma i infimuma:

$$x = x \vee 0 + x \wedge 0 = x \vee 0 - \Big((-x) \vee 0\Big) = x^+ - x^-.$$

Takođe, na osnovu (1),

$$\begin{aligned} x^+ \wedge x^- &= (x^+ - x^- + x^-) \wedge x^- = (x^+ - x^-) \wedge 0 + x^- = x \wedge 0 + x^- \\ &= -((-x) \vee 0) + x^- = -x^- + x^- = 0. \end{aligned}$$

(9) Na osnovu definicije apsolutne vrednosti, kao i (1), (4) i (8), proizilazi da važi:

$$\begin{aligned} |x| = x \vee (-x) &= \Big((2x) \vee 0\Big) - x = 2(x \vee 0) - (x^+ - x^-) \\ &= 2x^+ - (x^+ - x^-) = x^+ + x^-. \end{aligned}$$

(10) Ako je $x = 0$, onda je $|x| = 0 \vee 0 = 0$. Ako je $|x| = 0$, onda je $x^+ + x^- = 0$. Kako je $x^+, x^- \in X^+$ i X^+ je konveksan konus, iz $x^+ = -x^-$ sledi $x^+ = x^- = 0$, te je i $x = x^+ - x^- = 0$.

(11) Koristeći (1), (7) i (4), proizilazi da važi:

$$\begin{aligned}|x-y| &= \Big((x-y)\vee(y-x)\Big)+x+y-(x+y)=(2x)\vee(2y)-(x\vee y+x\wedge y)\\ &= 2(x\vee y)-(x\vee y+x\wedge y)=(x\vee y)-(x\wedge y).\end{aligned}$$

(12) Na osnovu (1) i definicije apsolutne vrednosti, sledi:

$$\begin{aligned}|x+y|\vee|x-y| &= \Big((x+y)\vee(-x-y)\Big)\vee\Big((x-y)\vee(y-x)\Big)\\ &= \Big((x+y)\vee(x-y)\Big)\vee\Big((-x-y)\vee(y-x)\Big)\\ &= \Big(x+(y\vee(-y)\Big)\vee\Big(-x+((-y)\vee y)\Big)\\ &= (x+|y|)\vee(-x+|y|)=(x\vee(-x))+|y|\\ &= |x|+|y|.\end{aligned}$$

(13) Koristimo (1) i (4):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(|x+y|+|x-y|\Big) &= \frac{1}{2}\Big((x+y)\vee(-x-y)+|x-y|\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big((x+y+|x-y|)\vee(-x-y+|x-y|)\Big)\\ &\frac{1}{2}\Big((2(x\vee y))\vee 2((-x)\vee(-y))\Big)\\ &= x\vee y\vee(-x)\vee(-y)=|x|\vee|y|.\end{aligned}$$

(14) Koristimo redom tvrđenja: (11), (7), (12) i (7):

$$\begin{aligned}\Big||x+y|-|x-y|\Big| &= |x+y|\vee|x-y|-|x+y|\wedge|x-y|\\ &= |x+y|\vee|x-y|-\Big(|x+y|+|x-y|-|x+y|\vee|x-y|\Big)\\ &= 2\Big(|x+y|\vee|x-y|\Big)-\Big(|x+y|+|x-y|\Big)\\ &= 2\Big(|x|+|y|\Big)-2\Big(|x|\vee|y|\Big)=2(|x|\wedge|y|)\end{aligned}$$

□

Sledeći rezultat je jednostavno dokazati.

Teorema 2.1.7. *Neka je X Risov prostor, $A \subset X$ i $x \in X$. Ako postoji* $\sup A$*, onda postoji i* $\sup(x+A)$*, pri čemu važi jednakost:*

$$x + \sup A = \sup(x+A).$$

Ako postoji $\inf A$*, onda postoji i* $\inf(x+A)$*, pri čemu važi:*

$$x + \inf A = \inf(x+A).$$

Ako postoje $\sup A$ *i* $\inf A$*, onda važe sledeće formule:*

$$x - \sup A = \inf(x-A), \quad x - \inf A = \sup(x-A),$$

$$\lambda \cdot \sup A = \sup(\lambda A), \quad \lambda \cdot \inf A = \inf(\lambda A), \quad \text{ako je } \lambda \geq 0.$$

Koristeći dobijene rezultate, dokazujemo uzajamnu distributivnost supremuma i infimuma.

Teorema 2.1.8. *Neka je X Risov prostor, $A \subset X$ i $x \in X$.*

Ako postoji $\sup A$*, onda postoji i* $\sup\{x \wedge a : a \in A\}$*, pri čemu važi*

$$x \wedge \sup A = \sup\{x \wedge a : a \in A\}.$$

Ako postoji $\inf A$*, onda postoji i* $\inf\{x \vee a : a \in A\}$*, pri čemu važi*

$$x \vee \inf A = \inf\{x \vee a : a \in A\}.$$

Specijalno, ako je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, onda važe formule:

$$x \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i \right) = \bigvee_{i=1}^{n} (x \wedge a_i), \qquad x \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \right) = \bigwedge_{i=1}^{n} (x \vee a_i).$$

Dokaz. Neka je $x \in X$ i $s = \sup A$. Tada je za svako $a \in A$ ispunjeno $x \wedge a \leq x$, $x \wedge a \leq a \leq s$. Dakle, $x \wedge a \leq x \wedge s$ za svako $a \in A$, odnosno $x \wedge s$ je gornja granica skupa $\{x \wedge a : a \in A\}$. Neka je $t \in X$ proizvoljna gornja granica skupa $\{x \wedge a : a \in A\}$. Tada je $x \wedge a \leq t$ za svako $a \in A$. Iskoristimo dokazanu jednakost $x + a - x \vee a = x \wedge a$. Dakle, $x + a - x \vee a \leq t$ za svako $a \in A$. Sledi da je $a \leq t + x \vee a - x \leq t + x \vee s - x$ za svako $a \in A$. Sledi da je $t + x \vee s - x$ gornja granica skupa A, te je $s \leq t + x \vee s - x$. Još jednom iskoristimo formulu $x \wedge s = x + s - x \vee s$, odakle sledi $x \wedge s \leq t$. Proizilazi da je $x \wedge s$ najmanja gornja granica skupa $\{x \wedge a : a \in A\}$, odnosno $\sup\{x \wedge a : a \in A\} = x \wedge \sup A$.

Preostala tvrđenja dokazuju se analogno. □

Dokazujemo važnu Birkofovu[2] teoremu.

Teorema 2.1.9. (Birkofov identitet) *Neka je X Risov prostor, i neka je $x, y, z \in X$. Tada važi:*

$$|x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z| = |x - y|.$$

Dokaz. Koristimo redom sledeće nejednakosti iz Teoreme 2.1.6 (11), distributivnost, (7) i (11):

$$\begin{aligned}
&|x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z| \\
&\quad = \Big((x \vee z) \vee (y \vee z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z)\Big) \\
&\qquad + \Big((x \wedge z) \vee (y \wedge z) - (z \wedge z) \wedge (y \wedge z)\Big) \\
&\quad = \Big(z \vee (x \vee y) - z \vee (x \wedge y)\Big) + \Big(z \wedge (x \vee y) - z \wedge (x \wedge y)\Big) \\
&\quad = \Big(z \vee (x \vee y) + z \wedge (x \vee y)\Big) - \Big(z \vee (x \wedge y) + z \wedge (x \wedge y)\Big) \\
&\quad = (z + x \vee y) - (z + x \wedge y) \\
&\quad = x \vee y - x \wedge y = |x - y|.
\end{aligned}$$

□

Koristeći prethodne rezultate, u mogućnosti smo da formulišemo i dokažemo važne nejednakosti u Risovim prostorima.

Teorema 2.1.10. *Neka je X Risov prostor, i neka je $x, y, z, x_1, \ldots, x_n \in X$. Tada važi:*

(1) $x \leq y \implies (x^+ \leq y^+$ i $y^- \leq x^-)$*;*

(2) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (nejednakost trougla)*;*

(3) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ *i* $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$ (Birkofove nejednakosti)

[2]Garrett Birkhoff (1911–1996), američki matematičar

(4) $x, x_1, \ldots, x_n \in X^+ \implies x \wedge (x_1 + \cdots + x_n) \leq x \wedge x_1 + \cdots + x \wedge x_n$. *Ako za svako* $i \neq j$ *važi* $x \wedge x_i \wedge x_j = 0$, *onda prethodna nejednakost postaje jednakost.*

(5) $n(x_1^+ \wedge \cdots \wedge x_n^+) = n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)^+ \leq (x_1 + \cdots + x_n)^+$.

Dokaz. (1) Neka je $x \leq y$. Tada je $x \leq y \leq y \vee 0 = y^+$. Kako je i $0 \leq y^+$, sledi da je $x^+ = x \vee 0 \leq y^+$. Iz $-y \leq -x$ sledi, analogno, $y^+ \leq x^+$.

(2) Očigledno važi $x+y \leq |x|+|y|$, kao i $-(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$. Stoga je $|x+y| = (x+y) \vee (-(x+y)) \leq |x|+|y|$. Da bi dokazali drugu nejednakost, primetimo da važi $|x| = |(x+y)-y| \leq |x+y|+|y|$, odakle sledi $|x|-|y| \leq |x+y|$. Analogno, dokazuje se $|y|-|x| \leq |x+y|$, te je

$$\Big||x|-|y|\Big| = \Big(|x|-|y|\Big) \vee \Big(|y|-|x|\Big) \leq |x+y|.$$

(3) Neposredno slede iz Birkofovog identiteta.

(4) Neka je $x, x_1, x_2 \in X^+$. Jednostavnosti radi, neka je $y = x \wedge (x_1 + x_2)$. Tada je $y \leq x_1 + x_2$, odakle sledi $y - x_1 \leq x_2$. Takođe je $y - x_1 \leq y \leq x$, te je $y - x_1 \leq x \wedge x_2$. Sledi da je $y - x \wedge x_2 \leq x_1$. Koristeći nejednakost $y - x \wedge x_2 \leq y \leq x$, dobijamo $y - x \wedge x_2 \leq x \wedge x_1$ i $y \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2$.

Ako je $x \wedge x_1 \wedge x_2 = (x \wedge x_1) \wedge (x \wedge x_2) = 0$, onda na osnovu

$$\begin{aligned} x \wedge (x_1 + x_2) \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2 &= (x \wedge x_1) \vee (x \wedge x_2) + (x \wedge x_1 \wedge x_2) \\ &= (x \wedge x_1) \vee (x \wedge x_2) \\ &= x \wedge (x_1 \vee x_2) \leq x \wedge (x_1 + x_2), \end{aligned}$$

sledi da važi $x \wedge (x_1 \wedge x_2) = x \wedge x_1 + x \wedge x_2$. Primetimo da smo iskoristili činjenicu $x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2 + x_1 \wedge x_2 \geq x_1 \vee x_2$ ako je $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$. Opšti slučaj dokazuje se indukcijom po n.

(5) Na osnovu nejednakosti $n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \leq x_1 + \cdots + x_n$ sledi jednostavno $n(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \leq (x_1 + \cdots + x_n)^+$. Primetimo da važi

$$\begin{aligned} n(x_1^+ \wedge \cdots \wedge x_n^+) &= n\Big[(x_1 \vee 0) \wedge \cdots \wedge (x_n \vee 0)\Big] \\ &= n\Big[(x_1 \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \vee 0\Big] \\ &= n(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n)^+. \end{aligned}$$

Time je dokaz završen. □

2.2 Razdvojeni (ortogonalni) vektori

Pojmu ortogonalnosti vektora u Risovim prostorima odgovara razdvojenost vektora.

Definicija 2.2.1. Neka je X Risov prostor, i neka je $x, y \in X$. Vektori x i y su uzajmno *razdvojeni*, ili *ortogonalni*, u oznaci $x \perp y$, ako je $|x| \wedge |y| = 0$.

Ako je $A, B \subset X$, onda su A i B uzajamno razdvojeni, u oznaci $A \perp B$, ako za svako $a \in A$ i svako $b \in B$ važi $a \perp b$.

Vektor $x \in X$ je razdvojen u odnosu na $C \subset X$, u oznaci $x \perp C$, ako za svako $c \in C$ važi $x \perp c$.

Teorema 2.2.1. *Neka je X Risov prostor, $x, y, z \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $A \subset X$. Važe sledeća tvrđenja:*

(1) *Ako je $x \perp y$ i $x \perp z$, onda je $x \perp (\lambda y + \mu z)$;*

(2) *$x \perp y$ ako i samo ako $|x + y| = |x - y|$;*

(3) *Ako je $x \perp y$, onda*

$$|x + y| = |x - y| = |x| + |y| = \Big| |x| - |y| \Big| = |x| \vee |y|.$$

(4) *Ako se skup A sastoji od uzajamno razdvojenih ne-nula vektora, tada je skup A linearno nezavisan.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je $x \perp y$ i $x \perp z$. Tada je

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x| \wedge |\lambda y + \mu z| \leq |x| \wedge (|\lambda y| + |\mu z|) \\ &= |x| \wedge \Big(|\lambda||y| + |\mu||z| \Big) \leq |x| \wedge \Big(|\lambda||y| \Big) + |x| \wedge \Big(|\mu||z| \Big) \\ &\leq (1 + |\lambda|)|x| \wedge (1 + |\lambda|)|y| + (1 + |\mu|)|x| \wedge (1 + |\mu|)|z| \\ &= (1 + |\lambda|)\Big(|x| + |y| \Big) + (1 + |\mu|)\Big(|x| \wedge |z| \Big) \\ &= (1 + |\lambda|)0 + (1 + |\mu|)0 = 0. \end{aligned}$$

Stoga je $|x| \wedge |\lambda y + \mu z| = 0$, odnosno $x \perp (\lambda y + \mu z)$.

(2) Primetimo da smo ranije dokazali identitet $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2} \Big| |x + y| - |x - y| \Big|$ (Teorema 2.1.6 (14)). Na osnovu ovog identiteta odmah sledi $x \perp y \iff |x| \wedge |y| = 0 \iff |x + y| = |x - y|$.

(3) Pretpostavimo da je ispunjeno $x \perp y$. Tada je $|x+y| = |x-y|$. Primenimo isti zaključak na vektore $|x|$ i $|y|$:

$$\Big||x|-|y|\Big| = \Big||x|+|y|\Big| = |x|+|y| = |x| \vee |y| + |x| \wedge |y| = |x| \vee |y|.$$

Sada je

$$|x+y| = |x-y| = |x+y| \vee |x-y| = |x|+|y|.$$

(4) Pretpostavim da su $x_1, \dots, x_n \in A$ uzajamno razdvojeni vektori, i neka je $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ za neke skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Koristimo sada prethodnu činjenicu da za razdvojene vektore nejednakost trougla u stvari jeste jednakost, te je

$$0 = |\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n| = |\alpha_1 x_1| + \cdots + |\alpha_n x_n| = |\alpha_1||x_1| + \cdots + |\alpha_n||x_n|.$$

Odavde sledi da je $|\alpha_i||x_i| = 0$ za svako $i = 1, \dots, n$. Kako je $|x_i| > 0$ za svako i, sledi da je $\alpha_i = 0$ za svako i. Dakle, vektori $x_1, \dots, x_n$ su linearno nezavisni. $\square$

U istraživanjima u vezi Risovih prostora, fundamentalnu ulogu ima Risova osobina o dekompoziciji.

Teorema 2.2.2. (Risova teorema o dekompoziciji) *Neka je X Risov prostor, $x, y_1, \dots, y_n \in X$, tako da je*

$$|x| \le |y_1 + \cdots + y_n|.$$

Tada postoje elementi $x_1, \dots, x_n \in X$, tako da je $|x_i| \le |y_i|$ za svako i, kao i

$$x = x_1 + \cdots + x_n.$$

Osim toga, ako je x pozitivan vektor, onda se može podesiti da su i vektori $x_1, \dots, x_n$ takođe pozitivni.

Dokaz. Dokazaćemo tvrđenje za $n = 2$, a ostatak sledi indukcijom po n. Neka je, dakle, $x, y_1, y_2 \in X$ i $|x| \le |y_1 + y_2|$. Neka je $x_1 = \Big(x \vee (-|y_1|)\Big) \wedge |y_1|$. Na osnovu nejednakosti $-|y_1| \le x \vee (-|y_1|)$ i $-|y_1| \le |y_1|$ sledi da je $-|y_1| \le x_1$, odnosno $-x_1 \le |y_1|$. Sa druge strane, iz $x_1 \le |y_1|$ sledi $|x_1| = (-x_1) \vee x_1 \le |y_1|$. (Ako bi dodatno bilo

$x \geq 0$, onda bi važilo $x \vee (-|y_1|) = x$, te je $x \geq x_1 = x \wedge |y_1| \geq 0$.) Neka je $x_2 = x - x_1$. (Još jednom, ako je $x \geq 0$, onda je $0 \leq x_2 \leq x$). Tada je

$$x_2 = x - \Big(x \vee (-|y_1|)\Big) \wedge |y_1| = \Big(0 \wedge (x + |y_1|)\Big) \vee (x - |y_1|).$$

Kako je $|x| \leq |y_1| + |y_2|$, sledi da je $-|y_1| - |y_2| \leq x \leq |y_1| + |y_2|$. Stoga je

$$\begin{aligned} -|y_2| &= (-|y_2|) \wedge 0 \leq (x + |y_1|) \wedge 0 \leq x_2 = \Big(0 \wedge (x + |y_1|)\Big) \vee (x - |y_1|) \\ &\leq 0 \vee (x - |y_1|) \leq |y_2|. \end{aligned}$$

Odavde sledi $|x_2| \leq |y_2|$. $\square$

Neka je $(X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ proizvoljna familija Risovih prostora. Dekartov proizvod ovih prostora definisan je na uobičajen način:

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha,$$

pri čemu su algebarske operacije u X definisane koordinatno:

$$x + y = \prod_{\alpha \in \Lambda} (x_\alpha + y_\alpha), \quad \mu x = \prod_{\alpha \in \Lambda} \mu x_\alpha,$$

za $x = (x_\alpha)_\alpha \in X$, $y = (y_\alpha)_\alpha \in X$ i $\mu \in \mathbb{R}$.

Uređenje u X je takođe definisano koordinatno:

$$x = (x_\alpha)_\alpha \leq y = (y_\alpha)_\alpha \text{ ako i samo ako } x_\alpha \leq y_\alpha \text{ za svako } \alpha \in \Lambda.$$

Jednostavno je proveriti da $(X, \leq)$ jeste uređen vektorski prostor.

Takođe,

$$(x_\alpha)_\alpha \wedge (y_\alpha)_\alpha = (x_\alpha \wedge y_\alpha)_\alpha, \quad (x_\alpha)_\alpha \vee (y_\alpha)_\alpha = (x_\alpha \vee y_\alpha)_\alpha.$$

Nije teško proveriti da $(X, \leq)$ jeste Risov prostor.

2.3 Solidni podskupovi Risovih prostora

Definicija 2.3.1. Neka je X Risov prostor, i neka je $S \subset X$. Skup S je *solidan*, ako važi implikacija:

$$\Big(x \in X \text{ i } y \in S \text{ i } |x| \leq |y|\Big) \implies x \in S.$$

Skup S je *balansiran*, ako za svako $\lambda \in [0,1]$ i svako $x \in S$ važi $\lambda x \in S$.

Ako je S solidan skup u Risovom prostoru X, onda je S očigledno balansiran skup.

Na osnovu očigledne nejednakosti $|x| \leq |x|$, ako je S solidan skup, onda trivijalno važi ekvivalencija: $x \in S$ ako i samo ako $|x| \in S$.

Definicija 2.3.2. Neka je X Risov prostor i neka je $A \subset X$. Solidna obvojnica skupa A u X jeste skup

$$\mathrm{Sol}(A) = \{y \in X : (\exists x \in A)\ |y| \leq |x|\}.$$

Sledeće tvrđenje opisuje najmanji solidan skup koji sadrži proizvoljan podskup Risovog prostora.

Teorema 2.3.1. *Neka je X Risov prostor i neka je $A \subset X$. Tada je* $\mathrm{Sol}(A)$ *najmanji solidan skup koji sadrži skup A.*

Dokaz. $\mathrm{Sol}(A)$ je trivijalno solidan skup u X. Neka je S bilo koji solidan skup u X, za koji važi $A \subset S$. Neka je $y \in \mathrm{Sol}(A)$. Tada postoji $x \in A \subset S$, tako da je $|y| \leq |x|$. Skup S je solidan, te je $y \in S$. Dakle, $\mathrm{Sol}(A) \subset S$. □

Dokazujemo važan rezultat o konveksnoj obvojnici solidnog skupa.

Teorema 2.3.2. (Namioka[3]) *Neka je X Risov prostor, i neka je S solidan podskup od X. Tada je konveksna obvojnica od S, odnosno skup* $\mathrm{Co}(S)$ *takođe solidan u X.*

Dokaz. Neka je S solidan podskup od X, neka je $x \in \mathrm{Co}(S)$ i neka je $y \in X$ sa svojstvom $|y| \leq |x|$. Tada postoje vektori $x_1 \ldots, x_n \in S$

[3]Isaac Namioka (1928-), japansko-američki matematičar

i skalari $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in [0,1)$ sa svojstvom $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tako da je $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Bez gubljenja opštosti neka je $\lambda_i > 0$ za svako i. Kako je $|y| \leq |x| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right|$, na osnovu Risove dekompozicije (Teorema 2.2.2) sledi da postoje vektori $y_1, \ldots, y_n \in X$ tako da je $|y_i| \leq |\lambda_i x_i| = \lambda_i |x_i|$ za svako i, kao i $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Neka je $z_i = \frac{1}{\lambda_i} y_i$. Na osnovu $|z_i| \leq |x_i|$ za svako i, sledi da je $z_i \in S$ za svako i. Stoga je $y = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \in \mathrm{Co}(S)$, odnosno $\mathrm{Co}(S)$ solidan skup. $\square$

Razmotrićemo pojam uređajne konvergencije mreža u Risovim prostorima.

Neka je X Risov prostor, i neka je $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ rastuća mreža. Drugim rečima, ako je $\alpha, \beta \in \Lambda$ i $\alpha \leq \beta$, tada je $x_\alpha \leq x_\beta$. Pri tome vodimo računa da smo istim simbolom $\leq$ označili uređenje u indeksnom skupu Λ i u Risovom prostoru X. Mreža $(x_\alpha)_\alpha$ je opadajuća, ako iz $\alpha \leq \beta$ sledi $x_\alpha \geq x_\beta$.

Ako je $(x_\alpha)_\alpha$ rastuća mreža u Risovom prostoru, i ako postoji $x = \sup\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, onda je oznaka $x_\alpha \uparrow x$. Ako je $(x_\alpha)_\alpha$ opadajuća mreža u Risovom prostoru, i ako postoji $x = \inf\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, onda je oznaka $x_\alpha \downarrow x$.

Definišemo konvergenciju mreže u odnosu na uređenje (uređajnu konvergenciju) u Risovom prostoru.

Definicija 2.3.3. Neka je X Risov prostor, neka je $x \in X$ i neka je $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ mreža u X. Mreža $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ konvergira ka x u odnosu na uređenje (uređajno konvergira), u oznaci $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{o}} x$, ako postoji mreža $(y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, tako da je $y_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - a| \leq y_\alpha$ za svako $\alpha \in \Lambda$. U tom slučaju je x uređajna granica $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

Napominjemo da u prethodnoj definiciji zahtevamo isti usmeren skup Λ za mreže $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ i $(y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

Dokazujemo da je uređajna granica mreže jedinstveno određena.

Teorema 2.3.3. *Neka je X Risov prostor. Ako mreža $(x_\alpha)_\alpha$ uređajno konvergira, onda postoji tačno jedna uređajna granica ove mreže.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ i $x_\alpha \xrightarrow{o} y$. Tada postoje mreže (u_α) i (v_α) sa svojstvima: $u_\alpha \downarrow 0$ i $v_\alpha \downarrow 0$, kao i $|x_\alpha - x| \leq u_\alpha$ i $|x_\alpha - y| \leq v_\alpha$ za svako α. Tada za svako α važi

$$|x - y| \leq |x - x_\alpha| + |x_\alpha - y| \leq u_\alpha + v_\alpha.$$

Kako je $(u_\alpha + v_\alpha) \downarrow 0$, sledi da je $|x - y| = 0$, te je $x = y$. $\square$

Dokazujemo osnovna svojstva uređajne konvergencije u Risovim prostorima.

Teorema 2.3.4. *Neka je X Risov prostor, i neka za mreže $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ i $(y_\beta)_{\beta\in\Delta}$ važi $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ i $y_\beta \xrightarrow{o} y$. Važe sledeća tvrđenja:*
(1) $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$;
(2) $\lambda x_\alpha + \mu y_\beta \xrightarrow{o} \lambda x + \mu y$;
(3) $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$, $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$;
(4) $x_\alpha \vee y_\beta \xrightarrow{o} x \vee y$, $x_\alpha \wedge y_\beta \xrightarrow{o} x \wedge y$;

Napominjemo da u tvrđenjima (2) i (3) ove teoreme kao indeksni skup koristimo $\Lambda \times \Delta$. Podsetimo da ovaj skup jeste usmeren u odnosu na uređenje:

$$(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_2, \beta_2) \iff (\alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ i } \beta_1 \leq \beta_2).$$

Dokaz. Postoje mreže $(u_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ i $(v_\beta)_{\beta\in\Delta}$, tako da važi

$$|x_\alpha - x| \leq u_\alpha \downarrow 0 \ \text{ i } \ |y_\beta - y| \leq v_\beta \downarrow 0.$$

(1) Na osnovu nejednakosti trougla važi

$$\Big| |x_\alpha| - |x| \Big| \leq |x_\alpha - x| \leq u_\alpha \downarrow 0.$$

Prema tome, $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$.
(2) Važi

$$|\lambda x_\alpha + \mu y_\beta - \lambda x - \mu y| \leq |\lambda||x_\alpha - x| + |\mu||y_\beta - y| \leq |\lambda| u_\alpha + |\mu| v_\beta.$$

Nije teško proveriti $(|\lambda| u_\alpha + |\mu| v_\beta) \downarrow 0$, odakle sledi $(\lambda x_\alpha + \mu y_\beta) \xrightarrow{o} \lambda x + \mu y$.

(3) Iz $x = x^+ - x^-$ i $|x| = x^+ + x^-$ sledi

$$x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x) \text{ i } x^- = \frac{1}{2}(|x| - x).$$

Na osnovu dokazanih tvrđenja (1) i (2) sledi

$$x_\alpha^+ = \frac{1}{2}(|x_\alpha| + x_\alpha) \xrightarrow{\text{o}} \frac{1}{2}(|x| + x) = x^+.$$

Drugi deo ovog tvrđenja dokazuje se analogno.

(4) Podsetimo da su u Teoremi 2.1.6(6) dokazani sledeći identiteti:

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ i } x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Na osnovu dokazanih tvrđenja (1) i (2) sledi

$$x_\alpha \vee y_\beta = \frac{1}{2}(x_\alpha + y_\beta + |x_\alpha - y_\beta|) \xrightarrow{\text{o}} \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = x \vee y.$$

Drugo tvrđenje dokazuje se analogno. □

Teorema 2.3.5. *Neka je X Risov prostor, i neka je $(x_\alpha)_\alpha$ mreža u X. Tada važe tvrđenja:*

(1) *Ako $x_\alpha \uparrow 0$ ili $x_\alpha \downarrow 0$, onda $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} 0$;*

(2) *Ako $x_\alpha \uparrow x$ ili $x_\alpha \downarrow x$, onda $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$;*

(3) *Neka postoji $\alpha_1 \in \Lambda$ tako da je za svako $\alpha \geq \alpha_1$ ispunjeno $x_\alpha \leq z$. Ako je $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$, onda je $x \leq z$;*

(4) *Ako je $x_\alpha \uparrow$ i $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$, onda $x_\alpha \uparrow x$.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da je $x_\alpha \uparrow 0$, onda je trivijalno $|x_\alpha - 0| \leq -x_\alpha \downarrow 0$, odakle sledi $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} 0$. Drugi deo tvrđenja je analogan.

(2) Pretpostavimo da je $x_\alpha \uparrow x$. Neka je $y_\alpha = x_\alpha - x$. Tada je $y_\alpha \xrightarrow{\text{o}} 0$, odakle sledi $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$. Drugo tvrđenje sledi analogno.

(3) Pretpostavimo da je za svako $\alpha \geq \alpha_1$ ispunjeno $x_\alpha \leq z$, kao i $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$. Neka je $x > z$, i pri tome $\alpha \geq \alpha_1$. Tada je $x - z > 0$ i $z - x_\alpha \geq 0$. Stoga je $x - x_\alpha = x - z + x - x_\alpha \geq x - z$. Postoji mreža $(u_\alpha)_\alpha$ tako da je $|x - x_\alpha| = x - x_\alpha \leq u_\alpha \downarrow 0$. Tada sledi da je $(x - z) \leq u_\alpha \downarrow 0$, te je $x = z$. Sledi da nije moguće $x > z$, te mora biti $x \leq z$.

(4) Neka je $x_\alpha \uparrow$ i $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$. Pretpostavimo da je $x < x_{\alpha_1}$ za neko $\alpha_1 \in \Lambda$. Tada za svako $\alpha \geq \alpha_1$ važi $x_\alpha > x$. Prema (3), ne može biti $x\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$. Stoga je $x_\alpha \leq x$ za svako $\alpha \in \Lambda$. Dakle, x je gornja granica skupa $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Pretpostavimo da je z bilo koja druga granica skupa $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Tada je $x_\alpha \leq z$ za svako $\alpha \in \Lambda$. Prema (3), mora biti $x \leq z$, odnosno x je najmanja gornja granica skupa $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Dakle, $x_\alpha \uparrow x$. $\square$

Neka je X Risov prostor i neka je $M \subset X$. Skup M je uređajno zatvoren, ako M sadrži uređajne granice svih svojih uređajno konvergentih mreža. Drugim rečima, M je uređajno zatvoren, ako za svaku mrežu $(x_\alpha)_\alpha$ u M sa svojstvom $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$, važi $x \in M$.

Ako je $(\Lambda, \leq) \equiv (\mathbb{N}, \leq)$, odnosno usmereni skup je skup prirodnih brojeva sa prirodnim uređenjem, onda dobijamo slabiju vrstu uređajne konvergencije. Neka je $(x_n)_n$ niz u Risovom prostoru X. Niz $(x_n)_n$ uređajno konvergira ka $x \in X$, ako postoji niz $(y_n)_n$ tako da je $y_n \downarrow 0$ i $|x_n - x| \leq y_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Oznaka je $x_n \xrightarrow{\text{o}} x$.

Skup M je σ-zatvoren u X, ako M sadrži uređajne granice svih svojih uređajno konvergentnih nizova. Drugim rečima, M je σ-uređajno zatvoren, ako za svaki niz $(x_n)_n$ u M sa svojstvom $x_n \xrightarrow{\text{o}} x$, važi $x \in M$.

Skup $\mathbb{N}$ je specijalan usmeren skup. Stoga svaki uređajno zatvoren skup mora biti i uređajno σ-zatvoren. Obrnuto tvrđenje u opštem slučaju ne važi.

Jednostavno je opisati uređajnu zatvorenost solidnih skupova.

Teorema 2.3.6. *Neka je X Risov prostor, i neka je S solidan skup u X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *S je uređajno zatvoren;*

(2) *Za svaku mrežu $(x_\alpha)_\alpha$ u S, ako je $0 \leq x_\alpha \uparrow x$, onda $x \in S$.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Pretpostavimo da je S uređajno zatvoren. Ako je $x_\alpha \uparrow x$, onda je $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$, te je $x \in S$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo da važi svojstvo (2), i neka je $(x_\alpha)_\alpha$ proizvoljna mreža u S sa svojstvom $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$. Postoji mreža (y_α) sa svojstvima $y_\alpha \downarrow 0$ i $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ za svako α. Primetimo da je $0 \leq (|x| - y_\alpha)^+$. Iz $y_\alpha \downarrow 0$ sledi $(|x| - y_\alpha) \uparrow |x|$, te je i $(|x| - y_\alpha)^+ \uparrow |x|$.

Na osnovu $y_\alpha \downarrow 0$ sledi $y_\alpha \geq 0$, te je $|y_\alpha| = y_\alpha$. Sada je

$$|x| - |x_\alpha| \leq \Big| |x| - |x_\alpha| \Big| \leq |x - x_\alpha| \leq |y_\alpha|,$$

te je
$$|x| - y_\alpha = |x| - |y_\alpha| \le |x_\alpha|.$$
Sledi da je $(|x|-y_\alpha)^+ \le |x_\alpha|$. Kako je $x_\alpha \in S$, i skup S je solidan, sledi da je $(|x|-y_\alpha)^+ \in S$ za svako α. Na osnovu $(|x|-y_\alpha) \uparrow |x|$ i osobine (2) sledi da je $|x| \in S$. Još jednom, $x \le |x|$ i S je solidan skup, te je $x \in S$. Na taj način je dokazano da je S uređajno zatvoren skup. □

Analogno se dokazuje rezultat u vezi uređajne σ-zatvorenosti.

Teorema 2.3.7. *Neka je X Risov prostor, i neka je S solidan skup u X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
(1) *S je uređajno σ-zatvoren;*
(2) *Za svaki niz $(x_n)_n$ u S, ako je $0 \le x_n \uparrow x$, onda $x \in S$.*

2.4 Ideali, trake i Risovi potprostori

Razmatramo specijalne vektorske potprostore Risovih prostora.

Definicija 2.4.1. Neka je X Risov prostor, i neka je Y vektorski potprostor od X.

Ako je Y solidan, onda je Y *ideal* u X.

Ako je Y ideal u X, i ako je Y uređajno σ-zatvoren, onda je Y *σ-ideal* u X.

Ako je Y ideal u X, i ako je Y uređajno zatvoren, onda je Y *traka* u X.

Dokazujemo nekoliko jednostavnih tvrđenja.

Teorema 2.4.1. *Ako je X Risov prostor, i ako su M, N ideali u X, onda je $M + N$ ideal u X.*

Dokaz. M i N su vektorski potprostori od X, te je trivijalno $M + N$ vektorski potprostor od X. Neka je $x \in X$ i $y \in M + N$, tako da je $x \le |y|$. Tada je $y = u + v$, pri čemu je $u \in M$ i $v \in N$. Sledi da je $x \le |u+v|$. Na osnovu Risove teoreme o dekompoziciji, postoje vektori $u_1 \in M$ i $v_1 \in N$, tako da je $x = u_1 + v_1$, $|u_1| \le |u|$ i $|v_1| \le v$. Skupovi M i N su solidni, te je $u_1 \in M$ i $v_1 \in N$. Dakle, $x = u_1 + v_1 \in M + N$. Proizilazi da je $M + N$ solidan skup, te je $M + N$ ideal u X. □

Teorema 2.4.2. *Neka je M ideal u Risovom prostoru. Tada:*

(1) *M je traka, ako i samo ako: iz $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ i $x_\alpha \in M$ za svako $\alpha \in \Lambda$, sledi $x \in M$;*

(2) *M je σ-ideal, ako i samo ako: iz $0 \leq x_n \uparrow x$ i $x_n \in M$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi $x \in M$.*

Dokaz. (1) Neka je M ideal u X. Važi sledeći lanac ekvivalencija: M je traka, ako i samo ako M je uređajno zatvoren, ako i smo ako M sadrži supremume svih rastućih mreža u M.

(2) Analogno sa (1). $\square$

Neka je M podskup Risovog prostora X. Presek svih ideala u X koji sadrže skup M jeste:

$$\operatorname{Ideal}(M) = \bigcap_{\substack{Y \text{ je ideal u } X \\ M \subset Y}} Y.$$

Teorema 2.4.3. $\operatorname{Ideal}(M)$ *je najmanji ideal koji sadrži M.*

Dokaz. $\operatorname{Ideal}(M)$ je očigledno vektorski potprostor od X, jer je definisan kao presek vektorskih prostora. Takođe, $\operatorname{Ideal}(M)$ je solidan skup, jer je definisan kao presek solidnih skupova. Sledi da je $\operatorname{Ideal}(M)$ ideal u X. $\square$

$\operatorname{Ideal}(M)$ je ideal generisan skupom M.

Teorema 2.4.4. *Ako je $M \subset X$, onda je*

$$\operatorname{Ideal}(M) = \left\{ x \in X : (\exists x_1, \ldots, x_n \in M)(\exists \lambda \geq 0)\ |x| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i| \right\}.$$

Dokaz. Neka je

$$N = \left\{ x \in X : (\exists x_1, \ldots, x_n \in M)(\exists \lambda \geq 0)\ |x| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i| \right\}.$$

Očigledno je $M \subset N$ ($n = 1$, $x_1 = x \in M$).

Neka je $x, y \in N$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada postoje $x_1, \ldots, x_n \in M$ i $\lambda \geq 0$, tako da je $|x| \leq \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Takođe, postoje $y_1, \ldots, y_m \in M$ i $\mu \geq 0$, tako da je $|y| \leq \mu \sum\limits_{i=1}^{m} |y_i|$. Neka je $\gamma = \max\{\lambda|\alpha| + \mu|\beta|\}$. Tada je

$$|\alpha x + \beta y| \leq \gamma(|x_1| + \cdots + |x_n| + |y_1| + \cdots + |y_m|).$$

Time je dokazano da je $\alpha x + \beta y \in N$. Dakle, N je vektorski potprostor od X.

Neka je $z \in X$ sa svojstvnom $|z| \leq x$. Tada je trivijalno $|z| \leq \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, te je $z \in N$. Ovim je dokazano da je N solidan skup. Dokazali smo da je N ideal koji sadrži skup M, te je $\text{Ideal}(M) \subset N$.

U cilju dokazivanja obrnute inkluzije, pretpostavimo da je Y proizvoljan ideal u X sa svojstvom $M \subset Y$. Neka je $x \in N$. Kao u prethodnom delu, važi $|x| \leq \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, pri čemu je $x_1, \ldots, x_n \in M \subset Y$, $\lambda \geq 0$. Kako je Y vektorski prostor, sledi da je $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n \in Y$. Y je solidan skup, te je $x \in Y$. Dokazali smo da je $N \subset Y$. Proizilazi da je N sadržan u svakom idealu Y sa svojstvom $M \subset Y$. Stoga je $N \subset \text{Ideal}(M)$. $\square$

Ako je $x \in X$ i $M = \{x\}$, onda je $\text{Ideal}(\{x\}) \equiv \text{Ideal}(x)$ *glavni ideal* u X. Na osnovu prethodnih rezultata formulišemo posledicu:

Posledica 2.4.1. *Ako je $x \in X$, onda je*

$$\text{Ideal}(x) = \{y \in X : (\exists \lambda \geq 0)\ |y| \leq \lambda |x|\}.$$

Definicija 2.4.2. Elemenat $e \in X$ je *uređajna jedinica*, ili *stroga jedinica*, ako je $e > 0$ i $\text{Ideal}(e) = X$. Ekvivalento, $e > 0$ je uređajna jedinica u X, ako za svako $x \in X$ postoji $\lambda > 0$ tako da je $|x| \leq \lambda e$ (ili, takođe ekvivalentno, $x \leq \lambda e$).

Definicija 2.4.3. Neka je X Risov prostor, i neka je Y vektorski potprostor od X. Y je Risov potporostor, ako je Y Risov prostor sam za sebe. Ekvivalentno, Y je Risov potprostor od X ako i samo ako za svako $x, y \in Y$ važi $x \vee y \in Y$, pri čemu je $x \vee y$ uzet kao supremum u X.

Dokazujemo nekoliko jednostavnih tvrđenja.

Teorema 2.4.5. *Neka je Y vektorski potprostor Risovog prostora X. Y je Risov potprostor od X ako i samo ako za svako $x \in Y$ važi $x^+ \in Y$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Y Risov potprostor od X, i neka je $x \in Y$. Tada je $x^+ = x \vee 0 \in Y$.

Obrnuto, pretpostavimo da za svako $z \in Y$ važi $z^+ \in Y$. Neka je $x, y \in Y$. Tada je (Teorema 2.1.6 (3)) $x \vee y = (x - y)^+ + y$. Po pretpostavci, $(x - y)^+ \in Y$. Takođe, Y je vektorski prostor, te je $(x - y)^+ + y \in Y$. Time je dokazano $x \vee y \in Y$, odakle sledi da je Y Risov potprostor. $\square$

Teorema 2.4.6. *Ako je Y ideal u Risovom prostoru X, tada je Y Risov potprostor od X.*

Dokaz. Y je solidan skup, te podsećamo na ekvivalenciju $x \in Y$ ako i samo ako $|x| \in Y$. Ako je $x \in Y$, onda na osnovu $0 \leq x^+ \leq |x|$ sledi $x^+ \in Y$. Iz Teoreme 2.4.5 proizilazi da je Y Risov potprostor. $\square$

Obrnuto tvrđenje ne važi u opštem slučaju, što pokazuje sledeći primer.

Primer 2.4.1. Posmatrajmo Risov prostor $\mathbb{R}^2$, pri čemu je uređenje koordinatno definisano. Dakle, $(x, y) \leq (u, v)$ ako i samo ako $x \leq u$ i $y \leq v$. Neka je $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Tada je Y Risov potprostor od $\mathbb{R}^2$, ali nije ideal u $\mathbb{R}^2$.

Nije teško dokazati sledeći rezultat.

Teorema 2.4.7. *Neka je Y Risov potprostor Risovog prostora X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *Y je ideal u X;*

(2) $(\forall x, y \in X)\Big((0 \leq x \leq y \text{ i } y \in Y) \implies x \in Y\Big)$.

Definicija 2.4.4. Neka je X Risov prostor, i neka je Y Risov potprostor od X. Utapanje $Y \subset X$ *čuva proizvoljne supremume i infimume*, ako za svaki podskup $M \subset Y$ važi sledeće:

(1) Ako postoji $y = \sup M$ u Y, onda postoji i $x = \sup M$ u X, pri čemu je $x = y$;

(2) Ako postoji $y = \inf M$ u Y, onda postoji i $x = \inf M$ u X, pri čemu je $x = y$.

Analogno se definiše utapanje koje čuva supremume i infimume prebrojivih skupova.

Iz činjenice da je Y Risov potprostor sledi da utapanje $Y \subset X$ čuva konačne supremume i infimume. Stoga prethodna definicija ima netrivijalnu primenu samo ako je M beskonačan skup.

Definicija 2.4.5. Neka je Y Risov potprostor Risovog prostora X.

(1) Y je regularan, ako utapanje $Y \subset X$ čuva proizvoljne supremume i infimume;

(2) Y je σ-regularan, ako utapanje $Y \subset X$ čuva supremume i infimume prebrojivih skupova;

(3) Y je majorirajući, ako za svako $x \in X$ postoji $y \in Y$ tako da je $x \leq y$.

Dokaz sledećeg tvrđenja je ostavljen čitaocu za samostalan rad.

Teorema 2.4.8. *Neka je X Risov prostor, i neka je Y Risov potprostor od X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

(1) *Y je regularan Risov potprostor od X;*

(2) *Ako mreža $(x_\alpha)_\alpha$ u Y zadovoljava $x_\alpha \downarrow 0$ y Y, onda $x_\alpha \downarrow 0$ važi i u X;*

(3) *Ako mreža $(x_\alpha)_\alpha$ u Y zadovoljava $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ u Y, onda $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ u X.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Neka je $(x_\alpha)_\alpha$ mreža u Y koja zadovoljava $y_\alpha \downarrow 0$ u Y. Sledi da je $(x_\alpha)_\alpha$ opadajuća mreža u Y, samim tim i u X. Takođe, $0 = \inf\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ u Y. Kako je Y regularan sledi da je $0 = \inf\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ u X, te je $x_\alpha \downarrow 0$ u X.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Pretpostavimo da mreža $(x_\alpha)_\alpha$ u Y zadovoljava $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ u Y. Tada postoji mreža $(y_\alpha)_\alpha$ u Y, tako da je $|x - x_\alpha| \leq y_\alpha \downarrow 0$ u Y. Prema pretpostavci (2), sledi da je $y_\alpha \downarrow 0$ u X, te je $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ u X.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Neka je $M \subset Y$ i $x = \sup M$ u Y. Dokazaćemo da postoji mreža $(x_\alpha)_\alpha$ u Y sa svojstvom $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$ u Y.

Ako je $x \in M$, onda se trivijalno može uzeti $x_\alpha = x$, pri čemu je $\alpha = x \in Y$ i Y je indeksni skup.

Pretpostavimo da $x \notin M$. Neka je $x_1 \in M$. Tada je $x_1 < x$. Na osnovu osobina supremuma, postoji $x_2 \in M$ tako da je $x_1 < x_2 < x$. Ako takvo x_2 ne bi postojalo, onda bi bilo $x_1 = \sup M$, što je po pretpostavci nemoguće. Na ovaj način konstruišemo prebrojiv niz $(x_n)_n$ u Y sa očiglednim svojstvom $x_n \xrightarrow{\text{o}} x$ u Y. Prema pretpostavci (3), $x_n \xrightarrow{\text{o}} x$ u X. Sledi da je $x = \sup M$ u X. $\square$

Kao posledicu prethodne teoreme, formulišemo sledeći rezultat.

Posledica 2.4.2. *Neka je X Risov prostor. Ako je Y ideal u X, onda je Y regularan Risov potprostor od X.*

Razmatramo osobinu uređajne gustine.

Definicija 2.4.6. Neka je X Risov prostor, i neka je Y Risov potprostor od X. Tada:

(1) Y je uređajno gust u X, ako za svako $x \in X$ sa svojstvom $x > 0$ postoji $y \in Y$ tako da je $0 < y \leq x$;

(2) Y je super-uređajno gust u X, ako za svako $x \in X$ sa svojstvom $x > 0$ postoji niz $(y_n)_n$ u Y tako da $0 \leq y_n \uparrow x$ u X.

Napomena 2.4.1. Svaki super-uređajno gust potprostor je i uređajno gust.

Teorema 2.4.9. *Neka je X Risov prostor, i neka je Y Risov potprostor od X. Ako je Y uređajno gust u X, onda je Y regularan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Y uređajno gust u X. Neka je $(y_\alpha)_\alpha$ mreža, koja zadovoljava uslov $y_\alpha \downarrow 0$ u Y. Ako $y_\alpha \downarrow 0$ ne važi u X, onda postoji $x \in X$, $x > 0$, tako da je $0 < x \leq y_\alpha$ za svako α. Kako je Y uređajno gust u X, sledi da postoji $y \in Y$ sa svojstvom $0 < y \leq x$. Stoga za svako α važi $0 < y \leq y_\alpha$ u Y. Poslednje tvrđenje je u suprotnosti sa pretpostavkom $y_\alpha \downarrow 0$ u Y. Prema Teoremi 2.4.8 sledi da je Y regularan Risov potprostor. □

2.5 Razdvojeni komplementi

Podsetimo da je u unitarnom prostoru na osnovu skalarnog proizvoda definišemo ortogonalnost vekotra, a zatim i ortogonalne komplemente skupova. U Risovim prostorima umesto ortogonalnosti vektora razmatramo razdvojene vektore. Na taj način dolazimo dao pojma razdvojenih komplemenata.

Definicija 2.5.1. Neka je X Risov prostor i neka je $M \subset X$. Razdvojeni komplement skupa M u X jeste skup

$$M^{\mathrm{d}} = \{x \in X : (\forall y \in M) x \perp y\}.$$

Induktivno, $(M^{\mathrm{d}})^{\mathrm{d}} = M^{\mathrm{dd}}$.

Teorema 2.5.1. *Neka su M, N podskupovi Risovog prostora X. Tada važi:*
(1) *M^{d} je traka u X;*
(2) *$M \cap M^{\mathrm{d}} = \{0\}$, $M \subset M^{\mathrm{dd}}$;*
(3) *Ako je $M \subset N$, onda je $N^{\mathrm{d}} \subset M^{d}$.*

Dokaz. (1) Neka je $x, y \in M^{\mathrm{d}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i neka je $z \in M$ proizvoljan. Tada je $z \perp x$ i $z \perp y$, odakle sledi $z \perp (\alpha x + \beta y)$. Stoga je $\alpha x + \beta y \in M^{\mathrm{d}}$, odnosno M^{d} je vektorski potprostor od X.

Neka je $(x_\alpha)_\alpha$ mreža u M^{d} sa svojstvom $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{o}} x$. Za proizvoljno $z \in M$ važi $x_\alpha \perp z$, odnosno $|x_\alpha| \wedge |z| = 0$. N osnovu osobina uređajne konvergencije, sledi da je ispunjeno

$$|x_\alpha| \wedge |z| \xrightarrow{\mathrm{o}} |x| \wedge |z| = 0.$$

Proizilazi da je $x \in M^{\mathrm{d}}$, odnosno M je uređajno zatvoren.

Neka je $x \in M^{\mathrm{d}}$, $w \in X$ i $z \in M$, tako da je $|w| \leq |x|$. Tada je $0 \leq |w| \wedge |z| \leq |x| \wedge |z| = 0$. Sledi da je $w \in M^{\mathrm{d}}$, odnosno M^{d} je solidan skup.

Time smo dokazali da je M^{d} traka.

(2) Pretpostavimo da je $x \in M \cap M^{\mathrm{d}}$. Tada je $|x| = |x| \wedge |x| = 0$, odakle sledi $x = 0$. Dakle, $M \cap M^{\mathrm{d}} = \{0\}$.

Po definiciji skupova M^{d} i M^{dd} sledi $M \subset M^{\mathrm{dd}}$.

(3) Očigledno. □

Teorema 2.5.2. *Neka je X Risov prostor. Tada važi:*
(1) *Ako je Y ideal u X, tada je Y uređajno gust u Y^{dd}.*
(2) *Neka je Y ideal u X. Y je uređajno gust u X ako i samo ako je $Y^{\mathrm{d}} = \{0\}$.*

Dokaz. (1) Neka je Y ideal u X. Pretpostavimo da Y nije uređajno gust u Y^{dd}. Tada postoji neko $x \in Y^{\mathrm{dd}}$, $x > 0$, tako da ni za jedno $y \in Y$ ne važi $0 < y \leq x$. Neka je $z \in Y$ proizvoljno, odakle sledi i $|z| \in Y$. Tada je $0 \leq |z| \wedge x \leq |z|$. Kako je Y solidan skup, mora biti $|z| \wedge x \in Y$. Kako ne može biti $0 < |z| \wedge x \leq x$, mora biti $|z| \wedge x = 0$, odnosno $z \perp x$. Sledi da je $x \in Y^{\mathrm{d}}$. Dakle, $x \in Y^{\mathrm{d}} \cap Y^{\mathrm{dd}}$, te je $x = 0$.

(2) Ako je $Y^{\mathrm{d}} = \{0\}$, onda je $Y^{\mathrm{dd}} = X$, te je Y uređajno gust u X.

Sa druge strane, neka je Y uređajno gust u X. Ako postoji x sa svojstvom $0 < x \in Y^{\mathrm{d}}$, onda postoji neko $y \in Y$ tako da je $0 < y \leq x$. Y^d je solidan, te je $y \in Y \cap Y^{\mathrm{d}} = \{0\}$, što nije moguće. Sledi $Y^{\mathrm{d}} = \{0\}$. □

Ako su M, N potprostori u X, tako da je $M \cap N = \{0\}$, tada je $M + N = M \oplus N$. Ako su pri tom M i N ideali u Risovom prostoru X, podsećamo da je $M \oplus N$ takođe ideal u X.

Teorema 2.5.3. *Ako je Y ideal u Risovom prostoru X, tada je ideal $Y \oplus Y^{\mathrm{d}}$ uređajno gust u X.*

Dokaz. Neka je $x \in (Y \oplus Y^{\mathrm{d}})^{\mathrm{d}}$. Tada je $x \in Y^{\mathrm{d}} \cap Y^{\mathrm{dd}}$, te je $x = 0$. Prema Teoremi 2.5.2 sledi da je $Y \oplus Y^{\mathrm{d}}$ uređajno gust u X. □

Definicija 2.5.2. Risov prostor X je *arhimedski*, ako važi sledeći uslov

$$(\forall x, y \in X^+)(\forall n \in \mathbb{N})(n \cdot x \leq y \implies x = 0).$$

Primer 2.5.1. Neka je u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ uvedeno leksikografsko uređenje. Drugim rečima,

$$(x_1, y_1) \geq (x_2, y_2) \iff \Big(x_1 > x_2 \text{ ili } (x_1 = x_2 \text{ i } y_1 \geq y_2)\Big).$$

Prostor $\mathbb{R}^2$ sa ovim uređenjem označen je sa Lex. Prostor Lex je kompletno uređen Risov prostor. Konus pozitivnih elemenata je

$$\mathrm{Lex}^+ = \{(0, y) : y \geq 0\} \bigcup \{(x, y) : x > 0, y \in \mathbb{R}\}.$$

Neka je $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $n \cdot (0, y) = (0, ny) < (x, y)$, a ipak $(0, y) \neq (0, 0)$. Sledi da prostor Lex nije arhimedski.

Napomena 2.5.1. Neka je X arhimedski Risov prostor. Ako je Y Risov potprostor od X, onda je Y arhimedski prostor. Ako je Y arhimedski Risov prostor, onda je $X \times Y$ arhimedski Risov prostor.

Neka je X Risov prostor, $x \in X^+$, i neka je Y potprostor od X. Definišemo skup

$$Y_x = \{y \in Y : 0 \leq y \leq x\}.$$

Na osnovu $0 \in Y_x$ sledi da je Y_x neprazan.

Teorema 2.5.4. *Neka je X arhimedski Risov prostor, i neka je Y Risov potprostor od X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *Y je uređajno gust u X;*

(2) *Za svako $x \in X^+$ važi $x = \sup Y_x$;*

(3) *Za svako $x \in X^+$ postoji mreža $(y_\alpha)_\alpha$ u Y sa svojstvom $0 \leq y_\alpha \uparrow x$ u X.*

Dokaz. (2) $\Longleftrightarrow$ (3): Očigledno.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Pretpostavimo da važi tvrđenje (1), a da ne važi tvrđenje (2). Tada postoji $u \in X^+$, tako da ne važi $x = \sup Y_x$. Elemenat x je gornja granica skupa Y_x u skupu X, ali nije najmanja gornja granica skupa Y_x u skupu X. Stoga postoji manja granica skupa Y_x u skupu X. Neka je to elemenat $z \in X$. Tada je $z < x$. Dakle, ako je $y \in Y$ i $0 \leq y \leq x$, onda je $y \leq z$. Kako je $x - z > 0$, na osnovu uređajne gustine skupa Y u X sledi da postoji $w \in Y$ sa svojstvom $0 < w \leq x - z$. Kako je $x - z < x$, sledi da mora biti $0 < w < x$, te $w \in Y_x$, odakle sledi $w < z$. Proizilazi da je $2w < (x - z) + z = x$. Odavde sledi opet $2w \leq z$, te je $3w < x - z + z = x$ i $3w < z$. Indukcijom dolazimo do zakljuučka $n \cdot w < x$. Prostor X je arhimedski, te mora biti $w = 0$. Poslednji zaključak je u kontradikciji sa $0 < w \leq x - z$. Proizilazi da tvrđenje (2) važi.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Očigledno. □

Primer 2.5.2. Posmatrajmo ne-arhimedski Risov prostor Lex, i njegov potprostor $Y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Jednostavno je proveriti da je Y uređajno gust u Lex, i da je Y traka u Lex. Međutim, ne važi tvrđenje (2) prethodne teoreme. Neka je $z = (1, 0) > (0, 0)$. Tada je $Y_z = \{w \in Y : 0 \leq w \leq z\} = \{(0, y) : y > 0\} = \mathrm{Lex}^+$. Očigledno ne postoji $\sup \mathrm{Lex}^+$ u Lex.

U sledećoj teoremi povezujemo arhimedske Risove prostore i razdvojene komplemente traka u tim prostorima.

Teorema 2.5.5. *Neka je X Risov prostor. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *X je arhimedski prostor;*

(2) *Ako je $(\lambda_\alpha)_\alpha$ ograničena mreža u $\mathbb{R}$ sa svojstvom $\lambda_\alpha \xrightarrow{o} 0$ u $\mathbb{R}$, tada za svako $x \in X$ važi $\lambda_\alpha x \xrightarrow{o} 0$;*

(3) *Ako je* $(\lambda_n)_n$ *niz u* $\mathbb{R}$ *sa svojstvom* $\lambda_n \xrightarrow{\text{o}} 0$ *u* $\mathbb{R}$*, tada za svako* $x \in X$ *važi* $\lambda_n x \xrightarrow{\text{o}} 0$ *u* X*;*
(4) *Ako je* Y *traka u* X*, onda je* $Y = Y^{\mathrm{dd}}$*;*
(5) *Ako je* $\emptyset \neq M \subset X^+$ *i*

$$N = \{x \in X : (\forall y \in M)\ 0 \leq x \leq y\},$$

tada je $\inf\{y - x : y \in M, x \in N\} = 0$.

Dokaz.

□

2.6 Linearni operatori

Neka su X i Y Risovi prostori. Linearno preslikavanje $\pi : X \to Y$ je (linearan) operator. Posebno su važni operatori koji su na izvestan način saglasna sa uređenjima na prostorima. Svi operatori će biti linearni, te pridev "linearan" izostavljamo.

Definicija 2.6.1. Neka su X, Y Risovi prostori, i neka je $\pi : X \to Y$ operator. π je *Risov operator*, ako važi

$$(\forall x, y \in X)\ (x \wedge y = 0 \implies \pi(x) \wedge \pi(y) = 0).$$

Risov operator se naziva i *homomorfizam vektorskih rešetki.*

Dokazujemo važne ekvivalentne karakterizacije Risovih homomorfizama.

Teorema 2.6.1. *Neka su* X, Y *Risovi prostori, i neka je* $\pi : X \to Y$ *operator. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
(1) π *je Risov operator;*
(2) *Za svako* $x, y \in X$ *važi* $\pi(x \wedge y) = \pi(x) \wedge \pi(y)$*;*
(3) *Za svako* $x, y \in X$ *važi* $\pi(x \vee y) = \pi(x) \vee \pi(y)$*;*
(4) *Za svako* $x, y \in X$*, ako je* $x \wedge y = 0$ *onda je* $\pi(x \vee y) = \pi(x) \vee \pi(y)$*;*
(5) *Za svako* $x \in X^+$ *važi* $\pi(x)^+ = \pi(x^+)$*;*
(6) *Za svako* $x \in X$ *važi* $\pi(|x|) = |\pi(x)|$.

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Neka je $x, y \in X$ i $z = x \wedge y$. Tada je $0 = x \wedge y - z = (x - z) \wedge (y - z)$, te je prema (1) ispunjeno

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(x - z) \wedge (y - z)) = \pi(x - z) \wedge \pi(y - z) \\ &= (\pi(x) - \pi(z)) \wedge ((\pi(y) - \pi(z)) = \pi(x) \wedge \pi(y) - \pi(z). \end{aligned}$$

Odavde sledi $\pi(x) \wedge \pi(y) = \pi(z)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Neka je $x, y \in X$. Na osnovu formule $x+y = x \vee y + x \wedge y$, kao i na osnovu (2), sledi da je ispuneno

$$\pi(x \vee y) = \pi(x) + \pi(y) - \pi(x) \wedge \pi(y) = \pi(x) \vee \pi(y).$$

(3) $\Longrightarrow$ (4): Očigledno.

(4) $\Longrightarrow$ (5): Neka je $x \in X^+$. Tada je $x = x^+ = x \vee 0$. Kako je $x \wedge 0 = x^+ \wedge 0 = 0$, na osnovu (4) sledi da važi

$$\pi(x)^+ = \pi(x) \vee 0 = \pi(x \vee 0) = \pi(x^+).$$

(5) $\Longrightarrow$ (6): Na osnovu (5) važi

$$\pi(x^-) = \pi(x^+ - x) = \pi(x)^+ - \pi(x) = \pi(x)^-.$$

Stoga je

$$\pi(|x|) = \pi(x^+ + x^-) - \pi(x)^+ + \pi(x)^- = |\pi(x)|.$$

(6) $\Longrightarrow$ (1): Iskoristimo formulu $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$. Na osnovu (6) sledi:

$$\pi(x \wedge y) = \frac{1}{2}(\pi(x) + \pi(y) - |\pi(x) - \pi(y)|) = \pi(x) \wedge \pi(y).$$

□

Posledica 2.6.1. *Ako su X, Y Risovi prostori, i ako je $\pi : X \to Y$ Risov operator, tada je π pozitivan operator.*

Dokaz. Neka je π Risov homomorfizam, i neka je $x \in X^+$. Tada je $0 \leq \pi(x)^+ = \pi(x^+) = \pi(x)$. □

Skup svih Risovih operatora iz X u Y označen je sa $\mathcal{R}(X, Y)$. Ako je $\pi \in \mathcal{R}(X, Y)$, tada je $\ker(\pi) = \{x \in X : \pi(x) = 0\}$ jezgro operatora π.

Teorema 2.6.2. *Neka su X, Y Risovi prostori, i neka je $\pi \in \mathcal{R}(X, Y)$. Tada je* $\ker(\pi)$ *ideal u X.*

Dokaz. $\ker(\pi)$ je trivijalno potprostor od X. Na osnovu $\pi(|x|) = |\pi(x)|$ sledi da je $x \in \ker(\pi)$ ako i samo ako je $|x| \in \ker(\pi)$. Neka je stoga $x \in \ker(\pi)$ i $z \in X$ sa svojstvom $|z| \leq |x|$. Tada je, zbog pozitivnosti operatora π, ispunjeno $0 \leq \pi(|z|) \leq \pi(|x|) = 0$. Sledi $z \in \ker(\pi)$, te je $\ker(\pi)$ solidan skup, te je $\ker(\pi)$ ideal u X. □

Definicija 2.6.2. Neka su X, Y Risovi prostori i neka je $\pi \in \mathcal{R}(X, Y)$. π je normalan Risov operator, ako za svaku mrežu $(x_\alpha)_\alpha$ u X važi implikacija:

$$x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x \text{ u } X \implies \pi(x_\alpha) \xrightarrow{\text{o}} \pi(x) \text{ u } Y.$$

Skup svih normalnih Risovih operatora iz X u Y označen je sa $\mathcal{R}_N(X, Y)$.

Teorema 2.6.3. *Neka su X, Y Risovi prostori, i neka je $\pi \in \mathcal{R}(X, Y)$ preslikavanje "na". Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(1) *π je normalan;*
(2) $\ker(\pi)$ *je traka u X.*

Dokaz. (1) $\implies$ (2): Na osnovu prethodne teoreme, znamo da je $\ker(\pi)$ ideal u X. Neka je $(x_\alpha)_\alpha$ proizvoljna mreža u $\ker(\pi)$ sa svojstvom $0 \leq x_\alpha \uparrow x$. Potrebno je dokazati $x \in \ker(\pi)$. Kako je π normalan, i $x_\alpha \xrightarrow{\text{o}} x$, sledi da je $0 \leq \pi(x_\alpha) \uparrow \pi(x)$. Kako je $\pi(x_\alpha) = 0$ za svako α, mora biti $\pi(x) = 0$. Dakle, $x \in \ker(\pi)$.

(2) $\implies$ (1): Pretpostavimo da je $\ker(\pi)$ traka u X. Da bi dokazali da je π normalan Risov operator, dovoljno je razmatrati familije koje opadaju ka 0 u X. Neka je, dakle, $(x_\alpha)_\alpha$ familija u X sa svojstvom $x_\alpha \downarrow 0$. Pretpostavimo da postoji neko $y \in Y$ sa svojstvom $0 \leq y \leq \pi(x_\alpha)$ za svako α. Preslikavanje π je "na", te postoji $x \in X$ tako da je $\pi(z) = y$. Neka je $w_\alpha = (z^+ - x_\alpha)^+$. Iz $x_\alpha \downarrow 0$ sledi $z^+ - x_\alpha \uparrow z^+$, te je i $w_\alpha \uparrow z^+$. Takođe je

$$\pi(w_\alpha) = (\pi(z)^+ - \pi(x_\alpha))^+ = (y - \pi(x_\alpha)^+ = 0.$$

Sledi $w_\alpha \in \ker(\pi)$ za svako α. Iz činjenice da je $\ker(\pi)$ traka, kao i $w_\alpha \uparrow z^+$, sledi da je $z^+ \in \ker(\pi)$. Na kraju, $y = \pi(z) = (\pi(z))^+ = \pi(z^+) = 0$, te je $y \in \ker(\pi)$. Time je dokazano da je π normalan Risov operator. □

Teorema 2.6.4. *Neka su X, Y Risovi prostori, i neka je $\pi \in \mathcal{R}(X,Y)$ preslikavanje "na". Ako je S solidan skup u X, tada je $\pi(S)$ solidan skup u Y.*

Dokaz. Neka je S solidan skup u X, i neka $x, y \in Y$ zadovoljavaju uslove $x \in \pi(S)$ i $|y| \leq |x|$. Tada postoje $v \in S$ i $u \in X$ tako da je $\pi(v) = x$ i $\pi(u) = y$. Neka je $w = [(-|v| \vee u] \wedge |v|$. Očigledno važi $|w| \leq |v|$ u X. Skup S je solidan i $v \in S$, te je $w \in S$. Takođe važi

$$\pi(w) = [(-|\pi(v)|) \vee \pi(u)] \wedge |\pi(v)| = \pi(u).$$

Stoga je $\pi(u) = y \in \pi(S)$. Time smo dokazali da je $\pi(S)$ solidan skup. □

Neka je X Risov prostor, i neka je Y potprostor od X. Tada je X/Y količnicki vektorski prostor, čije elemente označavamo sa $[x]_Y \equiv [x]$, pri čemu je $x \in X$. Ako je $[x], [y] \in X/Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pri čemu je $x, y \in X$, tada su operacije u X/Y definisane kao

$$\alpha[x] = [\alpha x], \quad [x] + [y] = [x + y].$$

Na taj način X/Y je vektorski prostor. Prirodno preslikavanje $Q : X \to X/Y$, definisano kao $Q(x) = [x]$, jeste operator "na".

Teorema 2.6.5. *Neka je X Risov prostor, neka je M ideal u X, i neka je $Q : X \to X/M$ odgovarajući kanonski operator. Tada je $Q(X^+)$ konus u X/M.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $[x], [y], [z] \in Q(X^+)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, pri čemu je $x, y, z \in X^+$. Jednostavno sledi $[x] + [y] = [x + y] = Q(x + y) \in Q(X^+)$. Takođe, $\alpha x \in X^+$, te iakle sledi da je $\alpha[x] = [\alpha x] = Q(\alpha x) \in Q(X^+)$. Ako je $[y] \in Q(X^+) \cap (-Q(X^+))$, tada je $[y] = Q(u) = Q(v)$, $u \in X^+$ i $v \in -X^+$. Sledi $0 = Q(u - v)$ i $u - v \in M$. Na osnovu $u, -v \in X^+$ sledi $0 \leq -v \leq u - v \in M$. Kako je M ideal, sledi da je M solidan skup, te je $-v \in M$. Iz $u - v \in M$ sada sledi $u \in M$. Dakle, $[u] = [v] = 0$ u X/M. Time smo dokazali da je $Q(X^+)$ konus u X/M. □

Ako je X Risov prostor i M traka u X, onda nadalje uvek smatramo da je X/M uređen vektorski prostor, pri čemu je uređenje definisano u odnosu na konus $Q(X^+)$:

$$[x] \leq [y] \text{ u } X/M \iff [y] - [x] \in Q(X^+)$$
$$\iff (\exists x_1, y_1 \in X)\ ([x] = [x_1],\ [y] = [y_1],\ x \leq y \text{ u } X).$$

Teorema 2.6.6. *Ako je X Risov prostor i ako je M ideal u X, tada je X/M Risov prostor. Osim toga, kanonski operator $Q : X \to X/M$ je Risov operator "na".*

Dokaz. U cilju dokazivanja da je X/M Risov prostor, dovoljno je dokazati da za svako $[x] \in X/M$ postoji $[x]^+ \in X/M$. Neka je $x \in X$. Tada je $x \le x^+$ i $0 \le x^+$. Na osnovu prethodne teoreme sledi $[x] \le [x^+]$ i $0 \le [x^+]$ u X/M. Ako je sada $y \in X$ proizvoljan sa svojstvom $[x] \le [y]$ i $0 \le [y]$ u X/M, tada postoje $x_1 \in [x]$ i $y_1, y_2 \in [y]$ sa svojstvima $x_1 \le y_1$ i $0 \le y_2$.

Primetimo da je $(y_1 - y_2)^+ = (y_1 - y_2) \vee 0 = (y_1 - y_2) \vee 0 + y_2 - y_2 = y_1 \vee y_2 - y_2$, te je $y_1 \vee y_2 = y_2 + (y_1 - y_2)^+$. Sada je

$$x = x_1 + (x - x_1) \le y_1 \vee y_2 + (x - x_1)^+ = y_2 + (y_1 - y_2)^+ + (x - x_1)^+.$$

Zbog $[x] = [x_1]$ i $[y_1] = [y_2] = [y]$ sledi da je $y_1 - y_2 \in M$ i $x - x_1 \in M$. M je ideal, te je $(y_1 - y_2)^+ \in M$ i $(x - x_1)^+ \in M$. Prema tome,

$$x \in y_2 + M.$$

Takođe je

$$y_2 + (y_1 - y_2)^+ + (x - x_1)^+ \ge 0.$$

Sledi da je

$$x^+ \le y_2 + (y_1 - y_2)^+ + (x - x_1)^+,$$

te je i

$$[x^+] \le [y_2 + (y_1 - y_2)^+ + (x - x_1)^+] = [y_2] = [y].$$

Prema tome, $[x^+]$ je najmanji pozitivan vektor u X/M za koji važi implikacija:

$$[x] \le [y] \text{ i } 0 \le [y] \implies [x^+] \le [y].$$

Sledi da je $[x^+] = [x]^+$.

Iz činjenice da za proizvoljno $[x] \in X/M$ sledi da postoji $[x]^+ u X/M$, sledi da je X/M Risov prostor. Na osnovu $Q(x^+) = [x^+] = [x]^+ = Q(x)^+$ sledi da je Q Risov operator.

Očigledno, Q je preslikavanje "na". □

Na osnovu prethodnih rezultata formulišemo sledeću posleducu.

Posledica 2.6.2. *Neka je X Risov prostor, M je ideal u X, i neka je $Q : X \to X/M$ kanonski operator. Operator Q je normalan, ako i samo ako M je traka u X.*

2.7 Projekcione osobine

Neka je X Risov prostor, i neka je B traka u X. Tada je B uređajno zatvoren ideal u X. Ako je D podskup od X, tada je

$$\mathrm{Band}(D) = \bigcap_{\substack{B \text{ je traka u } X \\ D \subset B}} B$$

traka u X generisana skupom D. Sledi da je $\mathrm{Band}(D)$ najmanja traka u X koja sadrži D. Ako je $D = \{x\}$, tada je $\mathrm{Band}(x)$ principijelni ideal u X.

Teorema 2.7.1. *Neka je X Risov prostor i $D \subset X$. Tada je*

$$\mathrm{Band}(D) = \{x \in X : (\exists (x_\alpha)_\alpha \text{ u } X \text{ tako da je } 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}.$$

Posledica 2.7.1. *Neka je X Risov prostor i $x \in X$. Tada je*

$$\mathrm{Band}(x) = \{y \in X : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}.$$

Traka B u Risovom prostoru X je *projekciona traka*, ako je $B \oplus B^{\mathrm{d}} = X$. Neka je P_B projekcija na X indukovana projekcionom trakom B. Drugim rečima, ako je $x = x_1 + x_2$, pri čemu je $x_1 \in B$ i $x_2 \in B^{\mathrm{d}}$, tada je $P_B(x) = x_1$. Očigledno je $P_B^2 = P_B$. Projekcija P_B je *trakasta projekcija*, ili *uređajna projekcija*.

Teorema 2.7.2. *Ako je B projekciona traka u Risovom prostoru X, tada je P_B normalan Risov operator.*

Dokaz. Neka je $B \oplus B^D = X$, $x = x_1 + x_2 \in X$ tako da je $x_1 \in B$ i $x_2 \in B^{\mathrm{d}}$. Tada je $|x_1| \wedge |x_2| = 0$. Znamo da je $0 = |x_1| \wedge |x_2| = \frac{1}{2}\Big||x_1 + x_2| - |x_1 - x_2|\Big|$, odakle sledi $|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$. Takođe je $|x_1 + x_2| \vee |x_1 - x_2| = |x_1| + |x_2|$. Na osnovu navedenog sledi da je

$$|x| = |x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2|.$$

Takođe je $|x_1| \in B$ i $|x_2| \in B^{\mathrm{d}}$. Sledi da je $P_B(|x|) = |P_B(x)|$, odakle proizilazi da je P_B Risov operator. Specijalno, P_B je pozitivan operator. Štaviše, ako je $y \in X^+$, sada je očigledno $0 \leq P_B(y) \leq y$. Iz ove implikacije odmah sledi da je P_B normalan operator. $\square$

Elemenat $x \in X$ je *projekcioni elemenat*, ako je $\mathrm{Band}(x)$ projekciona traka. U tom slučaju je odgovarajuća trakasta projekcija $P_{\mathrm{Band}(x)} \equiv P_x$.

Neka je X Risov prostor, $e \in X$ i $e > 0$. Elemenat e je *slava uređajna jedinica* u X, ako je $\mathrm{Band}(e) = X$.

Teorema 2.7.3. *Neka je X arhimedski Risov prostor, $e \in X$ i $e > 0$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *e je slaba uređajna jedinica;*

(2) *Ako je $x \in X$ i $x \perp e$, tada je $x = 0$.*

Glava 3

Arou-Debroov model

3.1 Preference i funkcije korisnosti

U ovoj sekciji uvodimo matematički model tržišne ekonomije. Podrazumevamo situaciju da *potrošač* ili neko ko u njegovo ime odlučuje (u opštem slučaju, *agent*), mora načiniti izbor po nekom kriterijumu. Skup svih alternativa koje su na raspolaganju potrošaču, naziva se *skup izbora*, ili *skup mogućnosti*. Ovaj skup označavamo sa X, Y i slično. Kriterijum po kome potrošač vrši izbor, jeste *preferenca*. Preferenca jeste kompletno pre-uređenje na skupu svih izbora.

Ovakav pristup formalizovan je sledećom definicijom.

Definicija 3.1.1. Preferenca $\succeq$ na nepraznom skupu X jeste binarna relacija, koja je refleksivna, tranzitivna i kompletna. Drugim rečima:
(1) $(\forall x \in X)\ x \succeq x$;
(2) $(\forall x, y, z \in X)\ x \succeq y$ i $y \succeq z \implies x \succeq z$;
(3) $(\forall x, y \in X)\ x \succeq y$ ili $y \succeq x$.

Napomena 3.1.1. Preferenca iz prethodne definicije naziva se *racionalna preferenca*.

Terminologija je sledeća za $x, y \in X$:

$x \succeq y$: x je bolje (preferiranije) od y, x nije lošije od y, ili y nije bolje od x; ekvivalentno, $y \preceq x$;

$x \succeq y$ i $y \succeq x$: x i y su uzajamno indiferentni, u oznaci $x \sim y$;

$x \succ y$: $x \succeq y$ i nije $y \succeq x$; x je strogo bolje (preferiranije) od y; ekvivalentno, $y \prec x$.

Za $x \in X$ definišemo sledeće skupove:

$$B_s(x) = \{y \in X : y \succ x\}, \qquad B_l(x) = \{y \in X : y \succeq x\},$$
$$W_s(x) = \{y \in X : x \succ y\}, \qquad W_l(x) = \{y \in X : x \succeq y\}.$$

U skupu $B_s(x)$ su svi elementi koji su strogo bolji od x, u skupu $B_l(x)$ su svi elementi koji su bolji (nisu lošiji) od x, u skupu $W_s(x)$ su svi elementi koji su strogo lošiji od x, i u skupu $W_l(x)$ su svi elementi koji su lošiji (nisu bolji) od x.

Iz definicije preference proizilazi naredni rezultat.

Teorema 3.1.1. *Neka je $\succeq$ preferenca na X. Tada za svako $x \in X$ važi*

$$(B_s(x))^c = W_l(x), \qquad (W_s(x))^c = B_l(x).$$

Dokaz. Neka je $x \in X$. Pretpostavimo da je $y \in B_s(x) \cap W_l(x)$. Tada je $y \succ x$ i $y \preceq x$. Međutim, $y \succ x$ implicira $y \succeq x$ i nije $y \preceq x$. Prema tome, $B_s(x) \cap W_l(x) = \emptyset$.

Neka je $y \in X$ proizvoljan elemenat. Zbog kompletnosti relacije $\succeq$ sledi da je $y \succeq x$ ili $y \preceq x$. Ako je $y \preceq x$, onda je $y \in W_l(x)$. Pretpostavimo da nije $y \preceq x$. Tada mora biti $y \succeq x$, te je onda $y \succ x$. Sledi $y \in B_s(x)$. Time smo dokazali $X = B_s(x) \cup W_l(x)$. Konačno proizilazi $(B_s(x))^c = W_l(x)$. Rezultat $(W_s(x))^c = B_l(x)$ dokazuje se analogno. □

Dublje razmatranje pojava u ekonomiji zahteva da skup X ima određenu topološku i vektorsku sturkturu.

Definicija 3.1.2. Neka je $\succeq$ preferenca na topološkom prostoru X. Preferenca $\succeq$ je:

(1) *odozgo poluneprekidna*, ako je za svako $x \in X$ skup $B_l(x)$ zatvoren;

(2) *odozdo poluneprekidna*, ako je za svako $x \in X$ skup $W_l(x)$ zatvoren;

(3) *neprekidna*, ako je odozgo i odozdo poluneprekidna.

Imajući u vidu prethodnu definiciju, dokazujemo sledeći rezultat.

Posledica 3.1.1. *Neka je $\succeq$ preferenca na topološkom prostoru X. Tada:*

(1) $\succeq$ *je odozgo poluneprekidna, ako i samo ako je* $W_s(x)$ *otvoren za svako* $x \in X$*;*

(2) $\succeq$ *je odozdo poluneprekidna, ako i samo ako je* $B_s(x)$ *otvoren za svako* $x \in X$*;*

(3) $\succeq$ *je neprekidna, ako i samo ako su skupovi* $W_s(x)$ *i* $B_s(x)$ *otvoreni za svako* $x \in X$*.*

Dokazujemo sledeće svojstvo o neprekidnosti preferenci.

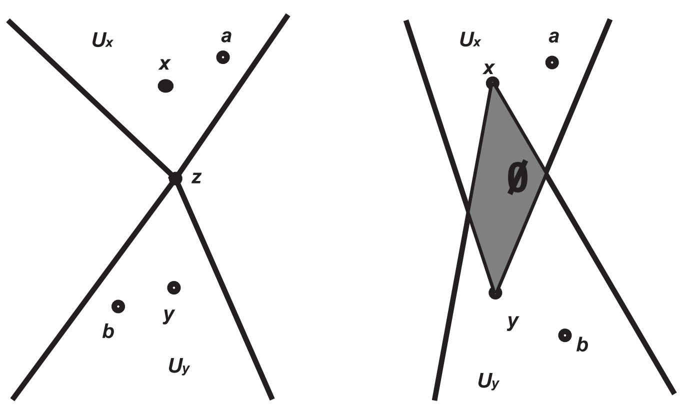
Teorema 3.1.2. *Neka je* $\succeq$ *preferenca na topološkom prostoru* X*. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) *Preferenca* $\succeq$ *je neprekidna;*

(2) *Preferenca* $\succeq$ *je zatvoren podskup topološkog prostora* $X \times X$*;*

(3) *Ako važi* $x \succ y$ *u* X*, tada postoje uzajamno disjunktne otvorene okoline* U_x *i* U_y *tačka* x *i* y *redom, tako da* $a \in U_x$ *i* $b \in U_y$ *implicira* $a \succ b$*.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (3): Neka je $x \succ y$. Razlikujemo dva slučaja (Slika 3.1.1).



Slika 3.1.1.

(1.1) Pretpostavimo da postoji neko z sa svojstvom $x \succ z \succ y$. Tada je $U_x = \{a \in X : a \succ z\}$ i $U_y = \{b \in X : z \succ b\}$. Proveravamo da U_x i U_y zadovoljavaju tražene uslove. Iz neprekidnosti $\succeq$ sledi da su U_x i U_y otvoreni skupovi. Očigledno je $x \in U_x$ i $y \in U_y$. Ako je $a \in U_x$ i $b \in U_y$, onda je $a \succ z \succ b$, te je $a \succ b$. Na osnovu poslednje implikacije sledi $U_x \cap U_y = \emptyset$.

(1.2) Pretpostavimo da ne postoji z sa svojstvom $x \succ z \succ y$. Neka je $U_x = \{a \in X : a \succ y\}$ i $U_y = \{b \in X : x \succ b\}$. U_x i U_y su tražene okoline. Još jednom, zbog neprekidnosti preference $\succeq$ sledi da su U_x i U_y otvoreni skupovi. Očigledno je $x \in U_x$ i $y \in U_y$. Neka je $a \in U_x$ i $b \in U_y$. Tada je $a \succ y$ i $x \succ b$. Zbog potpunosti $\succeq$, važi $a \succeq b$ ili $b \succeq a$. Ako bi bilo $b \succeq a$, onda je $x \succ b \succeq a \succ y$. Na osnovu pretpostavke (1.2) nije moguće da važi $x \succ b \succ y$. Stoga je $a \succeq b$ i nije $b \succeq a$, odnosno važi $a \succ b$. Dokazali smo da iz $a \in U_x$ i $b \in U_y$ sledi $a \succ b$. Prema tome, $U_x \cap U_y = \emptyset$.

(3) $\Longrightarrow$ (2): Neka je $\Big((x_\alpha, y_\alpha)\Big)_\alpha$ mreža u $\succeq$ ($\succeq \subset X \times X$), koja zadovoljava uslov $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$ u $X \times X$. Ako važi $y \succ x$, onda postoje uzajamno disjunktne okoline U_x i U_y tačaka x i y redom, tako da $a \in U_x$ i $b \in U_y$ implicira $b \succ a$. Specijalno, za dovoljno veliko α mora važiti $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_x \times U_y$, te sledi $y_\alpha \succ x_\alpha$, što je nemoguće. Prema tome, važi $x \succeq y$ i stoga je $(x, y) \in \succeq$. Proizilazi da je $\succeq$ zatvoren podskup od $X \times X$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Neka je $x \in X$, neka je $(y_\alpha)_\alpha$ mreža u skupu $B_l(x)$, i neka je $y_\alpha \to z$. Tada mreža $\Big((y_\alpha, x)\Big)_\alpha$ u $\succeq$ zadovoljava $(y_\alpha, x) \to (z, x)$ u $X \times X$. Kako je $\succeq$ zatvorena u $X \times X$, sledi da je $(z, x) \in \succeq$. Stoga važi $z \succeq x$, te je $z \in B_l(x)$, odnosno $B_l(x)$ je zatvoren skup. Analogno, $W_l(x)$ je zatvoren skup, te je $\succeq$ neprekidna preferenca. $\square$

Nadalje je neka je X realan vektorski prostor. Ako je X topološki vektorski prostor, onda je topologija τ na vektorskom prostoru X takva, da su operacije sabiranja vektora, kao i množenja vektora skalarom, neprekidne funkcije (iz $X \times X$ u X, i iz $X \times \mathbb{R}$ u X). Podrazumevamo da je X Hausdorfov prostor.

Definicija 3.1.3. Neka je $\succeq$ preferenca na konveksnom podskupu K vektorskog prostora X.

(1) Preferenca $\succeq$ je konveksna, ako za svako $x, y, z \in K$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ važi implikacija

$$\Big(y \succeq x,\ z \succeq x,\ 0 < \alpha < 1\Big) \Longrightarrow \alpha y + (1-\alpha) z \succeq x.$$

(2) Preferenca $\succeq$ je strogo konveksna, ako za svako $x, y, z \in K$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ važi implikacija:

$$\Big(y \succeq x,\ z \succeq x,\ y \neq z, 0 < \alpha < 1\Big) \Longrightarrow \alpha y + (1-\alpha) z \succ x.$$

Konveksne i strogo konveksn preference su u vezi sa konveksnim i strogo konveksnim skupovima. Za potpuno razumevanje stroge konveksnosti preference potreban je pojam stroge monotonosti preference, koji će kasnije biti definisan.

Posledica 3.1.2. *Neka je K konveksan podskup vektorskog prostora X, i neka je $\succeq$ preferenca na K. Tada:*

(1) *$\succeq$ je konveksna na K, ako i samo ako je skup $B_l(x)$ konveksan za svako $x \in K$;*

(2) *Ako je X topološki vektorski prostor i pri tome preferenca $\succeq$ strogo monotona, tada $\succeq$ je strogo konveksna na K, ako je skup $B_l(x)$ strogo konveksan za svako $x \in K$.*

Dokaz. Tvrđenje (1) je jednostavno dokazati.

Dokazaćemo tvrđenje (2). Pretpostavimo da je $\succeq$ strogo monotona i strogo konveksna na K. Neka je $x, y \in B_s(z)$, $x \neq y$, $0 < \lambda < 1$. Na osnovu stroge konveksnosti preference $\succeq$ sledi da je $\lambda x + (1-\lambda)y \succ z$. Kako je $\succeq$ strogo konveksna, sledi da je $u = \lambda x + (1-\lambda)y > z$. Na osnovu poznatog rezultata, postoje uzajamno disjunktne okoline U_u i U_z tačaka u i z redom, tako da za svako $a \in U_u$ i $b \in U_z$ važi $a \succ b$. Sledi da je $U_u \subset B_l(z)$, te je $u \in \operatorname{int} B_l(z)$. Time je dokazano da je skup $B_l(z)$ strogo konveksan.

Sada pretpostavimo da je $\succeq$ strogo monotona i da je je svaki skup $B_l(z)$ strogo konveksan. Neka je $x, y \in B_l(z)$, $x \neq y$ i $0 < \lambda < 1$. Tada je $u = \lambda x + (1-\lambda)y \in \operatorname{int} B_l(z)$, odnosno $u \succeq z$. Ako pretpostavimo da nije $u \succ z$, onda mora biti i $z \succ u$. $\square$

Definicija 3.1.4. Neka je $\succeq$ preferenca na nepraznom skupu X. Realna funkcija $u : X \to \mathbb{R}$ je *funkcija korisnosti* za preferencu $\succeq$, ako važi ekvivalencija:

$$(\forall x, y \in X)\ \Big(u(x) \geq u(y) \iff x \succeq y\Big).$$

Tada funkcija u reprezentuje preferencu $\succeq$ na skupu X.

Primer 3.1.1. Neka je $u : X \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija na nepraznom skupu X. Definišemo relaciju $\succeq$ na X na sledeći način:

$$x \succeq y \iff u(x) \geq u(y), \qquad x, y \in X.$$

Tada je $\succeq$ preferenca određena funkcijom u, i takođe je u funkcija korisnosti za preferencu $\succeq$.

Definicija 3.1.5. Neka je K konveksan podskup vektorskog prostora X, i neka je $u : K \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija u je:

(1) *Kvazi-konkavna*, ako za svako $x, y \in X$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ važi implikacija

$$(x \neq y,\ 0 < \alpha < 1) \implies u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}.$$

(2) *Strogo kvazi-konkavna*, ako za svako $x, y \in X$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ važi implikacija

$$(x \neq y,\ 0 < \alpha < 1) \implies u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min\{u(x), u(y)\}.$$

(3) *Konkavna*, ako za svako $x, y \in X$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ važi implikacija

$$(x \neq y,\ 0 < \alpha < 1) \implies u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y).$$

(4) *Strogo-konkavna*, ako za svako $x, y \in X$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ važi implikacija

$$(x \neq y,\ 0 < \alpha < 1) \implies u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y).$$

Napomena 3.1.2. Neka je K konveksan podskup vektorskog prostora X. Funkcija $u : K \to \mathbb{R}$ je konveksna, ako i samo ako je $-u$ konkavna. Analogna definicija važi u ostalim slučajevima konveksnosti.

Teorema 3.1.3. *Neka je $u : K \to \mathbb{R}$ funkcija korisnosti za preferencu $\succeq$ na nepraznom konveksnom podskupu K vektorskog prostora X. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) *$\succeq$ je konveksna;*

(2) *u je kvazi-konkavna.*

Dokaz. (1) $\implies$ (2): Pretpostavimo da je $\succeq$ konveksna preferenca. Neka je $x, y \in K$, i bez gubljenja opštosti neka je $x \succeq y$. Tada je $x, y \in B_l(y)$. Neka je $0 \leq \alpha \leq 1$. Na osnovu konveksnosti skupa $B_l(y)$ sledi da je $\alpha x + (1-\alpha)y \in B_l(y)$. Sa druge strane, kako je u funkcija korisnosti za $\succeq$, sledi da je $u(x) \geq u(y)$ i $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq u(y) = \min\{u(x), u(y)\}$. Dakle, u je kvazi-konkavna.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Neka je u kvazi-konkavna, i neka je $x, y, z \in K$ sa svojstvom $x, y \in B_l(z)$. Pretpostavimo da je $0 \leq \alpha \leq 1$. Na osnovu kvazi-konkavnosti funkcije u, kao i činjenice da je u funkcija korisnosti za $\succeq$, sledi da je $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min\{u(x), u(y)\} \geq u(z)$. Stoga je i $\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z$, odnosno $\alpha x + (1-\alpha)y \in B_l(z)$. Dakle, $B_l(z)$ je konveksan skup za svako $z \in K$, te je $\succeq$ konveksna preferenca. $\square$

Analogno je moguće dokazati sledeći rezultat:

Teorema 3.1.4. *Neka je $u : K \to \mathbb{R}$ funkcija korisnosti za preferencu $\succeq$ na nepraznom konveksnom podskupu K vektorskog prostora X. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) *$\succeq$ je strogo konveksna;*

(2) *u je strogo kvazi-konkavna.*

Primer 3.1.2. Neka je $X = \mathbb{R}^2$. Uvedimo leksikografsko uređenje u $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \succ (a, b) \iff (x > a \vee (x = a \wedge y > b)), \qquad x, y, a, b \in \mathbb{R}.$$

Tada je $\succeq$ preferenca na $\mathbb{R}^2$. Sa druge strane, ne postoji funkcija korisnosti $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za preferencu $\succeq$.

Napomena 3.1.3. Nije svaka preferenca reprezentabilna funkcijom korisnosti. Pretpostavka o konačnoj dimenziji prostora takođe nije dovoljna.

Definicija 3.1.6. Neka je X vektorski prostor, i neka je $x_1, \ldots, x_n \in X$. Ako je $0 \leq \alpha_j \leq 1$ za svako $j = 1, \ldots, n$, i ako je $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, tada je $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ konveksna kombinacija vektora $x_1, \ldots, x_n$.

Posledica 3.1.3. *Neka je K konveksan podskup vektorskog prostora X, i neka je data funkcija $u : K \to \mathbb{R}$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(1) *u je kvazi-konkavna;*

(2) *Za svaku konveksnu kombinaciju $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ vektora iz $x_1, \ldots, x_n \in K$ važi*

$$u\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) \geq \min\{u(x_i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Kriterijum za konveksnost ili konkavnost funkcije jedne realne promenljive je dobro poznat.

Teorema 3.1.5. *Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija. Funkcija f je konveksna ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svako $x \in (a,b)$. Funkcija f je konkavna ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svako $x \in (a,b)$.*

Ovde formulisati teoremu o konveksnosti za funkcije više realnih promenljivih.

Definicija 3.1.7. Neka je X realan vektorski prostor, i neka je $\geq$ parcijalno uređenje na X. X je uređen vektorski prostor, ako važe sledeća svojstva:

(1) Ako je $x \geq y$ u X, tada za svako $z \in X$ važi $x + z \geq y + z$;

(2) Ako je $x \geq y$ u X i ako je $\lambda \geq 0$, tada je $\lambda x \geq \lambda y$.

Uređen vektorski prostor X u odnosu na relaciju $\geq$ označen je sa $(X, \geq)$.

Primer 3.1.3. Neka je u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ uvedeno koordinatno parcijalno uređenje. Ako je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, onda:

$$x \geq y \qquad \text{ako i samo ako} \qquad x_j \geq y_j \quad \text{za svako } j = 1, \ldots, n.$$

Prostor $\mathbb{R}^n$ je uređen vektorski prostor u odnosu na uvedeno uređenje.

Konus pozitivnih elemenata je skup

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_j \geq 0 \ \text{ za svako } j = 1, \ldots, n\}.$$

Takođe,

$$x > y \qquad \text{ako i samo ako} \qquad x_j > y_j \quad \text{za svako } j = 1, \ldots, n.$$

Definicija 3.1.8. Neka je $(X, \geq)$ uređen vektorski prostor, i neka je $\succeq$ preferenca na X. Tada:

(1) $\succeq$ je *monotona* u odnosu na $\geq$, ako za svako x, y in X, iz $x \geq y$ sledi $x \succeq y$;

(2) $\succeq$ je *strogo monotona* u odnosu na $\geq$, ako za svako x, y in X, ako iz $x > y$ sledi $x \succ y$.

Primer 3.1.4. Neka je $u(x,y) = xy$ za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, i neka je $\succeq$ preferenca definisana funkcijom korisnosti u. Dakle,

$$(x_1,y_1) \succeq (x_2,y_2) \quad \text{ako i samo ako} \quad u(x_1,y_1) = x_1y_1 \geq x_2y_2 = u(x_2,y_2).$$

Važi implikacija

$$\begin{aligned}(x_1,y_1) > (x_2,y_2) &\implies u(x_1,y_1) = x_1y_1 \geq x_2y_2 = u(x_2,y_2) \\ &\implies (x_1,y_1) \succeq (x_2,y_2),\end{aligned}$$

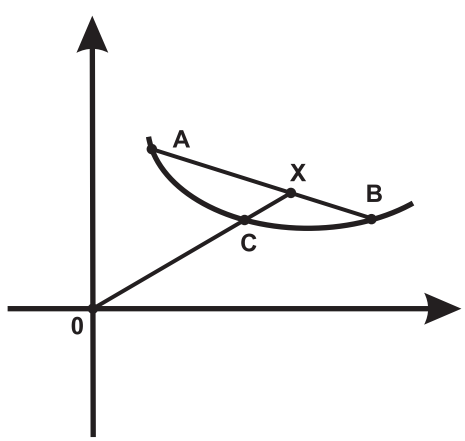
te je preferenca $\succeq$ monotona u odnosu na $(\mathbb{R}^2_+, \geq)$. Međutim, $(3,0) > (2,0)$, ali nije $(3,0) \succ (2,0)$. Sledi da preferenca $\succeq$ nije strogo monotona u odnosu na $(\mathbb{R}^2_+, \geq)$.

Definicija 3.1.9. Neka je K konveksan podskup vektorskog prostora X, i neka je $u : K \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Skup

$$I(c) = \{x \in K : u(x) = c\}$$

jeste *kriva indiferencije* (*kriva nivoa*), pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan broj.

Definicija 3.1.10. Neka je K konveksan podskup pozitivnog konusa uređenog vektorskog prostora X. Funkcija $u : K \to \mathbb{R}$ je *konveksna u odnosu na kooridinatni početak*, ako za svake dve tačke A i B sa grafika te krive i za svaku tačku X duži $[AB]$, važi da svaka poluprava sa početkom u 0 kroz tačku X, mora preseći grafik krive u u nekoj tački C (Slika 3.1.2).



Slika 3.1.2.

Definicija 3.1.11. Neka je $(X, \geq)$ uređen vektorski prostor, neka je $K \subset X$ i $u : K \to \mathbb{R}$. Funkcija u je:

(1) Monotona, ako važi

$$(\forall x, y \in K)\ (x \geq y \implies u(x) \geq y).$$

(2) Strogo monotona, ako važi

$$(\forall x, y \in K)\ (x > y \implies u(x) > y).$$

Teorema 3.1.6. *Neka je K konveksan podskup u konusu X^+ uređenog vektorskog prostora $(X, \geq)$, i neka je $u : K \to \mathbb{R}$ funkcija. Ako je funkcija u strogo monotona i kvazi-konkavna, tada krive indiferencе funkcije u jesu konveksne u odnosu na koordinatni početak.*

Dokaz. Neka su $x, y \in K$ sa svojstvom $u(x) = u(y) = c$ za neko $c \in \mathbb{R}$. Neka je $0 < \alpha < 1$ i $z = \alpha x + (1-\alpha)y$. Tada je $z \in K$. Funkcija u je kvazi-konkavna, te je

$$u(z) \geq \min\{u(x), u(y)\} = c.$$

Posmatrajmo polupravu kroz z sa početkom u 0: to je skup $0z = \{\lambda z : \lambda \geq 0\}$. Duž koja spaja 0 i z jeste $[0z] = \{\lambda z : 0 \leq 0\lambda \leq 1\}$. Funkcija u je strogo monotona. Pretpostavimo da $0y$ seže skup $I(c) = \{a \in K : u(a) = c\}$. Zbog $u(z) \geq z$ i stroge monotonosti funkcije u, to je moguće samo za jednu vrednost $\lambda \in [0, 1]$. Sledi da je kriva indiferencе $I(c)$ konveksna u odnosu na 0. $\square$

Definicija 3.1.12. Neka je X vektorski prostor, $M \subset X$, i neka je $\succeq$ preferenca na M. Vektor $v \in X$ je *ekstremno poželjan* za $\succeq$, ako za svako $x \in M$ i svako $\alpha > 0$ važi:

$$x + \alpha v \in M \quad \text{i} \quad x + \alpha v \succ x.$$

Posledica 3.1.4. *Neka je X vektorski prostor, $M \subset X$, i neka je $\succeq$ preferenca na M. Ako je $v \succ 0$ ekstremno poželjan za preferencu $\succeq$, tada je za svako $\lambda > 0$ vektor λv takođe ekstremno poželjan za preferencu $\succeq$.*

Interesantna je karakterizacija preferenci na pozitivnom konusu $\mathbb{R}^n_+$.

Teorema 3.1.7. *Neka je $\succeq$ neprekidna preferenca na pozitivnom konusu $\mathbb{R}^n_+$. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(1) Ako je $\succeq$ konveksna, monotona, i ima extremno poželjan vektor u $\mathbb{R}^n_+$, tada $\succeq$ može biti reprezentovana neprekidnom, monotonom i kvazi-konkavnom funkcijom korisnosti.

(2) Ako je $\succeq$ strogo konveksna, strogo monotona, i ima ekstremno poželjan vektor u $\mathbb{R}^n_+$, tada $\succeq$ može biti reprezentovana neprekidnom, strogo monotonom i stroko kvazi-konkavnom funkcijom korisnosti.

Dokaz. Dokazaćemo tvrđenje (1), a dokaz tvrđenja (2) je analogoan.

Neka je $\succeq$ neprekidna, konveksna i monotona preferenca na $\mathbb{R}^n_+$, i neka je $v \in \mathbb{R}^n_+$ ekstremno poželjan vektor za $\succeq$. Neka je $w = v + (1, \dots, 1)$. Na osnovu monotonosti preference $\succeq$, sledi da je w takođe ekstremno poželjan vektor. Sledi da postoji ekstremno poželjan vektor $e = (e_1, \dots, e_n)$ tako da je $e_j > 0$ za svako j.

Definišemo funkciju $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$u(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha e \succeq x\}.$$

Proverimo da je funkcija u dobro definisana. Neka je $x \in \mathbb{R}^n_+$. Na osnovu $e_j > 0$ za svako j, sledi da postoji neko $\alpha > 0$ tako da je $\alpha e > x$. Na osnovu monotonosti preference $\succeq$ sledi da je $\alpha x \succeq x$ za neko $\alpha > 0$. Time smo dokazali da je funkcija u dobro definisana.

Tvrdimo da je x indiferentno u odnosu na $u(x)e$, odnosno $x \sim u(x)e$. Skup $B_l(x) = \{y \in \mathbb{R}^n_+ : y \succeq x\}$ je zatvoren, te sledi da važi $u(x)e \succeq x$. Ako je $u(x) > 0$, onda za svako $\epsilon > 0$, koje je dovoljno malo, sledi da važi $x \succeq (u(x) - \epsilon)e$. Neka $\epsilon \to 0+$ i iskoristimo neprekidnost preference $\succeq$. Dakle, ako je $u(x) > 0$ onda je $x \sim u(x)e$. Pretpostavimo sada da je $u(x) = 0$. Na osnovu $x \geq 0$, kao i na osnovu monotonosti $\succeq$, proizilazi da je $x \succeq 0 = u(x)e$. I u ovom slučaju je $x \sim u(x)e$.

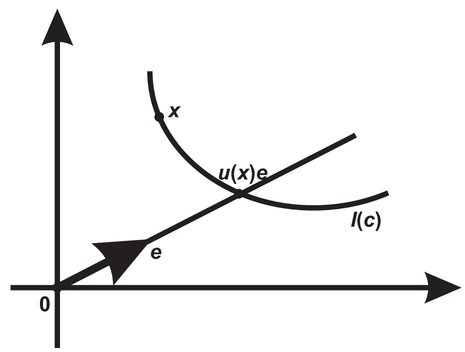
Ako je $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$, tada je $\alpha e \succeq \beta e$ ako i samo ako je $\alpha \geq \beta$. Ako bi bilo, recimo, $\alpha e \succeq \beta e$ i $\beta > \alpha$, onda bi proizilazilo $\beta e = \alpha e + (\beta - \alpha)e \succ \alpha e$, što nije moguće. Prethodna razmatranja pokazuju da za svako $x \in \mathbb{R}^n_+$ postoji tačno jedan skalar, i to $u(x)$, sa svojstvom $x \sim u(x)e$. Proizilazi da je funkcija u funkcija korisnosti koja reprezentuje $\succeq$.

Neprekidnost funkcije u sledi na osnovu neprekidnosti preference $\succeq$, kao i jednakosti sledećih zatvorenih skupova:

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u(x) \leq t\} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \preceq te\},$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : u(x) \geq t\} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \succeq te\}.$$

□

Napomena 3.1.4. Geometrijski smisao vektora e je sledeći. Uočimo vektor $x \in \mathbb{R}^n_+$ i krivu indiference $I(c)$ koja prolazi kroz x. Dakle, $y \in I(c)$ ako i samo ako je $u(y) = c$. Tada je $u(x)e = ce$ tačka preseka poluprave iz 0 kroz e i prethodne krive indiference (Slika 3.1.3).



Slika 3.1.3.

3.2 Maksimalni elementi

U ovoj sekciji razmatramo maksimalne elemente u odnosu na preferencu.

Definicija 3.2.1. Neka je $\succeq$ preferenca na nepraznom skupu K. Elemenat $x \in K$ je *maksimalan* u odnosu na $\succeq$, ako ne postoji $y \in K$ tako da je $y \succ x$.

Imajući u vidu da je $\succeq$ kompletna relacija, sledi da je $x \in K$ maksimalan element u odnosu na $\succeq$, ako i samo ako je $x \succeq y$ za svako $y \in K$. Maksimalan elemenat u odnosu na preferencu ne mora postojati. Ako maksimalan elemenat postoji, iz činjenice da preferenca ne mora biti antismetrična, ne može se izvesti opšti zaključak o jedinstvenosti maksimalnog elementa.

Skup svih maksimalnih elemenata u K u odnosu na preferencu $\succeq$ označen je sa $\mathrm{Max}(K, \succeq)$.

Teorema 3.2.1. *Neka je $\succeq$ preferenca na nepraznom skupu K. Tada:*

(1) *Svi maksimalni elementi u odnosu na $\succeq$ su međusodno indiferenti;*

(2) *Ako je K kompaktan topološki prostor, i ako je $\succeq$ odozgo poluneprekidna, tada postoje maksimalni elementi u odnosu na $\succeq$; skup $\mathrm{Max}(K, \succeq)$ je kompaktan u K;*

(3) *Ako je K konveksan podskup vektorskog prostora X, i ako je $\succeq$ konveksna preferenca na K, tada je skup $\mathrm{Max}(K, \succeq)$ konveksan;*

(4) *Ako je K konveksan podskup vektorskog prostora X, i ako je $\succeq$ strogo konveksna preferenca, tada postoji najviše jedan elemenat u $\mathrm{Max}(K, \succeq)$.*

Dokaz. (1) Neka je $a, b \in \mathrm{Max}(K, \succeq)$. Na osnovu kompletnosti relacije $\succeq$ sledi da je $a \succeq b$ i $b \succeq a$. Proizilazi da su a i b su međusobno indiferentni.

(2) Za svako $x \in X$ posmatrajmo skup $B_l(x) = \{y \in X : y \succeq x\}$. Iz činjenice da je $\succeq$ odozgo poluneprekidna, sledi da je skup $B_l(x)$ zatvoren (i neprazan). Razmotrimo familiju $(B_l(x))_{x\in K}$. Očigledno je

$$\mathrm{Max}(K, \succeq) = \bigcap_{x\in K} B_l(x).$$

Neka je Y konačan podskup od K. Zbog kompletnosti preference $\succeq$ važi $\bigcap\limits_{x\in Y} B_l(x) \neq \emptyset$. Naime, ako je $Y = \{x_1, \dots, x_n\}$, bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti $x_1 \succeq x_2 \succeq \cdots \succeq x_n$. Tada je $B_l(x_1) \subset B_l(x_2) \subset \cdots \subset B_l(x_n)$, te je

$$\{x_1\} \subset B_l(x_1) = \bigcap_{x\in Y} B_l(x).$$

Familija $(B_l(x))_{x\in K}$ ima svojstvo nepraznog konačnog preseka. Skup K je kompaktan, te je $\bigcap\limits_{x\in K} B_l(x)$ neprazan i kompaktan podskup od K. Specijalno, $\mathrm{Max}(K, \succeq) \neq \emptyset$.

(3) Neka je $\succeq$ konveksna preferenca na konveksnom skupu K. U ovom slučaju moguće je da $M = \mathrm{Max}(K, \succeq)$ jeste prazan. Prazan skup je uvek konveksan, te razmatramo slučaj $M \neq \emptyset$. Neka je $x, y \in M$, i neka je $0 < \alpha < 1$. Elementi x i y su međusobno uporedivi, te neka je, recimo, $x \succeq y$. Tada je $x, y \in B_l(y)$. Po pretpostavci,

$B_l(y)$ je konveksan skup. Sledi da je $\alpha x + (1-\alpha)y \in B_l(y)$. Kako je y maksimalan elemenat, proizilazi da je i $\alpha x + (1-\alpha)y$ maksimalan elemanat, odnosno $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$. Prema tome, M je konveksan skup.

(4) Neka je $\succeq$ strogo konveksna preferenca na konveksnom skupu K. Pretpostavimo da postoje dva različita elementa $x, y \in M$. Elementi x i y su međusobno uporedivi, te bez gubljena opštosti pretpostavimo da je $x \succeq y$. Još jednom sledi $x, y \in B_l(y)$. Skup $B_l(y)$ je strogo konveksan, te je $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \succ y$. Sledi da y nije maksimalan elemenat. Proizilazi da postoji najviše jedan maksimalan elemenat u skupu K u odnosu na $\succeq$. $\square$

Posledica 3.2.1. *Neka je $\succeq$ odozgo poluneprekidna konveksna preferenca na konveksnom i kompaktnom podskupu K topološkog vektorskog prostora X. Važe sledeća tvrđenja:*

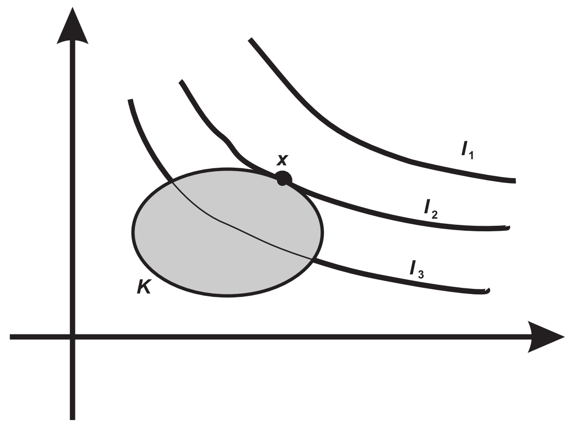
(1) *Skup* $\mathrm{Max}(K, \succeq)$ *je neprazan, konveksan i kompaktan.*

(2) *Ako je, pored uslova (1), $\succeq$ strogo konveksna, onda je* $\mathrm{Max}(K, \succeq)$ *jednoelementan skup.*

Teorema 3.2.2. *Neka je $\succeq$ preferenca na $\mathbb{R}^n_+$, koja ima strogo poželjan vektor u $\mathbb{R}^n_+$. Neka je K neprazan podskup od $\mathbb{R}^n_+$. Tada ni jedna unutrašnja tačka skupa K ne može biti maksimalan elemenat preference $\succeq$.*

Dokaz. Neka je $v \in \mathbb{R}^n_+$ ekstremno poželjan vektor preference $\succeq$, i neka je x unutrašnja tačka skupa K. Tada za dovoljno malo $\alpha > 0$ važi $x + \alpha v \in K$. Relacija $x + \alpha v \succ x$ implicira da x ne može biti maksimalan elemenat od $\succeq$ u skupu K. $\square$

Geometrijsko tumačenje maksimalnog elementa je kao na Slici 3.2.1. Skup K je konveksan i kompaktan, I_j su krive indeference, a x je maksimum skupa K u odnosu na preferencu prikazanu krivama indiferenci.



Slika 3.2.1.

Sada definišemo dualan par vektorskih prosotra.

Definicija 3.2.2. Neka su X, X' realni vektorski prostori, i neka je $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X' \to \mathbb{R}$ preslikavanje se sledećim svojstvima:

(1) $(\forall x, y \in X)(\forall z \in X')(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle)$;

(2) $(\forall x \in X)(\forall y, z \in X')(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle)$;

(3) $\Big((\forall x \in X)\langle x, x' \rangle = 0\Big) \implies x' = 0 \in X'$;

(4) $\Big((\forall x' \in X')\langle x, x' \rangle = 0\Big) \implies x = 0 \in X$.

Tada je $\langle X, X' \rangle$ *dualan par vektorskih prostora* X, X', a preslikavanje $\langle, \cdot, \cdot \rangle$ je *preslikavanje dualnosti*.

Teorema 3.2.3. *Neka je $\langle X, X' \rangle$ dualan par vektorskih prostora, neka je K neprazan, konveksan i slabo zatvoren potprostor od X, i neka je $f : K \to \mathbb{R}$ kvazi-konkavna funkcija. Ako je f odozgo poluneprekidna u smislu Makkija, tada je f slabo odozgo poluneprekidna.*

Dokaz. Neka je K neprazan konveksan podskup od X i neka f zadovoljava pretpostavke ove teoreme. Neka je $x \in K$ i posmatrajmo skup $L = \{y \in K : f(y) \geq f(x)\}$. Na osnovu kvazi-konkavnosti funkcije f sledi da je L konveksan. Na osnovu poluneprekidnosti odozgo u smislu Makkija, sledi da je L zatvoren u smislu Makkija. Sledi da je L slabo zatvoren, te je funkcija f slabo odozgo poluneprekidna. $\square$

Na osnovu prethodnih rezultata, jednostavno formulišemo posledice.

Posledica 3.2.2. *Neka je $\langle X, X' \rangle$ dualan par vektorskih prostora, i neka je K neprazan, koveksan i slabo kompaktan podskup od X. Ako je funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna u smislu Makkija i kvazi-konkavna, tada je skup maksimalnih elemenata preference definisane sa f, odnosno skup*

$$\{x \in K : f \text{ dostiže svoj maksimum na } K \text{ u tački } x\}$$

neprazan, konveksan i slabo kompaktan.

Posledica 3.2.3. *Neka je $\langle X, X' \rangle$ dualan par vektorskih prostora, i neka je K neprazan, konveksan i slabo kompaktan podskup od X. Ako je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna u smislu Makkija, strogo kvazi-konkavna, tada preferenca određena funkcijom f ima tačno jedan maksimalan element.*

3.3 Funkcije zahteva

Razmatramo funkcije zahteva, koje maksimalizuju korisnost, pod pretpostavkom da je budžet ograničen.

Simboli $x, y, z, w, \ldots \in \mathbb{R}^n_+$ reprezentovaće vektore robe, dok će simboli $p, q, r, s, \ldots \in \mathbb{R}^n_+$ reprezentovati vektore cene. Skalarni proizvod vektora $x, p \in \mathbb{R}^n_+$ označen je sa

$$\langle x, p \rangle \equiv x \cdot p = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Formalno posmatrano, vektori p i x jesu iste dimenzije, ali njihova priroda je drugačija. Naime, ako je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ vektor robe, onda pretpostavljamo da su tipovi robe poređani od 1 do n. Tada je x_1 broj jedinica robe 1, x_2 je broj jedinica robe 2, x_n je broj jedinica robe n. Ako je $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$ vektor cene, tada je p_1 cena robe 1 po jedinici mere (istoj koja je iskorišćena kao jedinica mere za vektor x). Stoga, $p \cdot x$ je prirodnije zvati dejstvo cene p na robu x. Osobine dejstva cene na robu su iste kao i osobine skalarnog proizvoda. U ovoj sekciji koristimo neprekindost skalarnog proizvoda po oba argumenta. Stoga, dejstvo cene na vektor robe je neprekidno i u odnosu na cenu i u odnosu na robu.

Definicija 3.3.1. Neka je $p \in \mathbb{R}^n_+$ fiksirana cena. *Budžetski skup* za cenu p koji odgovara vektoru robe $w \in \mathbb{R}^n_+$, jeste skup

$$B_w(p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq p \cdot w\}.$$

Budžetska linija budžetskog skupa $B_w(p)$ jeste skup

$$L_w(p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x = p \cdot w\}.$$

Posledica 3.3.1. *Budžetski skup $B_w(p)$ i budžetska linija $L_w(p)$ su zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^n_+$. Takođe, $L_w(p) \subset B_w(p)$.*

Dokaz. Sledi na osnovu neprekidnosti skalarnog proizvoda $(x, p) \to p \cdot x$ po oba argumenta. □

Činjenicu da su sve koordinate vektora p pozitivne, označavamo sa $p \gg 0$, ili ekvivalentno $p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ u smislu uobičajene topologije ovog prostora. Ako je neka koordinata vektora p jednaka nuli, onda je u topološkom smislu oznaka $p \in \partial \mathbb{R}^n_+$.

Jedno od osnovnih pitanja koje se postavlja, jeste: Ako je data cena p, da li postoji ograničen budžetski skup za p? Odgovor je da su za datu cenu p svi budžetski skupovi ograničeni, ili su svi neograničeni.

Teorema 3.3.1. *Za datu cenu $p \in \mathbb{R}^n_+$ važe sledeća tvrđenja:*

(1) *Svi budžetski skupovi $B_w(p)$ su ograničeni ako i samo ako je $p \gg 0$.*

(2) *Svi budžetski skupovi $B_w(p)$ su neograničeni ako i samo ako postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $p_i = 0$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrđenje (1). Pretpostavimo da je svaki budžetski skup $B_w(p)$ ograničen. Tvrdimo da je $p_i > 0$ za svako i. Pretpostavimo da postoji i tako da je $p_i = 0$. Neka je $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ standardna ortonormirana baza u $\mathbb{R}^n$. Posmatrajmo vektore ne_i za $n \in \mathbb{N}$. Zbog $p_i = 0$ sledi da je $p \cdot (ne_i) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, te je $ne_i \in B_w(p)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Proizilazi da je $B_w(p)$ neograničen skup za svako $w \in \mathbb{R}^n_+$, što je suprotno pretpostavci.

Obrnuto, sada pretpotavimo da je $p \gg 0$. Tada postoji j tako da je $p_j = \min\{p_1, \ldots, p_n\} > 0$. Neka je $w \in \mathbb{R}^n_+$, i neka je $x \in B_w(p)$ proizvoljan elemenat. Tada je za svako $i = 1, \ldots, n$ ispunjeno

$$0 \leq p_i x_i \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = p \cdot x \leq p \cdot w,$$

odakle sledi

$$0 \leq x_i \leq \frac{p \cdot x}{p_i} \leq \frac{p \cdot w}{p_j} < \infty.$$

Proizilazi da je $B_w(p)$ ograničen za svako $w \in \mathbb{R}^n_+$. $\square$

Posledica 3.3.2. *Svi budžetski skupovi $B_w(p)$ za datu cenu $p \in \mathbb{R}^n_+$ jesu kompaktni, ako i samo ako je $p \gg 0$.*

Dokaz. Sledi na osnovu prethodne teoreme, i činjenice da podskupovi od $\mathbb{R}^n$ jesu kompaktni ako i samo ako su zatvoreni i ograničeni. $\square$

Od interesa je razmatrati preferencu i budžetski skup.

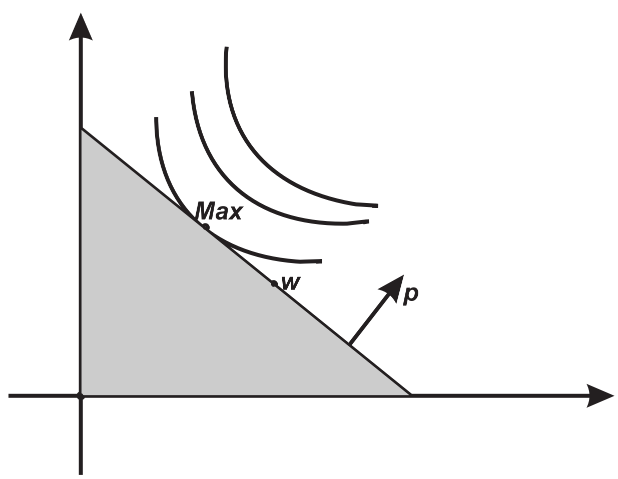
Teorema 3.3.2. *Neka je data cena $p \gg 0$, i neka je $\succeq$ neprekidna preferenca na $\mathbb{R}^n_+$. Važe sledeća tvrđenja:*

(1) *Ako je $\succeq$ konveksna, tada na svakom budžetskom skupu $B_w(p)$ preferenca $\succeq$ ima bar jedan maksimalan elemenat.*

(2) *Ako je $\succeq$ strogo konveksna, tada na svakom budžetskom skupu $B_w(p)$ preferenca $\succeq$ ima tačno jedan maksimalan elemenat.*

(3) *Ako je $\succeq$ strogo konveksna i ako postoji ekstremno poželjan vektor za $\succeq$, tada na svakom budžetskom skupu $B_w(p)$ preferenca $\succeq$ ima tačno jedan maksimalan elemenat koji se nalazi na odgovarajućoj budžetskoj liniji $L_w(p)$.*

Geometrijski smisao budžetskog skupa i jedinstvenog maksimalnog elementa jeste na Slici 3.3.1.



Slika 3.3.1.

Teorema 3.3.3. *Neka je data cena $p \in \partial\mathbb{R}^n_+$, i neka je $\succeq$ strogo monotona preferenca na $\mathbb{R}^n_+$. Tada $\succeq$ nema maksimalnih elemenata ni u jednom budžetskom skupu $B_w(p)$.*

Dokaz. Iz činjenice $p \in \partial\mathbb{R}^n_+$ sledi da vektor p ima bar jednu koordinatu jednaku nuli. Bez gubljenja opštosti, neka je $p_1 = 0$. Razmotrimo $x \in B_w(p)$. Ako je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, tada je očigledno (zbog $p_1 = 0$) $y = (x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n) \in B_w(p)$ i $y > x$. Stroga monotonost preference $\succeq$ implicira $y \succ x$, odakle proizilazi da x ne može biti maksimalan elemenat preference $\succeq$ u skupu $B_w(p)$. $\square$

Teorema 3.3.4. *Neka je data cena $p \in \partial\mathbb{R}^n_+$, i neka je $\succeq$ strogo monotona preferenca na* $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$*. Pretpostavimo da važi:*

(1) $x \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+,\ y \in \partial\mathbb{R}^n_+ \implies x \succeq y$;

(2) *Elemenat $w \in \mathbb{R}^n_+$ zadovoljava uslov $p \cdot w > 0$.*

Tada preferenca $\succeq$ nema maksimalnih elemenata u skupu $B_w(p)$.

Dokaz. Na osnovu $p \cdot w > 0$ sledi da $B_w(p)$ sadrži strogo pozitivan elemenat. Preferenca $\succeq$ je strogo monotona, i stoga svaki maksimalan elemenat preference $\succeq$ u $B_w(p)$ mora biti strogo pozitivan. Još jednom, bez gubljenja opštosti, pretpostavimo $p_1 = 0$, što sledi iz $p \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Ako je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_w(p)$ strogo pozitivan maksimalan elemenat, tada je $y = (x_1 + 1, x_2, \ldots, x_n)$ takođe strogo pozitivan elemenat u $B_w(p)$ koji zadovoljava uslov $y > x$. Preferenca $\succeq$ je strogo monotona na $\operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$, te je $y \succ x$, odakle sledi da x ne može biti maksimalan elemenat preference $\succeq$. $\square$

Razmatramo neprekidnu i strogo konveksnu preferencu $\succeq$ na $\mathbb{R}^n_+$. Pretpostavimo da postoji ekstremno poželjan vektor e za ovu preferencu. Neka je $w \in \mathbb{R}^n_+$, $w > 0$, fiksiran vektor, koji nazivamo početna raspoloživa sredstva. Tada za svaku cenu $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ preferenca $\succeq$ ima tačno jedan maksimalan elemenat u budžetskom skupu $B_w(p)$. Taj maksimalan elemenat označen je sa $x_w(p)$. Funkcija

$$x_w : \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$$

koja svakoj ceni $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$ pridružuje maksimalan elemenat $x_w(p) \in B_w(p)$, jeste *funkcija zahteva* preference $\succeq$.

Teorema 3.3.5. (1) $x_w(p) \in L_w(p)$; *drugim rečima za svako* $p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ *važi* $p \cdot x_w(p) = p \cdot w$.

(2) *Funkcija zahteva je homogena funkcija stepena nula; drugim rečima, ako je* $\lambda > 0$ *i* $p \gg 0$ *tada je* $\lambda x_w(p) = x_w(\lambda p)$.

Dokaz. (1) Sledi iz Teoreme 3.3.2 (3).

(2) Sledi iz jednakosti $\lambda B_w(p) = B_w(\lambda p)$ ako je $\lambda > 0$ i $p \gg 0$. $\square$

Definicija 3.3.2. Neka je $\succeq$ preferenca na $\mathbb{R}^n_+$. Preferenca $\succeq$ je *neoklasična*, ako je $\succeq$ neprekidna, i važi jedan od sledeća dva uslova:

(1) $\succeq$ je strogo monotona i strogo konveksna; ili

(2) $\succeq$ je strogo monotona i strogo konveksna na $\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+$, i takođe ako je $x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ i $y \in \partial \mathbb{R}^n_+$ onda je $x \succeq y$.

Neoklasične preference iz dela (1) prethodne definicije obično imaju vrednosti funkcije zahteva na $\partial \mathbb{R}^n_+$. Neoklasične preference iz dela (2) prethodne definicije uvek imaju vrednosti funkcije zahteva u $\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$.

Primer 3.3.1. Razmotrimo funkciju $u(x, y) = xy$, koja je strogo monotona na $\operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+$, i nije strogo konveksna na $\mathbb{R}^n_+$. Neka je preferenca $\succeq$ definisana funkcijom korisnosti u. Tada preferenca $\succeq$ ima tačno jedan maksimalan elemenat u budžetskom skupu $B_w(p)$. Funkcija zahteva $p \mapsto x_w(p)$ je dobro definisana i zadovoljava osobine prethodne teoreme.

Primer 3.3.2. Posmatrajmo funkciju korisnosti $u_1(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ za $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$. Neka je $\succeq_1$ odgovarajuća preferenca. U ovom slučaju je preferenca $\succeq_1$ neprekidna, strogo monotona i strogo konveksna na $\mathbb{R}^2_+$. Sa druge strane, ne važi osobina da je svaki vektor iz $\operatorname{Int} \mathbb{R}^2_+$ preferiraniji od svakog vektora iz $\partial \mathbb{R}^2_+$. Na primer, $(1, 0) \succeq_1 (\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$, $(1, 0) \in \partial \mathbb{R}^2_+$ i $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}) \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^2_+$.

Primer 3.3.3. Neka je $u_2(x, y) = xy$ funkcija koristi na $\mathbb{R}^2_+$, i neka je $\succeq_2$ odgovarajuća preferenca. Preferenca $\succeq_2$ je strogo konveksna i strogo monotona na $\operatorname{Int} \mathbb{R}^2_+$. Međutim, $\succeq_2$ nije strogo konveksna na $\partial \mathbb{R}^2_+$. Štaviše, svi vektori iz $\partial \mathbb{R}^2_+$ su indiferentni u odnosu na 0. Stoga, ako $x \in \partial \mathbb{R}^2_+$ i $y \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^2_+$, onda je $y \succ x$.

Napominjemo da strogo pozitivni vektori uvek jesu ekstremno poželjni za neoklasične preference. Izučavaćemo osobine funkcija zahteva koje odgovaraju neoklasičnim preferencama. Najpre razmatramo neprekidnost ovih funkcija.

Teorema 3.3.6. *Neka je $\succeq$ neoklasična preferenca na $\mathbb{R}^n_+$, neka je $w \in \mathbb{R}^n_+$ i $p \in \mathbb{R}^n_+$ tako da važi $p \cdot w > 0$. Ako niz cena $(p_k)_k$ u $\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ zadovoljava uslov $p_k \to p$ i $x_w(p_k) \to x$, tada važe sledeća tvrđenja:*
(1) $p \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$;
(2) $x \in B_w(p)$;
(3) $x = x_w(p)$.

Dokaz. Iz činjenice $p_n \cdot x_w(p_n) = p_n \cdot w$, kao i na osnovu neprekidnosti dejstva cene na robu, sledi da važi $p \cdot x = p \cdot w$. Stoga je $x \in B_w(p)$. Tvrdimo da je x maksimalan elemenat preference $\succeq$ u $B_w(p)$. Da bi ovo proverili, neka je $y \in B_w(p)$. Tada je $p \cdot y \leq p \cdot w$. Kako je $p \cdot w > 0$, sledi da ako je $0 < \lambda < 1$, onda je $p \cdot (\lambda y) < p \cdot w$. Iz $p_k \to p$, te na osnovu neprekidnosti dejstva cene na robu, sledi da postoji neko $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $k \geq k_0$ važi

$$p_k \cdot (\lambda y) < p_k \cdot w = p_k \cdot x_w(p_k).$$

Stoga za svako $k \geq k_0$ važi $x_w(p_k) \succeq \lambda y$. Na osnovu neprekidnosti $\succeq$ sledi $x \succeq \lambda y$ ako je $0 < \lambda < 1$. Neka $\lambda \to 1-$. Još jednom na osnovu neprekidnosti preference $\succeq$ sledi $x \succeq y$. Ovim je dokazano da je x maksimalan elemenat u $B_w(p)$. □

Neka je $f : X \to Y$ proizvoljna funkcija. Graf funkcije f jeste skup

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Ako su X i Y topološki prostori, tada ima smisla ispitivati topološke osobine skupa $G(f)$ u topološkom prostoru $X \times Y$ u odnosu na proizvod topologija. Dokazujemo teoremu o zatvorenom grafiku za neprekidne funkcije.

Teorema 3.3.7. (Teorema o zatvorenom grafiku) *Neka su X, Y topološki prostori, tako da je Y Hausdorfov i kompaktan, i neka je $f : X \to Y$ funkcija. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*
(1) *f je neprekidna funkcija;*
(2) *Skup $G(f)$ je zatvoren u $X \times Y$.*

Dokaz. (1) $\Longrightarrow$ (2): Ako je f neprekidna funkcija, jednostavno proizilazi da je $G(f)$ zatvoren skup u $X \times Y$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Pretpostavimo sada da je $G(f)$ zatvoren u $X \times Y$. Neka je $(x_\alpha)_\alpha$ proizvoljna mreža u X sa svojstvom $x_\alpha \to x \in X$. Neprekidnost funkcije f dokazujemo tako što pokazujemo $f(x_\alpha) \to f(x)$ u prostoru Y. Pretpostavimo suprostno, odnosno nije tačno da $f(x_\alpha) \to f(x)$. Postoji otvorena okolina V tačke $f(x)$ i postoji podmreža $(y_\beta)_\beta$ od $(x_\alpha)_\alpha$, tako da $f(y_\beta) \notin V$ za svako β. Skup Y je kompaktan, te postoji podmreža $(z_\gamma)_\gamma$ od $(y_\beta)_\beta$, tako da $f(z_\gamma) \to u$ u prostoru Y. Očigledno, $u \notin V$, te je $u \neq f(x)$. Sa druge strane, $(z_\gamma, f(z_\gamma)) \to (x, u)$ u $X \times Y$. Na osnovu zatvorenosti skupa $G(f)$ sledi da je $u = f(x) \in V$, što je suprotno našem razmatranju. Sledi da funkcija f mora biti neprekidna u proizvoljnoj tački $x \in X$. $\square$

Primer 3.3.4. Ako Y nije kompaktan skup, zatvorenost skupa $G(f)$ ne implicira nužno neprekidnost funkcije f. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Tada je $G(f)$ zatvoren skup u $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ali funkcija f nije neprekidna na $\mathbb{R}$.

Primer 3.3.5. Neka je $X = \mathbb{R}$ sa standardnom topologijom, i neka je $Y = \mathbb{R}$ sa diskretnom topologijom. Drugim rečima, svaki podskup od Y je otvoren u Y. Posmatrajmo funkciju $f : X \to Y$ definisanu kao $f(x) = x$. Tada je $G(f)$ zatvoren skup u $X \times Y$, a funkcija f je prekidna u svakoj tački $x \in X$.

Neprekidnost funkcije zahteva ima sledeću motivaciju: "male" promene cene p treba da izazovu "male" promene u zahtevanom vektoru.

Teorema 3.3.8. *Svaka funkcija zahteva koja odgovara nekoj neoklasičnoj preferenci na $\mathbb{R}^n_+$, jeste neprekidna.*

Dokaz. Neka je $\succeq$ neoklasična preferenca na $\mathbb{R}^n_+$, i neka je $w \in \mathbb{R}^n_+$. Funkciju zahteva $p \mapsto x_w(p)$ posmatramo koordinatno:

$$x_w(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)).$$

Ako je $r, s \in \mathbb{R}^n$, koristimo standardnu oznaku za n-interval:

$$[r, s] = \{z \in \mathbb{R}^n : r \leq z \leq s\}.$$

Neka je $p \gg 0$. Postoji n-interval $[r, s]$, tako da je $r \gg 0$ i $p \in \mathrm{Int}[r, s]$. Neka je $r_j = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$. Ako je $q = (q_1, \ldots, q_n) \in [r, s]$, tada je

$$q_i x_i(q) \leq \sum_{k=1}^{n} q_k x_k(q) = q \cdot x_w(q) = q \cdot w \leq s \cdot w.$$

Stoga je

$$x_i(q) \leq \frac{s \cdot w}{q_i} \leq \frac{s \cdot w}{r} = M < \infty,$$

i poslednja nejednakost važi za svako $i = 1, \ldots, n$. Sledi da je funkcija $p \mapsto x_w(p)$ ograničena na $[r, s]$. Stoga je i skup $Y = \mathrm{cl}(x_w([r, s]))$ kompaktan u $\mathbb{R}^n_+$. Da bi dokazali neprekidnost funkcije x_w u ceni p, dovoljno je dokazati neprekidnost ove funkcije na $[r, s]$. Prema Teoremi o zatvorenom grafiku, dovoljno je dokazati da je skup $G(x_w)$ zatvoren.

U tu svrhu, neka je $(q_k)_k$ niz u $[r, s]$ koji zadovoljava uslov $q_k \to q$ i $x(q_k) \to x$. Prema Teoremi 3.3.6 važi $x = x_w(q)$. Dakle, funkcija $x_w : [r, s] \to Y$ ima zatvoren grafik, te je neprekidna. $\square$

Sada dajemo ekonomsku interpretaciju postignutih rezultata. Vektorski prostor $\mathbb{R}^n_+$ može biti posmatran kao prostor robe razmatrane ekonomije. Broj n u ovom slučaju predstavlja broj raspoloživih tipova robe. Preferenca predstavlja "ukus" kupca. Vektor w predstavlja početnu vrednost koju kupac ima. Vektor $p = (p_1, \ldots, p_n)$ reprezentuje cene. Pri tome p_i je cena robe po redu i. Vektor zahteva $x_w(p)$ predstavlja vektor robe koji maksimizira funkciju korisnosti pod uslovima datog budžeta w. Ako je $w_w(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$, tada

$$\|x_w(p)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i(p)| \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i(p)$$

reprezentuje totalan broj jedinica dobra koje zahteva kupac.

Ako cene teže ka rubnim vrednostima, onda neka dobra postaju previše jeftina, te zahtev za ovim dobrima može postati previše veliki. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 3.3.9. *Neka je $\succeq$ neoklasična prefereca na $\mathbb{R}^n_+$, neka je $w \in \mathbb{R}^n_+$, i neka je $x_w(\cdot) = (x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ funkija zahteva koja odgovara preferenci $\succeq$. Neka je $(p_k)_k$ niz strogo pozitivnih vektora koji zadovoljava uslov*

$$p_k = (p_1^k, \ldots, p_n^k) \to p = (p_1, \ldots, p_n).$$

Tada važi:

(1) *Ako je $p_j > 0$ za neko j, onda je $(x_j(p_k))_k$ ograničen niz u $\mathbb{R}$.*

(2) *Ako je $p \in \partial\mathbb{R}^n_+$ i $p \cdot w > 0$, tada je*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_w(p)\|_1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i(p_k) = \infty.$$

Dokaz. Neka je $(p_k)_k$ niz strogo pozitivnih cena koje zadovoljavaju uslove ove teoreme. Neka je $q \gg 0$ tako da je $p_k \leq q$ za svako k.

(1) Pretpostavimo da postoji j tako da je $p_j > 0$. Iz $p_k \gg 0$ i $\lim\limits_{k\to\infty} p_j^k = p_j$ sledi da postoji neko $\delta > 0$ tako da je $p_j^k > \delta$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Razmotrimo nejednakost

$$p_j^k x_j(p_k) \leq \sum_{i=1}^n p_i^k x_i(p_k) = p_k \cdot x_w(p_k) = p_k \cdot w \leq q \cdot w.$$

Sledi da

$$x_j(p_k) \leq \frac{q \cdot w}{p_j^k} \leq \frac{q \cdot w}{\delta} < \infty$$

važi za svako $k \in \mathbb{N}$. Prema tome, $(x_j(p_k))_k$ je ograničen niz u $\mathbb{R}$.

(2) Ako niz $(x_w(p_k))_k$ sadrži ograničen podniz, tada prelaskom na taj konvergentan podniz, koji ćemo jednostavnosti radi označiti sa $(x_w(p_k))_k$, sledi da važi $x_w(p_k) \to x$ u $\mathbb{R}^n_+$. Tada prema Teoremi 3.3.6 važi $p \gg 0$, što je suprotno pretpostavci $p \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Sledi zaključak. $\square$

Deo (2) prethodne teoreme tvrdi da ako cene opadaju ka nuli, onda kolektivan zahtev teži ka beskonačnosti. Napominjemo da ako jedna individualna cena pada ka nuli, onda nije nužno da odgovarajući zahtev za konkretnom robom teži ka beskonačnosti.

Primer 3.3.6. Razmotrimo na prostoru $\mathbb{R}^3_+$ preferencu određenu funkcijom korisnosti

$$u(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{z}{1+z}.$$

Neka je $w = (1, 1, 1)$. Važe tvrđenja:

(1) u je strogo monotona, strogo konkavna i neprekidna funkcija korisnosti.

(2) Ako je $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$ i $z > 0$, tada je $(x, y + z, 0) \succ (x, y, z)$.

(3) Ako je $p = (p_1, p_2, p_3) > 0$ i $p_2 = p_3$, tada zahtevani vektor $x_w(p) = (x(p), y(p), z(p))$ zadovoljava $z(p) = 0$.

(4) Neka je $p_k = (1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. Tada je $p_k \to (1, 0, 0)$. Ako je $x_w(p_k) = (x(p_k), y(p_k), z(p_k))$ zahtevani niz, tada je $z(p_k) = 0$ za svako k. Prema tome, zathev za trećom robom ostaje ograničen i pored činjenice da cena treće robe opada ka nuli.

(5) $\lim\limits_{k\to\infty} y(p_k) = \infty$.

3.4 Ekonimija razmene

U teoriji međunarodne trgovine razmatramo više država koje razmenjuju dobrana tržistu prema fiksiranim uslovima trgovine. Dokazaćemo postojanje odnosa cene - uslovi trgovine. Takve cene se nazivaju *cene ekvilibrijuma*.

Dajemo opštu definiciju ekonomije razmene sa konačno dmenzionalnim prostorom robe.

Definicija 3.4.1. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih preferenci na $\mathbb{R}^n_+$, neka je $A \neq$ skup agenata (ili potrošača) i neka je $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}^n_+ \times \mathcal{P}$ funkcija. Tada je $\mathcal{E}$ ekonomija razmene.

Ako je $i \in A$, tada je $\mathcal{E}_i = (w_i, \succeq_i) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathcal{P}$ karakteristika agenta i. Elemenat w_i jesu se početna raspoloživa sredstva agenta i, a $\succeq_i$ je prefernca po kojoj agent i određuje svoj izbor.

Neka je p vektor cene. Nenegativan realan broj $\varpi := p \cdot w_i$ jeste prihod agenta i po ceni p.

Ako je A konačan skup, onda vektor $w = \sum\limits_{i\in A} w_i$ jesu totalna početna sredstva.

Definicija 3.4.2. Ako ekonomija razmene $\mathcal{E} : A \to \mathbb{R}^n_+ \times \mathcal{P}$ ispunjava sledeće uslove:

(1) Skup agenata A je konačan:

(2) Svaki agent $i \in A$ ima nenula početna raspoloživa sredstva w_i, i prefernca $\succeq_i$ je neoklasična;

(3) Totalna početna sredstva $w = \sum_{i \in A} w_i$ su strogo pozitivna, odnosno $w \gg 0$.

Nadalje je $\mathcal{E}$ neoklasična ekonomija. U ovom slučaju svaki agent $i \in A$ ima neoklasičnu preferencu $\succeq_i$. Stoga postoji funkcija zahteva $x_i : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$. Neka je $x = \sum_{i \in A} x_i$ ukupna funkcija zahteva. Tada je $x(p) = \sum_{i \in A} x_i(p)$ ukupan zahtev.

Definicija 3.4.3. Ako je $\mathcal{E}$ neoklasična ekonomija razmene, tada je eksces funkcije zahteva funkcija $\zeta : \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$, definisana kao

$$\zeta(p) = x(p) - w.$$

ζ je vektorska funkcija, koja može biti prikzana koordinatno:

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n).$$

Dokazujemo osnovna tvrđenja ekscesa funkcije zahteva.

Teorema 3.4.1. *Eksces funkcije zahteva ζ neoklasične ekonomije razmene ima sledeća svojstva:*

(1) *ζ je homogena funkcija stepena nula, odnosno ako je $p \gg 0$ i $\lambda > 0$, onda je $\zeta(\lambda p) = \zeta(p)$.*

(2) *ζ je neprekidna i ograničena odozdo;*

(3) *ζ zadovoljava Valrasovo pravilo: $p \cdot \zeta(p) = 0$ za svako $p \gg 0$.*

(4) *Ako niz strogo pozitivnih cena $(p_k)_k$ zadovoljava uslov*

$$p_k = (p_1^k, \dots, p_n^k) \to p = (p_1, \dots, p_n) \quad (k \to \infty),$$

i ako je $p_j > 0$ za neko $j \in \{1, \dots, n\}$, tada je niz $Big(\zeta_j(p_k)\Big)_k$ ograničen.

(5) *Ako je $p_k \gg 0$ za svako k, i ako je $p_k \to p \in \partial \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$, tada postoji bar jedan $j \in \{1, \dots, n\}$ tako da je $\limsup_{k \to \infty} \zeta_j(p_k) = \infty$.*

Dokaz. (1) Zaključak sledi iz činjenice da je $x_i(\lambda p) = x_i(p)$ ispunjeno za svako $i \in A$, svako $p \gg 0$ i svako $\lambda > 0$.

(2) Neprekidnost ekscesa funkcije zahteva sledi iz ranije Teoreme xxx. Kako je $x_i(p) \geq 0$ za svako $i \in a$, sledi da važi $\zeta(p) \geq -w$ za svako $p \in \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_+$. Prema tome, ζ je ograničena odozdo.

(3) Ako je $p \gg 0$, tada je

$$p \cdot \zeta(p) = p \cdot \sum_{i \in A}(x_i(p) - w_i) = \sum_{i \in A}(p \cdot x_i(p) - p \cdot w_i) = \sum_{i \in A} 0 = 0.$$

Tvrđenja (4) i (5) slede iz Teoreme xxx+1. □

Definicija 3.4.4. Neka je ζ eskces funkcije zahteva neoklasične ekonomije $\mathcal{E}$. Strogo pozitivna cena p je cena ekvilibrijuma za $\mathcal{E}$, ako je $\zeta(p) = 0$.

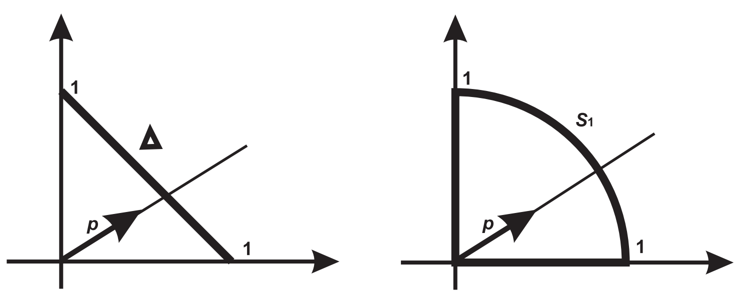
Važno pitanje u ovom delu jeste da li postoji cena ekvilibrijuma za neoklasične ekonomije? Odgovor je potvrdan, prema teoremi Arou-Debroa.

Funkcija ζ je homogena stepena homogenosti 0. Stoga, $\zeta(\lambda p) = \zeta(p)$ za svako $p \gg 0$ i svako $\lambda > 0$. Ako je p strogo pozitivna cena ekvilibrijuma, tada cela poluprava $\{\lambda p : \lambda > 0\}$ sastoji se od cena ekvilibrijuma. Pretraživanje cena ekvilibrijuma svodi se na pretraživanje skupa koji na svakoj polupravoj navedeno tipa ima po jednu tačku.

Često korišćene normalizacije cena jesu sledeći skupovi (Slika 3.4.1):

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : p_1 + \cdots + p_n = 1\},$$

$$S_{n-1} = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : (p_1)^2 + (p_2)^2 + \cdots + (p_n)^2 = 1\}.$$



Slika 3.4.1.

Razmatraćemo skup Δ, koji je očigledno kompaktan i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n_+$. Skup svih strogo pozitivnih cena od Δ jeste S:

$$S = \{p \in \Delta : p_j > 0, \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Eksces funkcije zahteva ζ sada ispitujemo kao funkciju $\zeta : S \to \mathbb{R}^n$, koja ima sledeće osobine:

Teorema 3.4.2. *Ako je $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ eksces funkcije zahteva neoklasične ekonomije $\mathcal{E}$, onda važe tvrđenja:*

(1) ζ je neprekidna i ograničena odozdo na S.

(2) ζ zadovoljava Valrasovo pravilo: $p \cdot \zeta(p) = 0$ za svako $p \in S$.

(3) Ako je $(p_k)_k$ niz cena u S, tako da $p_k \to p = (p_1, \ldots, p_n)$ i ako je $p_j > 0$, tada je niz $(\zeta_j(p)k))_k$ ograničen.

(4) Ako je $(p_k)_k$ niz u S i $p_k \to p \in \partial S$, tada je $\lim\limits_{k\to\infty} \|\zeta(p_k)\|_1 = \infty$.

Definicija 3.4.5. Višeznačna funkcija (korespodenca) iz skupa X u skup Y je funkcija $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$. Grafik korespodence φ jeste

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X,\ y \in \varphi(x)\}.$$

Definicija 3.4.6. Neka su X, Y topološki prostori, i neka je $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ korespodenca. φ ima zatvoren grafik, ako je $G(\varphi)$ zatvoren podskup topološkog prostora Y.

Definicija 3.4.7. Neka je $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ korespodenca. Elemenat $x \in X$ je fiksna tačak korespodence φ, ako je $x \in \varphi(x)$.

Formulišemo bez dokaza Teoremu Kakutanija.

Teorema 3.4.3. (Kakutani) *Neka je K neprazan, kompaktan i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$, i neka je $\varphi : K \to \mathcal{P}(K)$ neprazna preferenca zatvorenog grafika. Ako je φ konveksno vrednosta, tada postoji fiksna tačka $x \in K$ preslikavanja φ, odnosno $x \in \varphi(x)$.*

Sada dokazujemo rezultat kojim se obezbeđuje postojanje cene ekvilibrijuma za svaku neoklasičnu ekonomiju.

Teorema 3.4.4. *Pretpostavimo da funkcija $\zeta : S \to \mathbb{R}^n$ zadovoljava uslove Teoreme 3.4.2. Tada postoji bar jedan vektor $p \in S$ tako da je $\zeta(p) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija $\zeta : S \to \mathbb{R}^n$ zadovoljava sve uslove Teoreme 3.4.2, i neka je $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Za svako $p \in S$ definišemo podskup $\Lambda(p)$ skupa $\{1, \ldots, n\}$ na sledeći način:

$$\Lambda(p) = \{j \in \{1, \ldots, n\} : \zeta_j(p) = \max\{\zeta_i(p) : i = 1, \ldots, n\}\}.$$

Drugim rečima, ako $p \in S$, tada se skup $\Lambda(p)$ sastoji od onih roba, koje imaju najveći eksces zahteva. Očigledno je $\Lambda(p) \neq \emptyset$. Neka je $p \in \Delta \setminus S = \partial S$. Tada je

$$\Lambda(p) = \{j \in \{1, \ldots, n\} : p_j = 0\}.$$

I u ovom slučaju je $\Lambda(p) \neq \emptyset$.

Definišemo korespodencu $\varphi : \Delta \to \mathcal{P}(\Delta)$ kao:

$$\varphi(p) = \{q \in \Delta : q_j = 0 \text{ za svako } j \notin \Lambda(p)\}.$$

Kako je $\Lambda(p) \neq \emptyset$, jednostavno sledi $\varphi(p) \neq \emptyset$ za svako $p \in \Delta$. Skup $\varphi(p)$ je konveksan i kompaktan podskup od Δ. Specijalno, ako je $\Lambda(p) = \{1, \ldots, n\}$, onda je $\varphi(p) = \Delta$.

Na ovaj način definisali smo korespodencu $\varphi : \Delta \to \mathcal{P}(\Delta)$, koja je neprazna, kompaktna i konveksno vrednosna.

Tvrdimo da φ ima zatvoren grafik. U tu svrhu, neka je $p_k \to p$ u Δ, i $\pi_k \to \pi$ u Δ, pri čemu je $\pi_k \in \varphi(p_k)$ za svako k. Treba pokazati $\pi \in \varphi(p)$. Razlikujemo dva slučaja.

Prvi slučaj: Neka je $p \in S$.

Možemo pretpostaviti da je $p_k \gg 0$ za svako k. Neka $k \notin \Lambda(p)$. To znači da je

$$\zeta_j(p) < \max\{\zeta_i(p) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Funkcija ζ je neprekidna u tački p, te postoji m tako da za $k \geq m$ važi

$$\zeta_j(p_k) < \max\{\zeta_i(p_k) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Stoga, ako je $k \geq m$ onda je $k \notin \Lambda(p_k)$. Na osnovu

$$\pi_k = (\pi_1^k, \ldots, \pi_n^k) \in \varphi(p_k)$$

sledi $\pi_j^k = 0$ za svako $k \geq m$. Kako je $\pi_k \to \pi$, sledi $\lim\limits_{k\to\infty} \pi_j^k = \pi_j$, te je $\pi_j = 0$. Dakle, $\pi_j = 0$ za svako $j \notin \Lambda(p)$, te je $\pi \in \varphi(p)$.

Drugi slučaj: Neka je $p \in \Delta \setminus S = \partial S$.

Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $p = (0, \ldots, 0, p_{r+1}, \ldots, p_n)$, pri čemu je $1 \leq r < n$, kao i $p_i > 0$ za $i = r+1, \ldots, n$.

Sada opet razlikujemo dva podslučaja.

Prvi podslučaj: Pretpostavimo da postoji podniz od $(p_k)_k$, koji pripada skupu S. Bez gubljenja opštosti, taj podniz označimo takođe sa $(p_k)_k$.

U ovom podslučaju je $\Lambda(p) = \{1, \ldots, r\}$, te je

$$\varphi(p) = \{q \in \Delta : q_i = 0 \text{ za } i = r+1, \ldots, n\}.$$

Na osnovu pretpostavki teoreme, sledi da je niz $(\zeta_i(p_k))_k$ ograničen za svako $i = r+1, \ldots, n$ i takođe $\lim\limits_{k\to\infty} \|\zeta(p_k)\|_1 = \infty$. Kako je ζ ograničena odozdo, sledi da postoji k_0 tako da je $\Lambda(p_k) \subset \{1, \ldots, r\}$ za svako $k \geq k_0$. Imajući u vidu i $\pi_k \in \varphi(p_k)$, sledi da je $\pi_k \in \varphi(p)$ za svako $k \geq k_0$. Prema tome, $\pi = \lim\limits_{k\to\infty} \pi_k \in \varphi(\pi)$.

Drugi podslučaj: Pretpostavimo da ni jedan podniz od $(p_k)_k$ ne pripada skupu S.

U ovom podslučaju je $(p_k)_k$ sadržan u ∂S, te je $p = (0, \ldots, 0, p_{r+1}, \ldots, p_n)$. Kako je $\lim\limits_{k\to\infty} p_i^k = p_i$ za svako $i = 1, \ldots, n$, sledi da postoji neko m tako da za $k \geq m$ važi $\Lambda(p_k) \subset \{1, \ldots, r\}$. Iz $\pi_k \in \varphi(p_k)$, sledi da je $\pi_i^k = 0$ za $k \geq m$ i svako $i = 1, \ldots, n$. Kako $\pi_k \to \pi$, sledi da je $\pi_i = 0$ za svako $i = r+1, \ldots, n$, te je $\pi \in \varphi(p)$.

Upravo smo dokazali da φ ima zatvoren grafik. Prema Kakutanijevoj teoremi o fiksnoj tački, sledi da φ ima fiksnu tačku, recimo p, odnosno $p \in \varphi(p)$.

Tvrdimo da je p cena ekvilibrijuma.

Primetimo da je $p \notin \partial S$. Ako bi bilo $p \in \partial S$, onda bi važilo $p_j = 0$ za svako $j \in \Lambda(p)$. Kako je $p \in \varphi(p)$, onda bi bilo $p_j = 0$ za svako $j \notin \Lambda(p)$, odakle sledi $p = 0 \notin \Delta$, što je nemoguće. Stoga je $p \in S$, odnosno $p \gg 0$.

Neka je $m = \max\{\zeta_i(p) : i = 1, \ldots, n\}$. Primetimo da je $p_i > 0$ za svako $i = 1, \ldots, l$. Stoga $p \in \varphi(p)$ implicira $\Lambda(p) = \{1, \ldots, n\}$. Ovo znači da je $\zeta_i(p) = m$ za svako i. Sa druge strane, koristeći Valrasovo pravilo, sledi da je

$$m = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) m = sum_{i=1}^{n} p_i \zeta_i(p) = p \cdot \zeta(p) = 0.$$

Odavde sledi $\zeta(p) = 0$. Time je kompletiran dokaz teoreme. □

Imajući u vidu da svaka funkcija zahteva neoklasične ekonomije zadovoljava uslove prethodne teoreme, proizilazi rezultat Arou-Debroa o postojanju ekvilibrijumske cene za neoklasične ekonomije.

Teorema 3.4.5. (Arou-Debro) *Svaka neoklasična ekonomija razmene ima ekvilibrijumsku cenu. Drugim rečima postoji najmanje jedna cena* $p \gg 0$ *koja zadovoljava uslov* $\zeta(p) = 0$.

Prethodni dokaz garantuje postojanje cene ekvilibrijuma, ali ne daje metod za njegovo nalaženje. Nije jednostavno predvideti gde se nalazi ekvilibrijumska cena, čak i u jednostavnim slučajevima.