GLAVA I - Normalni sistem diferencijalnih jednačina

1. Osnovni pojmovi, definicije i teoreme

Sistem diferencijalnih jednačina u normalnom obliku:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
&\vdots\\
y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{1}
$$

za date funkcije $f_i : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Definicija 1 *Neka je $\mathbb{D}$ oblast definisanosti sistema* DJ (1). *Skup funkcija*

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x),$$

definisanih na intervalu (a, b), predstavlja rešenje ovog sistema ako za svako $x \in (a, b)$ važi:

1. $\exists\, \varphi_i'(x),\ i = 1, 2, \ldots, n;$
2. $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in \mathbb{D};$
3. $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)),\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Košijev problem za sistem DJ (1): *Za datu tačku $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$ odrediti rešenje*

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

sistema (1), *definisano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava početne uslove*

$$\varphi_1(x_0) = y_1^0,\ \varphi_2(x_0) = y_2^0,\ \ldots,\ \varphi_n(x_0) = y_n^0. \tag{2}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \mathbf{y}' = (y_1', y_2', \dots, y_n')^T,$$

vektorska funkcija: $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \dots, f_n(x, \mathbf{y}))^T$

SISTEM (1) PREDSTAVLJEN U VEKTORSKOM OBLIKU:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \tag{3}$$

Definicija 2 *Vektorska funkcija* $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ *je rešenje vektorske* DJ (3) *na intervalu* (a, b), *ako za svako* $x \in (a, b)$ *važi:*

1. $\exists\, \varphi'(x)$;
2. $(x, \varphi(x)) \in \mathbb{D}$;
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Košijev problem za sistem DJ (3): *Za datu tačku* $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ *odrediti rešenje* $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ *sistema* (3), *definisano u nekoj okolini tačke* x_0, *koje zadovoljava početni uslov*

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \tag{4}$$

SISTEM DIFERENCIJALNIH JEDNAČIMA REDA m:

$$y_i^{(m_i)} = F_i\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}\right),$$
$$i = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

za date funkcije $F_i : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, gde je $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, $m_i \in N$, $i = 1, 2, \dots, n$

svođenje sistema (5) na normalni sistem od m diferencijalnih jednačina

$$z_1 = y_1,\ z_2 = y_1',\ \dots, z_{m_1} = y_1^{(m_1-1)},$$
$$z_{m_1+1} = y_2,\ z_{m_1+2} = y_2',\ \dots, z_{m_1+m_2} = y_2^{(m_2-1)},$$
$$\vdots$$
$$z_{m_1+m_2+m_{n-1}+1} = y_n,\ z_{m_1+m_2+m_{n-1}+2} = y_n',\ \dots, z_m = y_n^{(m_n-1)},$$

$$
\begin{aligned}
z_1' &= z_2\\
z_2' &= z_3\\
&\vdots\\
z_{m_1}' &= F_1(x, z_1, z_2, \ldots, z_m)\\
z_{m_1+1}' &= z_{m_1+2}\\
&\vdots\\
z_{m_1+m_2}' &= F_2(x, z_1, z_2, \ldots, z_m)\\
&\vdots\\
z_m' &= F_n(x, z_1, z_2, \ldots, z_m).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Obična diferencijalna jednačina $n-$tog reda u normalnom obliku:

$$
y^{(n)} = f\Big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\Big) \qquad f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{7}
$$

transformacija DJ (7) na sistem DJ u normalnom obliku (1)

$$
y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \overset{(y = y_1)}{\Longrightarrow} \quad
\begin{aligned}
&y_1' = y' = y_2\\
&y_2' = y'' = y_3\\
&\vdots\\
&y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n\\
&y_n' = y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})\\
&\phantom{y_n' = y^{(n)}} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&y_1' = y_2 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
&y_2' = y_3 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
&\vdots\\
&y_{n-1}' = y_n = f_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\\
&y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}
\right.
$$

Definicija 3 *Podskup oblasti definisanosti sistem* DJ (1) *kroz čiju svaku tačku prolazi neka integralna kriva, naziva se* **oblast egzistencije rešenja** *ovog sistema. Ako kroz svaku tačku ove oblasti prolazi samo jedna integralna kriva, takva oblast je* **oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja**.

$\mathbb{Q} \longrightarrow$ oblast egzistencije rešenja DJ

$\mathbb{G} \longrightarrow$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja DJ

Egzistencija rešenja

Teorema 1 (Peanova teorema) *Dovoljan uslov egzistencije rešenja sistema* DJ (1) *u oblasti* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ *je* $\mathbf{f} \in C(\mathbb{Q})$.

Jedinstvenost rešenja

Definicija 4 *Funkcija* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom* $L > 0$ *po promenljivoj* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *u oblasti* $\mathbb{D}$, *ako za bilo koje tačke* $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}$ *važi*

$$|f(x, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{z})| \leq L \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|.$$

Teorema 2 (Pikarova teorema) *Neka su za sistem* DJ (1) *funkcije* $f_i \in C(\mathbb{G})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *i neka zadovoljavaju Lipšicov uslov po promenljivoj* $\mathbf{y}$ *na svakom kompaktu sadržanom u* $\mathbb{G}$. *Tada je* $\mathbb{G}$ *oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja tog sistema.*

Vrste rešenja sistema DJ

Definicija 5 *Neka je* $\mathbb{G}$ *oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema* DJ (1). *Skup funkcija*

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y_2 &= \varphi_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ &\vdots \\ y_n &= \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{aligned} \tag{8}$$

gde je $x \in (a, b)$, *a* $c_1, c_2, \ldots, c_n \in H \subset \mathbb{R}$ *su parametri, naziva se* **opšte rešenje sistema** DJ (1), *ako:*

1. *sistem* (8) *je rešiv po* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *za svako* $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{G}$,

$$\begin{aligned} c_1 &= \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ c_2 &= \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ c_n &= \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \end{aligned} \tag{9}$$

2. skup funkcija (8) je rešenje sistema (1) u oblasti $\mathbb{G}$ za proizvoljan izbor parametara $c_1, c_2, \ldots, c_n \in H$, određenih sa (9) za neku tačku $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in \mathbb{G}$.

Vektorska funkcija $y = \varphi(x, c)$, $x \in (a, b)$, gde je $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in H \subset R^n$ parametar, naziva se **opšte rešenje vektorske DJ** (3), *ako:*

1. sistem $y = \varphi(x, c)$ je rešiv po c, $c = \psi(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$;

2. funkcija $y = \varphi(x, c)$ je rešenje vektorske DJ (3) u oblasti $\mathbb{G}$ za proizvoljnan izbor parametra $c \in H$, određenog kao $c = \psi(x_0, y_0)$ za neku tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$.

Iz ove definicije sledi da mora biti $\varphi(x, \psi(x, y)) = y$ za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$. Takođe, za svaku tačku $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$, jednačina $y_0 = \varphi(x_0, c)$ je rešiva po c, $c = c_0 = \psi(x_0, y_0)$, pri čemu je funkcija $y = \varphi(x, c_0)$ rešenje sistema (3), koje zadovoljava početni uslov $\varphi(x_0, c_0) = \varphi(x_0, \psi(x_0, y_0)) = y_0$.

Definicija 6 *Rešenje sistema* DJ (1) *je* PARTIKULARNO *ako u opštem rešenju bar jedan parametar c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ima konkretnu vrednost.*

Pri rešavanju sistema DJ poseban problem predstavljaju rešenja koja nisu sadržana u opštem rešenju, pa zahtevaju dodatnu diskusiju. Ona se, prema tome, ne mogu dobiti iz opšteg rešenja ni za koju vrednost konstante c, a njihove integralne krive ne pripadaju oblasti jedinstvenosti rešenja.

Definicija 7 *Rešenje $y = \varphi(x)$ sistema* DJ (3) *je* SINGULARNO *ako kroz svaku njegovu tačku osim njega prolazi i neko drugo rešenje, koje u toj tački ima istu tangentu ravan kao i rešenje $y = \varphi(x)$, a razlikuje se od njega u ma kojoj okolini tačke dodira.*