7. Linearni sistem DJ sa konstantnim koeficijentima

Homogen linearan sistema DJ sa konstantnim koeficijentima:

$$Y'(t) = AY(t), \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n} \tag{1}$$

Nehomogen linearan sistema DJ sa konstantnim koeficijentima:

$$Y'(t) = AY(t) + F(t), \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n} \tag{2}$$

Matrični metod

Prema Teoremi 6.1.-(i) eksponencijalna matrična funkcija $\Phi(t) = e^{At}$ je fundamentalna matrica sistema (1).

Opšte rešenje homogenog linearnog sistema DJ sa konstantnim koeficijentima

$$Y'(t) = AY(t), \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

je

$$Y(t) = e^{At}\,c, \quad t \in \mathbb{R},$$

gde je c proizvoljan konstantan vektor.

Rešenje koje zadovoljava početni uslov $Y(t_0) = Y_0$:

$$e^{At_0}\,c = Y(t_0) = Y_0 \quad \Rightarrow \quad c = \left(e^{At_0}\right)^{-1} Y_0 = e^{-At_0} Y_0$$

biće $Y(t) = e^{At}\,e^{-At_0} Y_0 = e^{At - At_0} Y_0 = e^{A(t-t_0)} Y_0$.

Rešenje Košijevog problema homogenog linearnog sistema DJ sa konstantnim koeficijentima

$$Y' = AY, \qquad Y(t_0) = Y_0$$

je

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)} Y_0\,.$$

Teorema 6.1. i Definicija 6.1. omogućavaju izražavanje rešenja nehomogenog linearnog sistema DJ (2) sa konstantnim koeficijentima pomoću matrične eksponencijalne funkcije, postupkom koji je analogan jednodimenzionalnom slučaju odnosno postupkom analognim rešavanju linearne DJ prvog reda.

Pomnožimo obe strane jednačine (2) sa e^{-At} i dobijamo

$$e^{-At}(Y'(t) - AY(t)) = e^{-At}F(t) \tag{3}$$

Kako koristeći svojstvo (iii) Teoreme 6.1, da je $A \cdot e^{-At} = e^{-At} \cdot A$, imamo da je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-At}Y(t)) &= e^{-At}Y'(t) - A\,e^{-At}Y(t) \\ &= e^{-At}Y'(t) - e^{-At}AY(t) = e^{-At}(Y'(t) - AY(t))\,, \end{aligned} \tag{4}$$

iz (3) i (4) imamo da je

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}Y(t)) = e^{-At}F(t) \quad \Rightarrow \quad e^{-At}Y(t) = \int e^{-At}F(t)dt + C$$

Koristeći svojstvo (v) Teoreme 6.1, odnosno da je $\left(e^{-At}\right)^{-1} = e^{At}$, dobija se

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}\int e^{-At}F(t)dt$$

gde je C proizvoljan konstantan vektor.

Opšte rešenje nehomogenog linearnog sistema DJ

$$Y' = AY + F(t)$$

je

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}F(s)ds = e^{At}C + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds, \quad t, t_0 \in \mathbb{R},$$

gde je C proizvoljan konstantan vektor.

Rešenje početnog problema nehomogenog linearnog sistema

$$Y' = AY + F(t), \qquad Y(t_0) = Y_0\,.$$

je

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds\,.$$

Primer 7.1. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - y_2 \\ y_2' &= 3y_2 \end{aligned}$$

Rešenje. Sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

odredili smo u Primeru 5.1. Sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = 3$. Prema Putzerovom algoritmu je

$$e^{At} = p_1(t)M_0 + p_2(t)M_1$$

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_1 = A - \lambda_1\mathbb{I} = A - 5\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $p_1(t)$ je rešenje KP

$$p_1'(t) = 5p_1(t), \quad p_1(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_1(t) = e^{5t}$$

dok je $p_2(t)$ rešenje KP

$$p_2'(t) = p_1(t) + 3p_2(t), \quad p_2(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2(t) = e^{3t}\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{2t}}{2}\right)$$

Prema tome,

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{5t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e^{3t}\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{2t}}{2}\right)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} & -\frac{1}{2}e^{3t}\left(-1 + e^{2t}\right) \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje sistema je $Y(t) = \Phi(t)c = e^{At}c$ gde je $c \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan konstantan vektor.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} & \frac{1}{2}e^{3t}\left(1 - e^{2t}\right) \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1e^{5t} + \frac{c_2}{2}e^{3t} - \frac{c_2}{2}e^{5t} \\ y_2(t) &= c_2e^{3t} \end{aligned} \tag{5}$$

Primetimo da smo Ojlerovom metodom za fundamentalnu matricu dobili matricu

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{3t} \\ 0 & 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

pri čemu važi

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{5t} & -\frac{1}{2}e^{3t}\left(-1 + e^{2t}\right) \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t)\Psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje (5) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \left(c_1 - \frac{c_2}{2}\right) e^{5t} + \frac{c_2}{2} e^{3t} = k_1 e^{5t} + k_2 e^{3t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{3t} = 2k_2 e^{3t} \end{aligned}$$

odnosno

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{3t} \\ 0 & 2e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \Psi(t)c$$

`Korišćenje softverskog paketa Mathematica:` Eksponent matrice možemo odrediti naredbom `MatrixExp`:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{expa} = \texttt{MatrixExp}[A\,t]; \quad \texttt{MatrixForm}[\text{expa}]$$

$$\begin{pmatrix} e^{5t} & -\frac{1}{2}e^{3t}\left(-1+e^{2t}\right) \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Primer 7.2. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

Rešenje. Iz Primera 5.2. sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Prema Putzerovom algoritmu je

$$e^{At} = p_1(t)M_0 + p_2(t)M_1$$

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_1 = A - \lambda_1\mathbb{I} = A - (2+i)\mathbb{I} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 1 & 2-i \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $p_1(t)$ je rešenje KP

$$p_1'(t) = (2+i)p_1(t), \quad p_1(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_1(t) = e^{(2+i)t}$$

dok je $p_2(t)$ rešenje KP

$$p_2'(t) = p_1(t) + (2-i)p_2(t), \quad p_2(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2(t) = e^{(2-i)t}\left(-\frac{1}{2i} + \frac{e^{2it}}{2i}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad p_2(t) = e^{2t}\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = e^{2t}\sin t$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
e^{At} &= e^{(2+i)t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e^{2t}\sin t \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \\
&= e^{2t}\left(\begin{bmatrix} \cos t + i\sin t & 0 \\ 0 & \cos t + i\sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i\sin t & \sin t \\ -\sin t & -i\sin t \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Opšte rešenje sistema je $Y(t) = e^{At}c$, gde je $c \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan konstantan vektor.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ -e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= k_1 e^{2t}\cos t + k_2\, e^{2t}\sin t \\
y_2(t) &= -k_1 e^{2t}\sin t + k_2\, e^{2t}\cos t
\end{aligned}$$

Ojlerovom metodom za fundamentalnu matricu dobili smo matricu

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}\sin t & -e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \end{bmatrix}$$

pri čemu važi

$$\Psi^{-1}(t)e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer 7.3. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}
y_1' &= -8y_1 - y_2 \\
y_2' &= 16y_1
\end{aligned}$$

Rešenje. Sopstvene vrednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$$

prema Primeru 5.5. su $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$. Prema Putzerovom algoritmu je

$$e^{At} = p_1(t)M_0 + p_2(t)M_1$$

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_1 = A - \lambda_1\mathbb{I} = A + 4\mathbb{I} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $p_1(t)$ je rešenje KP

$$p_1'(t) = -4p_1(t), \quad p_1(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_1(t) = e^{-4t}$$

dok je $p_2(t)$ rešenje KP

$$p_2'(t) = p_1(t) - 4p_2(t), \quad p_2(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2(t) = te^{-4t}$$

Prema tome,

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-4t} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 4 \end{bmatrix} = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1-4t & -t \\ 16t & 1+4t \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje sistema je

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1-4t & -t \\ 16t & 1+4t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-4t}\big(k_1(1-4t) - k_2 t\big) \\ e^{-4t}\big(16k_1 t + (1+4t)k_2\big) \end{bmatrix}$$

Ojlerovom metodom za fundamentalnu matricu dobili smo matricu

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} -e^{-4t} & (\frac{1}{4} - t)e^{-4t} \\ 4e^{-4t} & 4t\, e^{-4t} \end{bmatrix}$$

pri čemu važi

$$\Psi^{-1}(t)e^{A\,t} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 7.4. Rešiti KP

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 2te^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y(-1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. U Primeru 5.6. odredili smo sopstvene vrednosti matrice A : $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 3$. Prema Putzerovom algoritmu je

$$e^{At} = p_1(t)M_0 + p_2(t)M_1 + p_3(t)M_2$$

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_1 = A - \lambda_1\mathbb{I} = A - 2\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = (A - \lambda_1\mathbb{I})(A - \lambda_1\mathbb{I}) = (A - 2\mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $p_1(t)$ je rešenje KP

$$p_1'(t) = 2p_1(t), \quad p_1(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_1(t) = e^{2t}$$

dok je $p_2(t)$ rešenje KP

$$p_2'(t) = p_1(t) + 2p_2(t), \quad p_2(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2(t) = te^{2t}$$

i $p_3(t)$ je rešenje KP

$$p_3'(t) = p_2(t) + 3p_3(t), \quad p_3(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_3(t) = -te^{2t} - e^{2t} + e^{3t}$$

Prema tome,

$$e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{2t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-te^{2t} - e^{2t} + e^{3t}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t}t & e^{2t} & 0 \\ e^{3t} - e^{2t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje odgovarajućeg homogenog sistema $Y'(t) = AY(t)$ je

$$Y(t) = e^{At}c = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} t + c_2 e^{2t} \\ c_1(e^{3t} - e^{2t}) + c_3 e^{3t} \end{bmatrix}$$

Ojlerovom metodom za fundamentalnu matricu dobili smo matricu

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & t\,e^{2t} \\ e^{3t} & 0 & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

pri čemu važi

$$\Psi^{-1}(t) e^{A\,t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje KP vektorske DJ $Y'(t) = AY(t) + F(t),\ Y(t_0) = Y_0$ je:

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds\,.$$

Da bi primenili formulu najpre zadajemo fundamentalnu matricu $\Phi(t) = e^{At}$, vektorsku funkciju $F(t)$, početnu vrednost t_0 i početni vektor Y_0:

$$\text{ExpA}[t\_] = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t}t & e^{2t} & 0 \\ e^{2t}\left(e^t-1\right) & 0 & e^{3t} \end{pmatrix};$$

$F[t\_] = \{\{2t\, e^t\}, \{0\}, \{0\}\};\ \text{t0} = -1;\ \text{Y0} = \{\{2\}, \{1\}, \{0\}\};$

a zatim odredjujemo rešenje početnog problema homogene vektorske DJ $e^{A(t-t_0)}Y_0$:

$\text{KRH}[t\_] = \text{ExpA}[t - t0].\text{Y0}; \text{MatrixForm}[\text{KRH}[t]]//\text{Simplify}$

$$e^{A(t-t_0)}Y_0 = \begin{pmatrix} 3e^{2(t+1)} \\ e^{2(t+1)}(3t+5) \\ e^{2(t+1)}\left(4e^{t+1}-3\right) \end{pmatrix}$$

Rešenje početnog problema nehomogene vektorske DJ je:

$\text{KRNH}[t\_] = \text{KRH}[t] + \int_{t0}^{t} \text{ExpA}[t-s].\text{F}[s]\,ds; \text{MatrixForm}[\text{KRNH}[t]]//\text{Simplify}$

$$Y_{KP}(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds = \begin{pmatrix} e^t\left(3e^{t+2} - 2t - 2\right) \\ e^t\left(2(t+2) - 2e^{t+1} + e^{t+2}(3t+5)\right) \\ \frac{1}{2}e^t\left(2t - 6e^{t+2} - e^{2t+2} + 8e^{2t+3} + 3\right) \end{pmatrix}$$