3. Fundamentalna matrica linearnog sistema DJ

Homogen linearan sistema DJ:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\, y_n \\
y_2' &= a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\, y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\, y_n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Homogena linearna vektorska DJ:

$$
y'(x) = A(x)\, y(x). \tag{2}
$$

Neka je fundamentalni sistem rešenja homogenog linearnog sistema DJ (2)):

$$
\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) \\ \varphi_{21}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(x) \end{pmatrix}, \; \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{22}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n2}(x) \end{pmatrix}, \; \ldots, \; \varphi_n(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}, \tag{3}
$$

Kako je za svako $j = 1, 2, \ldots, n$, vektorska funkcija $\varphi_j(x)$ rešenje homogenog linearnog sistema DJ (2)) važi

$$
\begin{aligned}
\varphi_{1j}' &= a_{11}(x)\, \varphi_{1j} + a_{12}(x)\, \varphi_{2j} + \cdots + a_{1n}(x)\, \varphi_{nj} \\
\varphi_{2j}' &= a_{21}(x)\, \varphi_{1j} + a_{22}(x)\, \varphi_{2j} + \cdots + a_{2n}(x)\, \varphi_{nj} \\
&\vdots \\
\varphi_{nj}' &= a_{n1}(x)\, \varphi_{1j} + a_{n2}(x)\, \varphi_{2j} + \cdots + a_{nn}(x)\, \varphi_{nj}
\end{aligned}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\varphi_{ij}'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) \varphi_{kj}(x), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n
$$

Opšte rešenje homogenog sistema DJ (2):

$$
Y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x), \quad x \in (a, b)
$$

Matrične funkcije

Definicija 1 *Ako su elementi $z_{ij}(x)$ matrične funkcije $Z(x) = [z_{ij}(x)]_{n\times n}$ diferencijabilne funkcije na (a,b), onda je*

$$Z'(x) = \left[z'_{ij}(x)\right]_{n\times n}, \quad x \in (a,b)\,.$$

Definicija 2 *Ako su elementi $z_{ij}(x)$ matrične funkcije $Z(x) = [z_{ij}(x)]_{n\times n}$ integrabilne funkcije na $[a,b]$, onda je*

$$\int_a^b Z(x)dx = \left[\int_a^b z_{ij}(x)\,dx\right]_{n\times n}.$$

Stav 1 *Ako su $A(x) = [a_{ij}(x)]_{n\times n}$, $B(x) = [b_{ij}(x)]_{n\times n}$ matrične funkcije čiji su elementi diferencijabilne funkcije na (a,b) i ako je $f(x)$ diferencijabilna funkcija na (a,b), za svako $x \in (a,b)$ važi:*

1. $(A(x) + B(x))' = A'(x) + B'(x)$;
2. $(f(x)A(x))' = f'(x)A(x) + f(x)A'(x)$;
3. $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$.

Stav 2 *Ako je $A(x) = [a_{ij}(x)]_{n\times n}$ kvadratna regularna matrica čiji su elementi diferencijabilne funkcije na (a,b) za svako $x \in (a,b)$, važi:*

$$(A^{-1}(x))' = -A^{-1}(x)A'(x)A^{-1}(x)\,. \tag{4}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} A(x)\cdot A^{-1}(x) = \mathbb{I} \;&\Rightarrow\; A'(x)\cdot A^{-1}(x) + A(x)\cdot\big(A^{-1}(x)\big)' = 0\\ &\Rightarrow\; A(x)\cdot(A^{-1}(x))' = -A'(x)\cdot A^{-1}(x)\\ &\Rightarrow\; (A^{-1}(x))' = -A^{-1}(x)\cdot A'(x)\cdot A^{-1}(x)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Da bi definisali fundamentalnu matricu sistema $\Phi(x)$ posmatrajmo *matričnu diferencijalnu jednačinu*

$$Z'(x) = A(x)Z(x) \tag{5}$$

gde je

$$Z(x) = \begin{bmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \dots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \dots & z_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \dots & z_{nn}(x) \end{bmatrix} \qquad Z'(x) = \begin{bmatrix} z'_{11}(x) & z'_{12}(x) & \dots & z'_{1n}(x) \\ z'_{21}(x) & z'_{22}(x) & \dots & z'_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ z'_{n1}(x) & z'_{n2}(x) & \dots & z'_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Definicija 3 *Matrična funkcija $Z(x)$ je rešenje matrične DJ (5) na intervalu (a, b), ako važi:*

1. *$Z(x)$ je neprekidno diferencijabilna matrična funkcija na (a, b);*
2. *$Z'(x) = A(x)Z(x)$ za svako $x \in (a, b)$;*

Teorema 1 *Matrična funkcija $\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{bmatrix}$ je rešenje matrične DJ (5) na intervalu I ako i samo ako su vektorske funkcije $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ rešenja vektorske DJ (2) na intervalu I.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$: Ako je matrica $\Phi(x)$ rešenje matrične DJ (5) važi $\Phi'(x) = A(x)\,\Phi(x)$, odnosno

$$\begin{bmatrix} \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x)\varphi_1(x) & A(x)\varphi_2(x) & \dots & A(x)\varphi_n(x) \end{bmatrix}$$

zaključujemo da je $\varphi'_k(x) = A(x)\varphi_k(x)$ za svako $k = 1, 2, \dots, n$.

$(\Leftarrow)$: Ako su vektorske funkcije $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ rešenja vektorske DJ (2), kako je $\varphi'_k(x) = A(x)\varphi_k(x)$ za svako $k = 1, 2, \dots, n$ imamo

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \begin{bmatrix} \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_n(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(x)\varphi_1(x) & A(x)\varphi_2(x) & \dots & A(x)\varphi_n(x) \end{bmatrix} \\ &= A(x)\begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{bmatrix} = A(x)\Phi(x), \end{aligned}$$

pa je matrična funkcija $\Phi(x)$ rešenje matrične DJ (5). $\square$

Iz Teoreme 1 i Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja KP vektorske DJ sledi:

Teorema 2 (TEOREMA EGZISTENCIJE I JEDINSTVENOSTI REŠENJA MATRIČNE DJ) *Neka je $A(x)$ neprekidna matrica na intervalu (a, b). Tada za svaku tačku $x_0 \in (a, b)$ i proizvoljnu kvadratnu matricu Z_0 reda n, postoji jedinstveno rešenje početnog problema*

$$Z' = A(x)Z, \qquad Z(x_0) = Z_0. \tag{6}$$

definisano na intervalu (a, b).

Definicija 4 *Matrica $\Phi(x)$, $x \in (a, b)$ reda $n \times n$ naziva se* FUNDAMENTALNA MATRICA VEKTORSKE DJ (2) *ako je matrična funkcija $\Phi(x)$ rešenje matrične DJ (5) na (a, b) i $\det \Phi(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$.*

Teorema 3 *Matrična funkcija $\Phi(x)$, $x \in (a, b)$ je fundamentalna matrica vektorske DJ (2) ako i samo ako su kolone matrice $\Phi(x)$ linearno nezavisna rešenja vektorske DJ (2) na (a, b).*

DOKAZ : ($\Rightarrow$) : Neka je matrična funkcija $\Phi(x)$ fundamentalna matrica vektorske DJ (2), odnosno rešenje matrične DJ (5) na (a, b). Prema Teoremi 1, kolone matrice $\Phi(x)$ su rešenja vektorske DJ (2) na (a, b). Kako je prema Definiciji 4 $W(x) = \det \Phi(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$, na osnovu Teoreme 2.3. zaključujemo da su kolone matrice $\Phi(x)$ linearno nezavisna rešenja vektorske DJ (2) na (a, b).

($\Leftarrow$) : Neka su kolone matrice $\Phi(x)$ linearno nezavisna rešenja vektorske DJ (2) na (a, b). Tada prema Teoremi 1, matrična funkcija $\Phi(x)$ je rešenje matrične DJ (5) na tom intervalu, a zbog linearne nezavisnosti rešenja vektorske DJ (2) na (a, b), prema Teoremi 2.3. je $\det \Phi(x) = W(x) \neq 0$ za svako $x \in (a, b)$. Dakle, prema Definiciji 4, $\Phi(x)$ je fundamentalna matrica vektorske DJ (2). $\square$

Dakle, ako je (3) fundamentalni sistem rešenja vektorske DJ (2), njena FUNDAMENTALNA MATRICA je:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ & & \vdots & \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje homogenog linearnog sistema DJ (2) dobija se odredjivanje fundamentale matrice sistema.

Teorema 4 *Neka je $\Phi(x)$ fundamentalna matrica homogenog linearnog sistema DJ (2) i neka je $z = z(x)$ proizvoljno netrivijalno rešenje tog sistema. Tada postoje konstante $c_0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)^T \neq (0, 0, \dots, 0)^T$, tako da je*

$$z(x) = \Phi(x)c_0, \quad x \in (a, b).$$

DOKAZ: Za proizvoljan konstantni vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ je trivijalno pokazati da je $y(x) = \Phi(x) \cdot c$ rešenje vektorske DJ (2). Ako je $z(x)$ proizvoljno rešenje vektorske DJ (2) na (a, b) i $x_0 \in (a, b)$, definišimo $c_0 = \Phi^{-1}(x_0)z_0$, gde je $z(x_0) = z_0$. Kako je $z(x)$ netrivijalno rešenje vektorske DJ (2), $z_0 \neq (0, 0, \dots, 0)$ i kako je $\Phi(x)$ fundamentalna matrica homogenog linearnog sistema DJ (2), biće $\Phi^{-1}(x_0) \neq \mathbb{O}$. Dakle, $c_0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)^T \neq (0, 0 \dots, 0)^T$. Tada su $z(x)$ i $\Phi(x)c_0$ rešenja vektorske rešenje DJ (2) koja zadovoljavaju isti početni uslov

$$z(x_0) = z_0 = \Phi(x_0)c_0$$

Prema TEJR je $z(x) = \Phi(x)c_0$. $\square$

OPŠTE REŠENJE VEKTORSKE DJ (2):

$$Y(x) = \Phi(x)\, c, \qquad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T, \quad x \in (a, b).$$

Postoji beskonačno mnogo fundamentalnih matrica vektorske DJ (2), jer za proizvoljnu nesingularnu matricu Z_0, $\det Z_0 \neq 0$, jedinstveno rešenje KP matrične DJ (6) je fundamentalna matrica vektorske rešenje DJ (2).

Teorema 5 *Ako su $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ dve fundamentalne matrice sistema DJ (2), tada postoji konstantna nesingularna matrica $P = [p_{ij}]_{n \times n}$, tako da je $\Psi(x) = \Phi(x)\, P$.*

DOKAZ: Neka su $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ fundamentalne matrice sistema DJ (2). Prema Stavu 1, Stavu 2 i Teoremi 1 je

$$\begin{aligned}
(\Phi^{-1}(x)\Psi(x))' &= (\Phi^{-1}(x))'\Psi(x) + \Phi^{-1}(x)\Psi'(x) \\
&= -\Phi^{-1}(x)\Phi'(x)\Phi^{-1}(x)\Psi(x) + \Phi^{-1}(x)A(x)\Psi(x) \\
&= -\Phi^{-1}(x)A(x)\Phi(x)\Phi^{-1}(x)\Psi(x) + \Phi^{-1}(x)A(x)\Psi(x) \\
&= \big(-\Phi^{-1}(x)A(x) + \Phi^{-1}(x)A(x)\big)\Psi(x) = \mathbb{O}.
\end{aligned}$$

Dakle, $\Phi^{-1}(x)\Psi(x) = P$, gde je $P = [p_{ij}]_{n \times n}$, odnosno $\Psi(x) = \Phi(x)P$.

Matrica P je nesingularna, jer bi u suprotnom imali

$$\det \Psi(x) = \det \Phi(x) \cdot \det P \equiv 0,$$

što je nemoguće po Definiciji 4. $\square$