Metode funkcionalne analize u ekonomiji: zadaci i problemi

– vežbe za studente –

January 12, 2021

Sadržaj

Glava 1

Tržisne ekonomije

1.1 Preference, funkcija korisnosti, maksimalni elementi

1.1.1. Za $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ neka je:

$$x \geq y \quad \text{ako i samo ako} \quad x_j \geq y_j \quad \text{za svako } j = 1, \dots, n.$$

Dokazati da $\geq$ nije preferenca na $\mathbb{R}^n$. Pod kojim uslovima je $\geq$ preferenca?

Rešenje. Ispunjeni su uslovi $x \geq x$, kao i

$$x \geq y,\ y \geq z \implies x \geq z.$$

Međutim, nije ispunjen uslov

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ x \geq y \text{ ili } y \geq x.$$

$\geq$ je preferencama na svim pravama koje prolaze kroz koordinatni početak. □

1.1.2. Neka je data funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $f''(t) < 0$ za svako $t \in (a, b)$. Dokazati da je f strogo konkavna funkcija.

1.1.3. Data je funkcija $f(t) = t^2$ za $t \in (0, +\infty)$. Dokazati da je f strogo kvazikonkavna, ali nije konkavna.

Rešenje. Funkcija f je strogo rastuća. Neka je $x, y \in (0, +\infty)$, $x < y$, $0 < t < 1$ i $z = tx + (1-t)y$. Tada je z između tačaka x i y. Važi

$$\begin{aligned} f(z) &= \Big(tx + (1-t)y\Big)^2 = t^2x^2 + (1-t)^2y^2 > t^2x^2 + (1-t)^2x^2 \\ &= \Big(tx + (1-t)x\Big)^2 = x^2 = f(x) = \min\{f(x), f(y)\}. \end{aligned}$$

Stoga je funkcija $f : (0, +\infty)$ je strogo kvazikonkavna.

Prvi način: Kako je $f''(t) = 2 > 0$, sledi da je $-f$ strogo konkavna funkcija, te f nije strogo konkavna funkcija.

Drugi način: Na osnovu $0 < t < 1$ sledi da je $0 < t^2 < 1$. Stoga je

$$f(z) = t^2x^2 + (1-t)^2y^2 < tx^2 + (1-t)y^2 = tf(x) + (1-t)f(y),$$

odakle sledi da je f strogo konveksna, te nije strogo konkavna.

□

1.1.4. Neka je K konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$, i neka je data funkcija $f : K \to \mathbb{R}$. Dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(1) f je kvazi-konkavna;

(2) Za svaku konveksnu kombinaciju $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ u K važi

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right) \geq \min\{f(x_j) : j = 1, \ldots, n\}.$$

Rešenje. (1) $\Longrightarrow$ (2): Tvrđenje dokazujemo matematičkom indukcijom po dužini n konveksne kombinacije. Pretpostavimo da je f kvazi-konkavna. Ako je $n = 1$, tvrđenje (2) je trivijalno. Ako je $n = 2$, onda se tvrđenje (2) svodi na pretpostavku (1), te je tvrđenje (2) tačno.

Pretpostavimo da je tvrđenje (2) tačno za sve konveksne kombinacije dužine n, i dokažimo da je tvrđenje (2) tačno za sve konveksne kombinacije dužine $n + 1$.

Neka je $y = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j$, pri čemu je $x_j \in K$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$ i $\sum\limits_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1$. Ako je $\alpha_{n+1} = 1$, onda je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, te je $y = x_{j+1}$ i tvrđenje (2) trivijalno važi. Stoga pretpostavimo da je $0 \leq \alpha_{n+1} < 1$. U ovom slučaju neka je $\beta_j = \frac{\alpha_j}{1-\alpha_{n+1}}$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada je $\beta_j \geq 0$ i $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j = 1$, te je je $z = \sum\limits_{j=1} \beta_j x_j$ konveksna kombinacija dužine n za koju važi indukcijska hipoteza. Stoga je

$$f(z) \geq \min\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

Sada je

$$y = (1 - \alpha_{n+1})z + \alpha_{n+1}x_{n+1}$$

konveksna kombinacija dužine 2 za koju je tvrđenje (2) tačno. Stoga je

$$f(y) \geq \min\{f(z), f(x_{n+1})\} \geq \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n+1}).$$

Time je tvrđenje (2) dokazano.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Ako je u tvrđenju (2) $n = 2$, onda se tvrđenje (2) svidi na tvrđenje (1). $\square$

1.1.5. Neka je $\succeq$ preferenca na topološkom prostoru X. Ako je $u : X \to \mathbb{R}$ funkcija korisnosti koje reprezentuje $\succeq$ i ako je $\succeq$ neprekidna preferenca, da li je funkcija u takođe neprekidna?

1.1.6. Opisati preference date funkcijama korisnosti:

$$u_1(x, y) = x + y,\ u_(x, y) = xy,\ u_3(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$
$$u_4(x, y) = y(1 + x),\ u_5(x, y) = (x + 1)(y + 2).$$

Skicirati krive indiferenci ovih preferenci.

1.1.7. Razmotriti dve preference na $\mathbb{R}^2_+$ definisane funkcijama

$$u_1(x, y) = x, \quad u_2(x, y) = y.$$

Opisati preference i skicirati grafike kriva indiferenci.

1.1.8. Data je funkcija korisnosti $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na $\mathbb{R}^3_+$. Da li ova funkcija reprezentuje konveksnu preferencu? Skicirati krivu indiference funkcije u.

1.1.9. Neka je K neprezan konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $u : K \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Dokazati ekvivalentnost sledećih tvrđenja:

(1) u je konkavna funkcija na K;

(2) Skup $\{(x, t) \in K \times \mathbb{R} : t \leq u(x)\}$ je konveksan skup.

1.1.10. Dokazati da postoji nprekidna kvazi-konkavna funkcija korisnosti $u : \mathbb{R}^n_+$ koja nije monotona.

Rešenje. $u(x_1, \ldots, x_n) = e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}$ za $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. □

1.1.11. Neka je K konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Za svako $i = 1, \ldots, m$ neka je $u_i : K \to \mathbb{R}$ funkcija korisnosti. Pretpostavimo da je $\lambda_i > 0$ za svako $i = 1, \ldots, m$. Funkcija $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definisana kao

$$V(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \qquad (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m,$$

jeste socijalna funkcija dobiti.

Neka je data funkcija $U : K^m \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$U(x_1, \ldots, x_m) = V(u_1(x_1), \ldots, u_m(x_m)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i(x_i).$$

Dokazati sledeća tvrđenja:

(1) Ako je svaka funkcija u_i konkavna, tada je U takođe konkavna;

(2) Ako je svaka funkcija u_i strogo konkavna, tada je U strogo konkavna;

(3) Ako je svaka u_i kvazi-konkavna, da li je U obavezno kvazi-konkavna.

1.1.12. Neka je K konveksan skup u $\mathbb{R}^n$. Za svako $i = 1, \ldots, m$ neka je $u_i : K \to \mathbb{R}$ funkcija korisnosti. Neka je definisana funkcija $V : K^m \to \mathbb{R}$ kao

$$V(x_1, \ldots, x_m) = \min\{u_1(x_1), \ldots, u_m(x_m)\}.$$

Ako su sve funkcije u_i kvazi-konkavne, dokazati da je V takođe kvazi-konkavna. Ako su sve funkcije u_i konkavne, da li je i V konkavna funkcija.

1.1.13. Neka je $\succeq$ monotona preferenca na $\mathbb{R}^n_+$. Ako $\succeq$ ima ekstremno poželjan vektor, dokazati da svako $w \in \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$ takođe jeste ekstremno poželjan vektor. Dokazati da je $\succeq$ strogo monotona na $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$.

Rešenje. Ako je v ekstremno poželjan vektor za $\succeq$, i ako je $w \in \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$, tada odabrati neko $\alpha > 0$ tako da je $w - \alpha v \geq 0$. Primetiti da za svako $x \in \mathbb{R}^n_+$ važi $x + w = x + (w - \alpha v) \succeq x + \alpha v \succ x$. □

1.1.14. Ako je preferenca $\succeq$ na $\mathbb{R}^n_+$ neprekidna, konveksna i strogo monotona, tada dokazati da $x \succ y$ u $\mathbb{R}^n_+$ implicira $\alpha x + (1-\alpha)y \succ y$ za svako $\alpha \in (0,1)$.

1.1.15. Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija. Dokazati da f ima levi i desni izvod u svakoj tački intervala (a,b).

1.1.16. Dat je kompaktan skup $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : 2x + 3y \leq 2\}$. Naći jedinstvene maksimalne elemente za funkcije korisnosti:

(1) $y(x,y) = xy^2$;

(2) $u(x,y) = x(y+3)$;

(3) $u(x,y) = \min\{x,y\}$.

1.1.17. Dat je kompakt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2^+ : (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 1\}$. Naći jedinstven maksimalan elemenat na K funkcije korisnosti $u(x,y) = xy$.

1.1.18. Data je funkcija korisnosti $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ kao $u(x,y) = \min\{x^2 y, xy\}$.

(1) Opisati krive indiference od u;

(2) Dokazati da je u neprekidna, monotona i kvazi-konkavna funkcija;

(3) Naći jedinstven maksimalan elemenat funkcije korisnosti u u konveksnom i kompaktnom skupu $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2^+ : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1.1.19. Neka je $w \in \mathbb{R}^n_+$, $w > 0$, i neka je fukcija korisnosti $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ definisana kao

$$u(x) = \langle p, x \rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j x_j, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n_+$, i neka je K konkvesna obvojnica od X, odnosno

$$K = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j : \alpha_i \geq 0 \text{ za svako } i, \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \right\}.$$

Dokazati da je bar jedan od elemenata x_i maksimalan elemenat funkcije u na skupu K.

1.1.20. Neka je $(X, \mathcal{R}, \mu)$ prostor konačne mere μ, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Funkcija korisnosti $u : L_p^+(X, \mathcal{R}, \mu) \to \mathbb{R}$ definisana je kao

$$u(f) = \int\limits_X \sqrt{f} d\mu, \quad f \in L_p^+(X, \mathcal{R}, \mu).$$

(1) Dokazati da je u dobro definisana, odnosno da iz $f \in L_p^+(X, \mathcal{R}, \mu)$ sledi $\sqrt{f} \in L_1^+(X, \mathcal{R}, \mu)$;

(2) Dokazati da je u strogo konkavna, strogo monotona i neprekidna po normi.

(3) Dat je skup

$$B = \{f \in L_p^+(X, \mathcal{R}, \mu) : \|f\|_p \leq 1\}.$$

Dokazati da je konstantna funkcija $f_0 = (\mu(X))^{-1/p}$ jedinstven maksimalan elemenat funkcije u na skupu B.

1.1.21. Neka je $\succeq$ preferenca na topološkom prostoru, i neka je $\succeq$ reprezentovana funkciom korisnosti u. Pretpostavimo da u prostoru X za svaki uopšten niz $(x_\alpha)_\alpha$ važi implikacija: ako $x_\alpha \to x$ u X, onda $\limsup_\alpha u(x_\alpha) \leq u(x)$. Dokazati da je preferenca $\succeq$ odozgo poluneprekidna.

1.1.22. Neka je $\langle X, X' \rangle$ dualan par vektorskih prostora, neka je K neprazan, konveksan i slabo zatvoren podskup od X. Neka je $u : K \to \mathbb{R}$ kvazi-konkavna funkcija, koja je neprekidna u smislu Makkija. Dokazati da za svaki uopšten niz $(x_\alpha)_\alpha$ u K važi implikacija: ako $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ onda $\limsup_\alpha u(x_\alpha) \leq ux)$.

Rešenje. Pretpostavimo da je $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ u K, i neka je $\limsup\limits_\alpha u(x_\alpha) > u(x)$. Neka je $\epsilon > 0$ tako da je $\limsup\limits_\alpha u(x_\alpha) > u(x) + \epsilon > u(x)$. Prelaskom na podmrežu, bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da postoji $\lim\limits_\alpha u(x_\alpha)$. Kako je $u(K)$ povezan skup, odnosno segment u $\mathbb{R}$, postoji neko $z \in K$ sa svojstvom $u(x) + \epsilon > u(z) > u(x)$. Proizilazi da je $u(x_\alpha) > u(z)$ za dovoljno veliko α. Na osnovu slabe poluneprekidnosti odozgo funkcije u, proizilazi da je $u(x) > u(x)$, što je nemoguće. $\square$