2. Linearni sistemi diferencijalnih jednačina

NEHOMOGENI LINEARAN SISTEM:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n + g_1(x)\\
y_2' &= a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\,y_n + g_2(x)\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n + g_n(x)
\end{aligned} \tag{1}
$$

HOMOGENI LINEARAN SISTEM:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n\\
y_2' &= a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\,y_n\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T, \qquad y' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')^T$$

$$
A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x)\\ & & \vdots & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x)\\ g_2(x)\\ \vdots\\ g_n(x) \end{bmatrix}, \tag{3}
$$

$A(x) = [a_{ij}(x)]_{n\times n} \to$ matrica sistema DJ

NEHOMOGENI LINEARAN SISTEM DJ (1) U MATRIČNOM OBLIKU (NEHOMOGENA LINEARNA VEKTORSKA DJ):

$$y' = A(x)\,y + g(x). \tag{4}$$

HOMOGENI LINEARAN SISTEM DJ (2) U MATRIČNOM OBLIKU (HOMOGENA LINEARNA VEKTORSKA DJ):

$$y' = A(x)\,y. \tag{5}$$

Teorema 1 (Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja vektorske DJ) *Neka su funkcije $a_{ij}, g_i \in C(a,b)$. Tada za svaku tačku $x_0 \in (a,b)$ i proizvoljan konačan vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$, postoji jedinstveno neprekidno diferencijabilno rešenje početnog problema*

$$y' = A(x)\,y + g(x), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{6}$$

definisano na intervalu (a,b).

$*$ $\mathbb{G} = (a,b)\times\mathbb{R}^n$ je oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja linearnog sistema DJ

$*$ Linearan sistem nema singularnih rešenja, a neproduživo rešenje svakog Košijevog problema je definisano na celom intervalu (a,b)

✠ Ako su $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ rešenja homogenog linearnog sistema DJ (5) i $c_1, c_2, \dots, c_k$ realne (ili kompleksne) konstante, tada je i $y(x) = \sum_{i=1}^k c_i\varphi_i(x)$ rešenje ovog sistema.

✠ Ako homogeni linearni sistem DJ (5) ima kompleksno rešenje $y(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, tada su $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ realna rešenja ovog sistema.

✠ Ako nehomogeni linearni sistem DJ $y' = A(x)\,y + g_1(x) + ig_2(x)$ ima kompleksno rešenje

$$y(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$

tada su $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ rešenja redom sistema DJ

$$y' = A(x)\,y + g_1(x), \quad \text{i} \quad y' = A(x)\,y + g_2(x).$$

✠ Ako je $\varphi_i(x)$ rešenje sistema DJ $y' = A(x)\,y + g_i(x)$, $i = 1,2,\dots,k$, tada je $y(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)$ rešenje sistema DJ $y' = A(x)\,y + \sum_{i=1}^k g_i(x)$.

✠ Ako je $\varphi_1(x)$ rešenje homogenog linearnog sistema (5), a $\varphi_2(x)$ rešenje nehomogenog linearnog sistema (4), tada je $y(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ rešenje nehomogenog sistema (4).

Linearna nezavisnost rešenja homogenog linearnog sistema DJ

Definicija 1 *Vektorske funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, definisane na intervalu (a,b), sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, linearno su nezavisne na tom intervalu ako za $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ iz identiteta*

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_k\varphi_k(x) = 0, \quad x \in (a,b), \tag{7}$$

sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. U suprotnom, funkcije su linearno zavisne.

Definicija 2 *Za funkcije*

$$\varphi_j(x) = (\varphi_{1j}(x), \varphi_{2j}(x), \ldots, \varphi_{nj}(x))^T, \quad x \in (a,b), \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

vronskijanom se naziva determinanta

$$W(x) = W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)] = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Ako su vektorske funkcije

$$(8) \quad \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \ \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \varphi_n(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$x \in (a,b)$, $j = 1,2,\ldots,n$, rešenja sistema DJ (5) na (a,b), za svako $x \in (a,b)$ važi

$$\begin{aligned} \varphi_{11}'(x) &= a_{11}(x)\,\varphi_{11}(x) + a_{12}(x)\,\varphi_{21}(x) + \cdots + a_{1n}(x)\,\varphi_{n1}(x) \\ \varphi_{21}'(x) &= a_{21}(x)\,\varphi_{11}(x) + a_{22}(x)\,\varphi_{21}(x) + \cdots + a_{2n}(x)\,\varphi_{n1}(x) \\ &\vdots \\ \varphi_{n1}'(x) &= a_{n1}(x)\,\varphi_{11}(x) + a_{n2}(x)\,\varphi_{21}(x) + \cdots + a_{nn}(x)\,\varphi_{n1}(x) \end{aligned}$$

odnosno

$$(9) \qquad \varphi_{ij}'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\varphi_{kj}(x), \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Skup rešenja homogenog linearnog sistema DJ (5)

$$\Lambda = \{\varphi \in C^{(1)}(a,b) : \varphi'(x) = A(x)\,\varphi(x), x \in (a,b)\}.$$

obrazuje linearan vektorski prostor nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva. Osnovni cilj je odrediti bazu prostora rešenja Λ.

Teorema 2 *Ako su vektorske funkcije* $\varphi_j(x) = (\varphi_{1j}(x), \varphi_{2j}(x), \ldots, \varphi_{nj}(x))^T$, $x \in (a,b)$, $j = 1,2,\ldots,n$, *linearno zavisne na intervalu* (a,b), *tada je* $W(x) = 0$ *za svako* $x \in (a,b)$.

Dokaz: Iz linearne zavisnosti ovih funkcija sledi da postoje konstante

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, \ldots, 0), \tag{10}$$

tako da je $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$, odnosno u razvijenom obliku,

$$\begin{aligned} &\alpha_1\varphi_{11}(x) + \alpha_2\varphi_{12}(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_{1n}(x) = 0 \\ &\alpha_1\varphi_{21}(x) + \alpha_2\varphi_{22}(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_{2n}(x) = 0 \\ &\vdots \\ &\alpha_1\varphi_{n1}(x) + \alpha_2\varphi_{n2}(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_{nn}(x) = 0. \end{aligned}$$

Kako ovaj linearan, homogen sistem jednačina ima netrivijalno rešenje (10), mora biti $\Delta = W(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$. $\square$

Teorema 3 *Rešenja* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \Lambda$,

$$\varphi_j(x) = (\varphi_{1j}(x), \varphi_{2j}(x), \ldots, \varphi_{nj}(x))^T, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in (a, b)$$

sistema DJ (5) *su linearno nezavisna na intervalu* (a, b) *ako i samo ako je* $W(x) \neq 0$ *za svako* $x \in (a, b)$.

Dokaz: ($\Leftarrow$:) Na osnovu Teoreme 2.

($\Rightarrow$:) Dokaž kontradikcijom. Neka su rešenja $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearno nezavisna na intervalu (a, b) i neka postoji $x_0 \in (a, b)$ tako da je $W(x_0) = 0$. Tada za linearan, homogen sistem jednačina

$$\begin{aligned} &c_1\varphi_{11}(x_0) + c_2\varphi_{12}(x_0) + \cdots + c_n\varphi_{1n}(x_0) = 0 \\ &c_1\varphi_{21}(x_0) + c_2\varphi_{22}(x_0) + \cdots + c_n\varphi_{2n}(x_0) = 0 \\ &\vdots \\ &c_1\varphi_{n1}(x_0) + c_2\varphi_{n2}(x_0) + \cdots + c_n\varphi_{nn}(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

determinantna je $\Delta = W(x_0) = 0$, pa on ima netrivijalno rešenje $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Prema (✠) vektorska funkcija

$$\psi(x) = c_1^0\varphi_1(x) + c_2^0\varphi_2(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x)$$

je rešenje sistema DJ (5). Kako je zbog (11)

$$\psi(x_0) = (\psi_1(x_0), \psi_2(x_0), \ldots, \psi_n(x_0)) = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0),$$

ovo rešenje zadovoljava trivijalne početne uslove, pa sledi $\psi(x) \equiv 0$ za svako $x \in (a, b)$ (trivijalno rešenje $y(x) \equiv 0$ zadovoljava početni uslov $y(x_0) = 0$, pa prema TEJR rešenja se moraju poklapati na (a,b), pa je $\psi(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$). Dakle,

$$0 = c_1^0\varphi_1(x) + c_2^0\varphi_2(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x), \quad x \in (a,b), \quad (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0) \neq (0,0,\ldots,0)\,.$$

Ovo je suprotno polaznoj pretpostavci da su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearno nezavisna rešenja na (a,b), pa mora biti $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$. $\square$

Teorema 4 (Formula Ostrogradskog–Liuvila) *Za vronskijan rešenja homogenog linearnog sistema* DJ (5) *važi*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} T(u)du}, \quad x \in (a,b), \tag{12}$$

gde je $x_0 \in (a,b)$ *proizvoljna tačka i* $T(x) = \operatorname{tr} A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$ *trag matrice* $A(x)$.

Dokaz: Kako je

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}'(x) & \varphi_{12}'(x) & \ldots & \varphi_{1n}'(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}'(x) & \varphi_{22}'(x) & \ldots & \varphi_{2n}'(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}'(x) & \varphi_{n2}'(x) & \ldots & \varphi_{nn}'(x) \end{vmatrix}.$$

$$(9) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{ij}'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\varphi_{kj}(x), \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}' & \varphi_{12}' & \ldots & \varphi_{1n}' \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_k a_{1k}\varphi_{k1} & \sum_k a_{1k}\varphi_{k2} & \ldots & \sum_k a_{1k}\varphi_{kn} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ako drugu vrstu pomnožimo sa $-a_{12}(x)$ i dodamo prvoj, treću vrstu pomnožimo sa $-a_{13}(x)$ i dodamo prvoj, itd, $n-$tu vrstu pomnožimo sa $-a_{1n}(x)$ i dodamo prvoj, dobijamo

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}'(x) & \varphi_{12}'(x) & \ldots & \varphi_{1n}'(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(x)\varphi_{11}(x) & a_{11}(x)\varphi_{12}(x) & \dots & a_{11}(x)\varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{11}(x)W(x)$$

Analogno,

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi'_{22}(x) & \dots & \varphi'_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{22}(x)W(x)$$

itd.

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi'_{n1}(x) & \varphi'_{n2}(x) & \dots & \varphi'_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{nn}(x)W(x)$$

Dakle,

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)W(x) = \operatorname{tr} A(x)\, W(x) = T(x)\, W(x), \quad x \in (a,b)\,. \tag{13}$$

Neka je $x_0 \in (a,b)$ proizvoljna fiksirana tačka. Označimo sa $g(x) = W(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} T(s)ds}$, $x \in (a,b)$. Tada je prema (13)

$$\begin{aligned} g'(x) &= W'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} T(s)ds} - W(x)T(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} T(s)ds} \\ &= \Big(W'(x) - W(x)T(x)\Big)\, e^{-\int_{x_0}^{x} T(s)ds} = 0, \quad x \in (a,b)\,. \end{aligned}$$

Dakle, $g(x) = c$, $x \in (a,b)$, tj.

$$W(x) = c\, e^{\int_{x_0}^{x} T(s)ds}, \quad x \in (a,b)\,. \tag{14}$$

Kako je $g(x_0) = W(x_0)$, imamo da je $c = W(x_0)$, iz (14) sledi (12). ⊠

$\star$ Vronskijan sistema DJ (5) određen je tragom matrice $A(x)$ i početnim uslovima $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)$, odnosno vrednošću $W(x_0)$.

Posledica 1 *Važi*

(a) $W(x) = 0$ *za svako* $x \in (a,b)$ *ili*

(b) $W(x) \neq 0$ *za svako* $x \in (a,b)$.

Tvrđenje (a) važi akko su vekorske funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearno zavisna rešenja vektorske DJ (5) na (a,b).
Tvrđenje (b) važi akko su vekorske funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearno nezavisna rešenja vektorske DJ (5) na (a,b).

Fundamentalni sistem rešenja i opšte rešenje homogenog linearnog sistema DJ

Teorema 5 *Ako je matrica $A(x)$ homogenog linearnog sistema DJ (5) neprekidna na (a,b), tada postoji n linearno nezavisnih rešenja ovog sistema.*

Dokaz: Neka je $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ konstantna nesingularna matrica. Po TEJR za proizvoljno $x_0 \in (a,b)$ postoje jedinstvena rešenja

$$\varphi_j(x) = (\varphi_{1j}(x), \varphi_{2j}(x), \ldots, \varphi_{nj}(x))^T, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad x \in (a,b),$$

koja zadovoljavaju redom početne uslove $\varphi_j(x_0) = b_j$, gde je $b_j = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})^T$, tj. vektor-kolona matrice B. Kako je $W(x_0) = \det B \neq 0$, onda je $W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$, pa prema Teoremi 3 ova rešenja su linearno nezavisna na (a,b).
$\square$

Definicija 3 *Skup od n linearno nezavisnih rešenja $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ homogenog linearnog sistema DJ (5), definisanih na intervalu (a,b), naziva se* FUNDAMENTALAN SISTEM REŠENJA.

Fundamentalni sistem rešenja homogenog linearnog sistema DJ (5):

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \ \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \varphi_n(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

Teorema 6 *Neka su funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \Lambda$ linearno nezavisna rešenja homogenog linearnog sistema DJ (5) i neka je ψ proizvoljno netrivijalno rešenje tog sistema. Tada postoje konstante $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0) \neq (0,0,\ldots,0)$, tako da je*

$$\psi(x) = c_1^0\varphi_1(x) + c_2^0\varphi_2(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x), \quad x \in (a,b).$$

Dokaz: Za proizvoljno $x_0 \in (a,b)$ vektori $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)$ su linearno nezavisni, tako da zajedno sa vektorom $\psi(x_0)$, koji ne može biti nula-vektor jer je $\psi(x)$ netrivijalno rešenje, čine skup linearno zavisnih vektora u $\mathbb{R}^n$. Dakle, postoje konctante $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0) \neq (0,0,\ldots 0)$, tako da je

$$\psi(x_0) = c_1^0\varphi_1(x_0) + c_2^0\varphi_2(x_0) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x_0).$$

Za tako izabrane konstante vektorska funkcija

$$\xi(x) = c_1^0\varphi_1(x) + c_2^0\varphi_2(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x)$$

je rešenje sistema (5). Kako u tački x_0 ono zadovoljava isti početni uslov kao i rešenje $\psi(x)$, po Teoremi 1 egzistencije i jedinstvenosti rešenja mora biti $\psi(x) = \xi(x)$ za svako $x \in (a,b)$. Prema tome,

$$\psi(x) = c_1^0\varphi_1(x) + c_2^0\varphi_2(x) + \cdots + c_n^0\varphi_n(x), \ x \in (a,b) \qquad \square$$

Bilo koje netrivijalno rešenje sistema DJ (5) može se izraziti kao linearna kombinacija vektorskih funkcija koje čine fundamentalni sistem rešenja.

Opšte rešenje homogenog sistema DJ (5):

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x), \quad x \in (a,b)$$