8. Linearni sistem DJ sa konstantnim koeficijentima

HOMOGEN LINEARAN SISTEMA DJ SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA:

$$Y'(t) = AY(t), \qquad A = [a_{ij}]_{n\times n} \tag{1}$$

Matrični metod dijagonalizacije

Neka je $\{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \cdots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ standardna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Tada postoji jedinstvena linearna transformacija $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kojom je opisana promena baze prostora $\mathbb{R}^n$:

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad \to \quad \{t_1, t_2, \dots, t_n\} = T.$$

Matrica transformacije T je nesingularna matrica sa linearno nezavisnim vektorima kolona $t_j = (t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj})^T$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Smenom $Y(t) = TX(t)$, kako je $TX'(t) = Y'(t) = AY(t) = ATX(t)$, sistem (1) se transformiše u sistem DJ

$$X'(t) = JX(t), \quad \longrightarrow \quad \text{KANONSKI OBLIK SISTEMA DJ (1)} \tag{2}$$

gde je $J = T^{-1}AT$. Prema Teoremi 6.2. tada je $e^{Jt} = T^{-1}e^{At}T$, odnosno $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$.

Opšte rešenje sistema (1) je

$$Y(t) = Te^{Jt}T^{-1}c$$

gde je c proizvoljan konstantan vektor.

Metod dijagonalizacije se sastoji u transformaciji sistema (1) na sistem (2) u cilju lakše primene matrične metode rešavanja linearnih sistema DJ sa konstantnim koeficijentima, odnosno lakšeg određivanja eksponenta matrice A, određivanjem eksponenta matrice J.

T je Jordanova baza matrice (linearnog operatora) A, a J je Jordanova normalna forma matrice A.

$\boxed{1}$ Proste sopstvene vrednosti matrice A:

Teorema 1 *Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ proste sopstvene vrednosti konstantne realne matrice A reda n, odgovarajući sopstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ formiraju bazu u $\mathbb{R}^n$, matrica $T = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]_{n\times n}$ je nesingularna i*

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

DOKAZ. Prema Teoremi 5.2. sopstveni vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ odgovarajući prostim sopstvenim vrednostima formiraju bazu u $\mathbb{R}^n$. Posmatrajmo linearno preslikavanje definisano sa $Te_j = v_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Onda je

$$(T^{-1}AT)e_j = T^{-1}Av_j = T^{-1}(\lambda_j v_j) = \lambda_j T^{-1}v_j = \lambda_j e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Dakle, $j-$ta kolona matrice $J = T^{-1}AT$ je vektor $\lambda_j e_j$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Teorema 2 *Ako je*

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

onda je

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

DOKAZ. Kako je

$$B^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

prema Teoremi 6.6. kako je $e^{B\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \frac{t^k}{k!}$, dobija se tvrđenje. $\square$

Primer 8.1. Naći Jordanovu bazu i Jordanovu normalnu formu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rešiti sistem DJ $Y' = AY$.

REŠENJE. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ i odgovarajući sopstveni vektori su

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jordanova baza matrice A je

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricu $J = T^{-1}AT$ odredjujemo sa:

$T = \texttt{Transpose}[\{\{3,2,1\},\{0,1,2\},\{1,0,0\}\}];\ TT = \texttt{Inverse}[T];\ J = \mathrm{TT}.A.T$
`Out[3]=`$\{\{2,0,0\},\{0,-1,0\},\{0,0,1\}\}$

Dakle, Jordanova normalna forma matrice A je

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a prema Teoremi 2 je

$$e^{J\,t}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

expj={{e^{2t}, 0, 0}, {0, e^{-t}, 0}, {0, 0, e^{t}}}; `MatrixForm`[T.expj.TT]

Fundamentalna matrica sistema je

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}=\begin{bmatrix} e^{t} & -2e^{t}+2e^{2t} & e^{t}-e^{2t} \\ 0 & -\dfrac{e^{-t}}{3}+\dfrac{4e^{2t}}{3} & \dfrac{2e^{-t}}{3}-\dfrac{2e^{2t}}{3} \\ 0 & -\dfrac{2e^{-t}}{3}+\dfrac{2e^{2t}}{3} & \dfrac{4e^{-t}}{3}-\dfrac{e^{2t}}{3} \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje je

$$Y(t)=e^{At}\cdot c=\begin{bmatrix} e^{t}c_1+\left(-2e^{t}+2e^{2t}\right)c_2+\left(e^{t}-e^{2t}\right)c_3 \\ \left(-\dfrac{e^{-t}}{3}+\dfrac{4e^{2t}}{3}\right)c_2+\left(\dfrac{2e^{-t}}{3}-\dfrac{2e^{2t}}{3}\right)c_3 \\ \left(-\dfrac{2e^{-t}}{3}+\dfrac{2e^{2t}}{3}\right)c_2+\left(\dfrac{4e^{-t}}{3}-\dfrac{e^{2t}}{3}\right)c_3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3 *Ako konstantna realna matrica A reda $n=2k$ ima $2k$ prostih kompleksnih sopstvenih vrednosti $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j, \overline{\lambda_j}=\alpha_j-i\beta_j, j=1,2,\ldots,k$, i ako su odgovarajući sopstveni vektori $v_j=a_j+ib_j, \overline{v_j}=a_j-ib_j, j=1,2,\ldots,k$, onda vektori $\{a_1,b_1,\ldots,a_k,b_k\}$ formiraju bazu u $\mathbb{R}^n$, matrica $T=[a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ \cdots\ a_k\ b_k]_{n\times n}$ je nesingularna i matrica $J=T^{-1}AT$ ima na glavnoj dijagonali blokove $P_j=\begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$, a nule van toga, odnosno oblika je*

$$J=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_k \end{bmatrix}_{2k\times 2k}. \tag{3}$$

Dokaz. Prema Teoremi 5.3. vektori $\{a_1,b_1,\ldots,a_k,b_k\}$ formiraju bazu u $\mathbb{R}^n$. Za svako $j=1,2,\ldots,k$ imamo da je

$$\begin{aligned} Aa_j=\frac{1}{2}\left(Av_j+A\overline{v_j}\right) &= \frac{1}{2}\left(\lambda_j v_j+\overline{\lambda_j}\,\overline{v_j}\right)=\frac{1}{2}\left((\alpha_j+i\beta_j)v_j+(\alpha_j-i\beta_j)\overline{v_j}\right) \\ &= \frac{\alpha_j}{2}(v_j+\overline{v_j})+i\frac{\beta_j}{2}(v_j-\overline{v_j})=\alpha_j\,a_j-\beta_j\,b_j\,, \end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned} Ab_j=\frac{1}{2i}\left(Av_j-A\overline{v_j}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\lambda_j v_j-\overline{\lambda_j}\,\overline{v_j}\right)=\frac{1}{2i}\left((\alpha_j+i\beta_j)v_j-(\alpha_j-i\beta_j)\overline{v_j}\right) \\ &= \frac{\alpha_j}{2i}(v_j-\overline{v_j})+i\frac{\beta_j}{2}(v_j+\overline{v_j})=\alpha_j\,b_j+\beta_j\,a_j\,, \end{aligned}$$

Posmatrajmo linearno preslikavanje $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$Te_{2j-1} = a_j, \quad Te_{2j} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Matrica preslikavanja T je $T = [a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ \cdots\ a_k\ b_k]_{n\times n}$. Onda je

$$\begin{aligned}(T^{-1}AT)e_{2j-1} &= T^{-1}Aa_j = T^{-1}(\alpha_j a_j - \beta_j b_j) = \alpha_j e_{2j-1} - \beta_j e_{2j},\\ (T^{-1}AT)e_{2j} &= T^{-1}Ab_j = T^{-1}(\beta_j a_j + \alpha_j b_j) = \beta_j e_{2j-1} + \alpha_j e_{2j}\end{aligned}$$

Dakle, $(2j-1)-$va i $(2j)-$ta kolona matrice J biće redom

$$(0, \ldots, 0, \underbrace{\alpha_j}_{2j-1}, \underbrace{-\beta_j}_{2j}, 0, \ldots, 0), \quad (0, \ldots, 0, \underbrace{\beta_j}_{2j-1}, \underbrace{\alpha_j}_{2j}, 0, \ldots, 0)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, važi (3). $\square$

Napomena. Dakle, za konstantnu realnu matricu A reda $n = 2$ koja ima par kompleksnih sopstvenih vrednosti $\lambda = \alpha + i\beta, \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, i ako su odgovarajući sopstveni vektori $v = a + ib, \overline{v} = a - ib$, sa matricom transformacije $T_1 = [a\ \ b]_{2\times 2}$ dobija se

$$J_1 = T_1^{-1}AT_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

dok se sa matricom transformacije $T_2 = [b\ \ a]_{2\times 2}$, kao i sa matricom transformacije $T_2 = [a\ \ -b]_{2\times 2}$, dobija

$$J_2 = T_2^{-1}AT_2 = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Teorema 4 *Ako je*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix},$$

onda je eksponent matrice

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad e^{At} = e^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}.$$

DOKAZ. Kako je $B^{2k+1} = (-1)^k B$, i $B^{2k} = (-1)^k \mathbb{I}$, $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= \mathbb{I} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + B \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \mathbb{I} \cdot \cos t + B \cdot \sin t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kako je $A = \alpha \mathbb{I} + \beta B$ i kako $\mathbb{I}$ komutira sa svakom matricom istog reda, to je

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{\alpha t \mathbb{I}} \cdot e^{\beta t B} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}. \ \square \end{aligned}$$

Primer 8.2A. Naći Jordanovu bazu i Jordanovu normalnu formu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/8 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešiti sistem DJ $Y' = AY$.

REŠENJE. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{4}$, a sopstveni vektori su

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} \mp 2i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mp i \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = a \mp ib\,.$$

Matrica transformacije odgovarajuća sopstvenoj vrednosti $\lambda_1 = -\frac{i}{4}$ je

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica transformacije odgovarajuća sopstvenoj vrednosti $\lambda_2 = \frac{i}{4}$ je

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricu $J_i = T_i^{-1} A T_i$, $i = 1, 2$ odredjujemo sa:

$T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $TT = \texttt{Inverse}[T]$; $J = \mathrm{TT}.A.T$; $\texttt{MatrixForm}[J]$

Dakle,

$$J_1 = T_1^{-1} A T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_2 = T_2^{-1} A T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema Teoremi 4 je

$$e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} \cos \frac{t}{4} & -\sin \frac{t}{4} \\ \sin \frac{t}{4} & \cos \frac{t}{4} \end{bmatrix}, \qquad e^{J_2 t} = \begin{bmatrix} \cos \frac{t}{4} & \sin \frac{t}{4} \\ -\sin \frac{t}{4} & \cos \frac{t}{4} \end{bmatrix}.$$

$\text{expj} = \{\{\text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right], -\text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right]\}, \{\text{Sin}\left[\frac{t}{4}\right], \text{Cos}\left[\frac{t}{4}\right]\}\}; \texttt{MatrixForm}[T.\text{expj}.\text{TT}]$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos\frac{t}{4} & 2\sin\frac{t}{4} \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{4} & \cos\frac{t}{4} \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje je

$$Y(t) = e^{At}\cdot c = \begin{bmatrix} c_1\cos\dfrac{t}{4} + 2c_2\sin\dfrac{t}{4} \\ \\ -\dfrac{c_1}{2}\sin\dfrac{t}{4} + c_2\cos\dfrac{t}{4} \end{bmatrix}.$$

Primer 8.2B. Metodom dijagonalizacije rešiti odgovarajući homogeni linearni sistem DJ

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} \cos 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$$

a zatim naći opšte rešenje negomogenog linearnog sistem DJ.

Rešenje. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_{1,2} = \pm 4i$, a sopstveni vektori su

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mp i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \mp i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \mp ib\,.$$

Matrica transformacije je

$$T = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricu $J = T^{-1}AT$ odredjujemo sa:

$T = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; TT = \texttt{Inverse}[T]; J = \text{TT}.A.T; \texttt{MatrixForm}[J]$

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prema Teoremi 4 je

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} \cos 4t & \sin 4t \\ -\sin 4t & \cos 4t \end{bmatrix}$$

$\text{expj}[t\_] = \{\{\text{Cos}[4t], -\text{Sin}[4t]\}, \{\text{Sin}[4t], \text{Cos}[4t]\}\}; \text{expa}[t\_] = T.\text{expj}[t].\text{TT};\ \texttt{MatrixForm}[\text{expa}[t]]$

$$\Rightarrow \quad e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t & \frac{5}{4}\sin 4t \\ -\sin 4t & \cos 4t - \frac{1}{2}\sin 4t \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje nehomogenog linearnog sistema DJ $Y' = AY + F(t)$ je

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}\int e^{-At}F(t)dt, \quad t \in \mathbb{R},$$

gde je C proizvoljan konstantan vektor.

Izračunavamo $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$

invexpa[t_] = `Inverse`[expa[t]]; `MatrixForm`[invexpa[t]]//`Simplify`

$$e^{-At} = \begin{bmatrix} \cos 4t - \frac{1}{2}\sin 4t & -\frac{5}{4}\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t \end{bmatrix}$$

a zatim zadajemo vektorsku funkciju $F(t)$ i izračunavamo $e^{At}\int e^{-At}F(t)dt$

F[t_] = {{Cos[4t]}, {Sin[4t]}};

Q1[t_] = expa[t]. $\int$ invexpa[t].F[t] dt; `MatrixForm`[Q1[t]]//`Simplify`

$$e^{At}\int e^{-At}F(t)dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{64}((2-8t)\cos 4t + (-1+16t)\sin 4t) \\ \frac{1}{32}(8(-1+8t)\cos 4t + \sin 4t) \end{bmatrix}$$

Sada možemo da nadjemo opšte rešenje:

opsres[t_] = expa[t].{{C1}, {C2}} + Q1[t]//`Simplify`; `MatrixForm`[opsres[t]]

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{64}((2+64C_1-8t)\cos 4t + (9+32C_1+80C_2+16t)\sin 4t) \\ \left(-\frac{1}{8}+C_2+\frac{t}{4}\right)\cos 4t - \frac{1}{32}(1+32C_1+16C_2)\sin 4t \end{bmatrix}$$

Teorema 5 *Ako konstantna realna matrica A reda n ima $2k$ prostih kompleksnih sopstvenih vrednosti $\nu_j = \alpha_j + i\beta_j, \overline{\nu_j} = \alpha_j - i\beta_j,\ j = 1,2,\ldots,k$ sa odgovarajućim sopstvenim vektorima $w_j = a_j + ib_j, \overline{w_j} = a_j - ib_j,\ j = 1,2,\ldots,k$ i $m = n-2k$ prostih realnih sopstvenih vrednosti $\lambda_j,\ j = 1,2,\ldots,m$, sa odgovarajućim sopstvenim vektorima $v_j,\ j = 1,2,\ldots,m$. Matrica*

$$T = [a_1\ b_1\ \cdots\ a_k\ b_k\ v_1\ \cdots\ v_m]_{n\times n}$$

je nesingularna i

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} P_1 & & & & & & & 0 \\ & P_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & P_k & & & & \\ & & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \lambda_m \end{bmatrix},$$

gde je $P_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$, $j = 1,2,\ldots,k$.

Teorema 6 *Ako je*

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_m \end{bmatrix}.$$

tj. duž glavne dijagonale su matrice B_j, $j = 1,2,\ldots,m$ a svi ostali elementi su 0, onda je eksponent matrice kvazidijagonalna matrica

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{B_1t} & & & 0 \\ & e^{B_2t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{B_mt} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Kako je

$$B^k = \begin{bmatrix} B_1^k & & & 0 \\ & B_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_m^k \end{bmatrix}.$$

prema Teoremi 6.6. dobija se tvrđenje. $\square$

Primer 8.3. Naći Jordanovu bazu i Jordanovu normalnu formu matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 64 \\ 0 & -1/4 & -16 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

i rešiti sistem DJ $Y' = AY$.

Rešenje. Sopstvene vrednosti $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_{2,3} = -\dfrac{1}{4} \pm 4i$ i sopstvene vektore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \mp 16i \\ \pm 4i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrice A odredili smo u Primeru 5.4. Jordanova baza i Jordanova normalna forma matrice A su

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & -4 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Prema Teoremi 2, Teoremi 4 i Teoremi 6

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t/4}\cos 4t & e^{-t/4}\sin 4t \\ 0 & -e^{-t/4}\sin 4t & e^{-t/4}\cos 4t \end{bmatrix}$$

Tada je

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t/2} & 4e^{-t/2} - 4e^{-t/4}\cos 4t & 16e^{-t/4}\sin 4t \\ 0 & e^{-t/4}\cos 4t & -4e^{-t/4}\sin 4t \\ 0 & \frac{1}{4}e^{-t/4}\sin 4t & e^{-t/4}\cos 4t \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje je

$$Y(t) = e^{At}c = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t/2} + \left(4e^{-t/2} - 4e^{-t/4}\cos 4t\right) c_2 + 16c_3 e^{-t/4}\cos 4t \\ e^{-t/4}c_2\cos 4t - 4c_3\sin 4t \\ \frac{c_2}{4}e^{-t/4}\sin 4t + c_3 e^{-t/4}\cos 4t \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2}$ **Višestruke sopstvene vrednosti matrice A:**

Neka matrica A reda $n \times n$ ima p različitih sopstvenih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$, $p \leq n$, višetrukosti m_i, pri čemu je $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$, tj. karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = |A - \lambda \mathbb{I}| = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}.$$

Neka sopstvenoj vrednosti λ_i odgovara μ_i, $1 \leq \mu_i \leq m_i$ sopstvenih vektora. Broj m_i naziva se *algebarska višetrukost* sopstvene vrednosti λ_i, a broj μ_i naziva se *geometrijska višetrukost* te sopstvene vrednosti. Ako je $\mu_i < m_i$, odnosno ako imamo manje sopstvenih vektora od višetrukosti sopstvene vrednosti, bazu vektorskog prostora možemo dopuniti tkz. *generalisanim sopstvenim vektorima matrice A*.

Definicija 1 *Vektor v je* **generalisani sopstveni vektor matrice** *A odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda \in \mathbb{C}$, ako je $v \neq 0$ i ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je*

$$(A - \lambda \mathbb{I})^k \, v = 0 \, .$$

Generalisani sopstveni vektor matrice A je ranga $k \in \mathbb{N}$ ako je

$$(A - \lambda \mathbb{I})^k \, v = 0 \quad i \quad (A - \lambda \mathbb{I})^{k-1} \, v \neq 0 \, .$$

Sopstveni vektor u je generalisani sopstveni vektor ranga 1, jer je $(A - \lambda I)\, u = 0$ i $u \neq 0$.

Ako je v generalisani sopstveni vektor ranga k, odgovarajući sopstvenoj vrednosti λ, definišimo niz vektora $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$, $v_1 \neq 0$ na sledeći način:

$$(A - \lambda \mathbb{I})\, v_j = v_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, k \, , \tag{2}$$

odnosno

$$\begin{aligned} v_k &= v \\ v_{k-1} &= (A - \lambda \mathbb{I}) v_k = (A - \lambda \mathbb{I})^1 v \\ v_{k-2} &= (A - \lambda \mathbb{I}) v_{k-1} = (A - \lambda \mathbb{I})^2 v \\ &\vdots \\ v_1 &= (A - \lambda \mathbb{I}) v_2 = (A - \lambda \mathbb{I})^{k-1} v \end{aligned}$$

Kažemo da vektori $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ čine **lanac generalisanih sopstvenih vektora dužine** k. Primetimo da u datom lancu $\{v_i\}_{i=1}^k$, vektor v_1 je sopstveni vektor, jer je $v_1 \neq 0$ i

$$(A - \lambda \mathbb{I}) v_1 = (A - \lambda \mathbb{I})^k v = 0,$$

kao i da je

$$(A - \lambda \mathbb{I})^j v_j = 0, \qquad (A - \lambda \mathbb{I})^{j-1} v_j = v_1 \neq 0, \quad j = 2, 3, \ldots, k$$

tj. v_j, $j = 2, 3, \ldots, k$ je generalisani vektor ranga j.

Teorema 7 *Vektori $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ koji čine lanac generalisanih sopstvenih vektora odgovarajućih sopstvenoj vrednosti λ su linearno nezavisni.*

Dokaz. Neka je

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = 0 \tag{$\star$}$$

Množenjem sa $(A - \lambda \mathbb{I})^{k-1}$, kako je $(A - \lambda \mathbb{I})^{k-1} v_{k-1} = 0$ i

$$(A - \lambda \mathbb{I})^{k-1} v_j = (A - \lambda \mathbb{I})^{k-1-j} (A - \lambda \mathbb{I})^j v_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-2$$

ostaje $0 = c_k(A-\lambda\mathbb{I})^{k-1}v_k = c_k v_1$. Kako je $v_1 \neq 0$, biće $c_k = 0$. Nastavljajući postupak, množeći $(\star)$ sa $(A-\lambda\mathbb{I})^{k-2}, \ldots, (A-\lambda\mathbb{I})$, dobija se $c_{k-1} = 0, \ldots, c_1 = 0$, odnosno linearna nezavisnost vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ koji čine lanac generalisanih sopstvenih vektora. $\square$

Generalisani sopstveni vektori nisu jedinstveno određeni relacijama (2)*, ali se biraju tako da budu linearno nezavisni.*

Postupak odredjivanja generalisanih sopstvenih vektora:

Neka je λ sopstvena vrednost algebarske višestrukosti m i geometrijske višestrukosti μ. Treba odrediti još $m-\mu$ generalisanih sopstvenih vektora odgvarajućih sopstvenoj vrednosti λ.

Neka je
$$\mathcal{N}_j(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda\mathbb{I})^j = \{v \,:\, (A-\lambda\mathbb{I})^j v = 0\}$$
jezgro matrice $(A-\lambda\mathbb{I})^j$, i $\varrho_j = \dim \mathcal{N}_j(\lambda)$ - broj linearno nezavisnih generalisanih sopstvenih vektora ranga j odgovarajućih sopstvenoj vrednosti λ .

Korak 1. Odredjujemo ϱ_i sve dok $\varrho_\kappa = m$ za neko $\kappa \in \mathbb{N}$. Dakle, neka je κ najmanji prirodan broj za koji je $\varrho_\kappa = m$. Broj κ odredjuje dimeziju najvećeg Jordanovog bloka u Jordanovoj matrici odgovarajućeg sopstvenoj vrednosti λ. Tada je

$$\mathcal{N}_1(\lambda) \subset \mathcal{N}_2(\lambda) \subset \ldots \subset \mathcal{N}_j(\lambda) \subset \ldots \subset \mathcal{N}_\kappa(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_j < \ldots < \varrho_\kappa = m\,.$$

Odredjujemo brojeve

$$\begin{aligned} d_1 &= \varrho_1 \\ d_2 &= \varrho_2 - \varrho_1 \\ &\vdots \\ d_\kappa &= \varrho_\kappa - \varrho_{\kappa-1} \end{aligned}$$

Korak 2. Formiramo dijagram u kome je broj kvadratića u $j-$toj vrsti jednak d_j:

$$\begin{array}{l} \underbrace{\square\ \square\ \cdots\ \square\ \square\ \boxtimes}_{d_1} \\ \underbrace{\square\ \square\ \cdots\ \square\ \boxtimes}_{d_2} \\ \underbrace{\square\ \square\ \cdots\ \square}_{d_3} \\ \vdots \\ \underbrace{\square\ \square\ \boxtimes}_{d_{\kappa-1}} \\ \underbrace{\square\ \square}_{d_\kappa} \end{array}$$

Korak 3. Popunjavanje dijagrama vektorima se vrši **odozdo na gore**. Najpre, popunimo poslednju vrstu vektorima koji pripadaj skupu $\mathcal{N}_\kappa(\lambda) \setminus \mathcal{N}_{\kappa-1}(\lambda)$. Svaki put kada imamo vektor v u nekom od kvadratića, u kvadratu iznad njega, nalaziće se vektor $(A-\lambda\mathbb{I})v$. Ukoliko je kvadratić najniži u svojoj koloni "$\boxtimes$", a pripada vrsti j, popunimo ga vektorom iz skupa $\mathcal{N}_j(\lambda)$ koji je linearno nezavistan sa vektorima iz $\mathcal{N}_{j-1}(\lambda)$, kao i sa prethodno unetim vektorima u $j-$toj vrsti. Ukoliko je kvadratić najniži u svojoj koloni "$\boxtimes$", a pripada prvoj vrsti, popunimo ga

sopstvenim vektorom iz skupa $\mathcal{N}_1(\lambda)$ koji je linearno nezavistan sa prethodno unetim vektorima u toj vrsti.
KORAK 4. Jordanovu bazu matrice onda formiramo uzimajući za vektore kolona vektore u dijagramu **po kolonama odozgo na dole**, pri čemu **uzimamo kolone sa leva u desno**.

POSTUPAK ODREDJIVANJA JORDANOVE DIJAGONALNE FORME MATRICE :

Prethodno opisani postupkom odredjuju se m linearno nezavisnih generalisanih vektora odgovarajućih sopstvenoj vrednosti algebarske višetrukosti m, koji će formirati matricu transformacije T. Medjutim, važno je napomenuti da se samo na osnovu dijagrama može odrediti Jordanova dijagonalna forma matrice, odnosno bez popunjavanja dijagrama tj. odredjivanja generalisanih vektora. Naime, **broj elemenata svake od kolona u dijagramu određuje dimenziju Jordanovog bloka odgovarajućeg sopstvenoj vrednosti λ u Jordanovoj matrici.**

Jordanov blok $J(\lambda)$ dimenzije k odgovarajući sopstvenoj vrednosti λ je matrica dimenzije $k \times k$ kod koje je λ na glavnoj dijagonali i 1 iznad glavne dijagonale:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}$$

Jordanov blok $J_i(\lambda)$ dimenzije $i = 1, 2, 3, 4$ odgovarajući sopstvenoj vrednosti λ je:

$$J_1(\lambda) = [\lambda], \quad J_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_4(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jordanova dijagonalna forma matrice je dijagonalna blok-matrica čiji su svi blokovi Jordanovi blokovi. Npr. Jordanova dijagonalna forma matrice dimenzije 7×7, sa jednim Jordanovim blokom dimenzije 3×3 i sa dva Jordanova bloka dimenzije 2×2 je:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]_{7\times 7}$$

Lema 1 *Neka matrica A reda 2×2 ima dvostruku sopstvenu vrednost λ. Tada postoji linearna transformacija T takva da matrica $J_2 = T^{-1}AT$ ima jedan od sledeća dva oblika*

$$\text{(i)}\ J_{21} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\ J_{22} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Ako je $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, matrica $J_2 = T^{-1}AT$ ima redom oblik (i) ili (ii) zavisnosti od toga da li je $\dim \mathcal{K} = 2$ ili $\dim \mathcal{K} = 1$. Eksponent ovih matrica je:

$$\text{(i) } e^{J_{21}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii) } e^{J_{22}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

DOKAZ. **(i)** Prema Teoremi 2.
(ii) (I NAČIN.) Prema Putzerovom algoritmu je

$$e^{J_{22}t} = p_1(t)M_0 + p_2(t)M_1$$

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_1 = J_{22} - \lambda\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $p_1(t)$ je rešenje KP

$$p_1'(t) = \lambda p_1(t), \quad p_1(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_1(t) = e^{\lambda t} \tag{4}$$

dok je $p_2(t)$ rešenje KP

$$p_2'(t) = p_1(t) + \lambda p_2(t), \quad p_2(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2(t) = te^{\lambda t} \tag{5}$$

Prema tome,

$$e^{J_{22}t} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{\lambda t}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

(II NAČIN.) Ako je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onda je $J_{22} = \lambda\mathbb{I} + B$. Kako je $B^k = \mathbb{O}$ za svako $k \geq 2$, onda je eksponent matrice

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \frac{t^k}{k!} = \mathbb{I} + B\,t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$e^{J_{22}t} = e^{\lambda t\,\mathbb{I}} \cdot e^{B\,t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda\,t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda\,t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Lema 2 *Neka matrica A reda 3×3 ima trostruku sopstvenu vrednost λ. Tada postoji linearna transformacija T takva da matrica $J_3 = T^{-1}AT$ ima jedan od sledeća tri oblika*

$$\text{(i) } J_{31} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{(ii) } J_{32} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{(iii) } J_{33} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ako je $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, matrica $J_3 = T^{-1}AT$ ima redom oblik (i), (ii) ili (iii) zavisnosti od toga da li je $\dim \mathcal{K} = 3$, $\dim \mathcal{K} = 2$ ili $\dim \mathcal{K} = 1$. Eksponent matrice J_{3k}, $k = 1, 2, 3$ u (6) je:

$$\text{(i) } e^{J_{31}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii) } e^{J_{32}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii) } e^{J_{33}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

DOKAZ. **(i)** Prema Teoremi 2.

(ii) Matricu $e^{J_{32}t}$ možemo dobiti primenom Leme 1-(ii) i Teoreme 6. ili Putzerovim algoritmom ili koristeći razvoj matrične eksponencijalne funkcije u matrični red.

(I NAČIN.) Prema Putzerovom algoritmu je

$$e^{J_{32}t} = p_1(t)M_0 + p_2(t)M_1 + p_3(t)M_2$$

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_1 = J_{32} - \lambda \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = (J_{32} - \lambda \mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $p_1(t)$ je rešenje KP

$$p_1'(t) = \lambda p_1(t), \quad p_1(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_1(t) = e^{\lambda t} \tag{7}$$

dok je $p_2(t)$ rešenje KP

$$p_2'(t) = p_1(t) + \lambda p_2(t), \quad p_2(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2(t) = te^{\lambda t} \tag{8}$$

Prema tome,

$$e^{J_{32}t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{\lambda t} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

(II NAČIN.) Ako je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onda je $J_{32} = \lambda \mathbb{I} + B$. Kako je $B^k = \mathbb{O}$ za svako $k \geq 2$, onda je eksponent matrice

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \frac{t^k}{k!} = \mathbb{I} + B\,t = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$e^{J_{32}t} = e^{\lambda t\,\mathbb{I}} \cdot e^{B\,t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

(iii) (I NAČIN.) Prema Putzerovom algoritmu je

$$e^{J_{33}t} = p_1(t)M_0 + p_2(t)M_1 + p_3(t)M_2$$

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_1 = J_{33} - \lambda\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = (J_{33} - \lambda\mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $p_1(t)$ je rešenje KP (7), $p_2(t)$ je rešenje KP (8), i $p_3(t)$ je rešenje KP

$$p_3'(t) = p_2(t) + \lambda p_3(t), \quad p_3(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_3(t) = \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}$$

Prema tome,

$$e^{J_{33}t} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{\lambda t}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

(II NAČIN.) Ako je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onda je $J_{33} = \lambda\,\mathbb{I} + B$. Kako je

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i $B^k = \mathbb{O}$ za svako $k \geq 3$, onda je eksponent matrice

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \frac{t^k}{k!} = \mathbb{I} + B\,t + B^2\,\frac{t^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$e^{J_{33}t} = e^{\lambda t\,\mathbb{I}} \cdot e^{B\,t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Postupak se može uopštiti, pri čemu koristeći Teoremu 6. je jasno da samo treba odrediti matričnu eksponencijalnu funkciju $e^{J_n t}$ za svaki od Jordanovih blokova J_n dimenzije $n \times n$,

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Kako su prethodno određene matrične eksponencijalne funkcije $e^{J_{22}t}$ i $e^{J_{33}t}$ za Jordanove blokove dimenzije 2 i 3, posmatramo Žordanov blok dimenzije 4×4:

$$J_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ako je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onda je $J_4 = \lambda \mathbb{I} + B$. Kako je

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i $B^k = \mathbb{O}$ za svako $k \geq 4$, onda je eksponent matrice

$$e^{Bt} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \frac{t^k}{k!} = \mathbb{I} + B\,t + B^2\,\frac{t^2}{2} + B^3\,\frac{t^3}{3!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$e^{J_4 t} = e^{\lambda t \mathbb{I}} \cdot e^{B\,t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}\,e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}\,e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}\,e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Teorema 8 *Neka je A realna matrica reda $n = m + 2k$. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ realne sopstvene vrednosti matrice A među kojima može biti i višestrukih i $\lambda_{m+j} = \alpha_j + i\beta_j, \lambda_{m+k+j} = \overline{\lambda_{m+j}} = \alpha_j - i\beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, k$, konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti među kojima može biti i višestrukih, odgovarajući generalisani sopstveni vektori*

$$v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+k}, \overline{v_{m+1}}, \ldots, \overline{v_{m+k}} = v_n$$

formiraju bazu u $\mathbb{R}^n$, matrica

$$T = [v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_m \;\; \mathrm{Re}(v_{m+1}) \;\; \mathrm{Im}(v_{m+1}) \;\; \cdots \;\; \mathrm{Re}(v_{m+k}) \;\; \mathrm{Im}(v_{m+k})]_{n \times n}$$

je nesingularna i

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & & 0 \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_{m+2k}) \end{bmatrix}.$$

Za $j \in \{1,2,\dots,m\}$ matrica $J(\lambda_j)$ je Jordanova dijagonalna matrica odgovarajuća sopstvenoj vrednosti $\lambda_j \in \mathbb{R}$ koja se sastoji od Jordanovih blokova

$$J_s(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{s\times s}. \tag{9}$$

Za $j = \{1,2,\dots,k\}$ matrica $J(\lambda_j)$ Jordanova dijagonalna matrica odgovarajuća sopstvenoj vrednosti $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$ koja se sastoji od Jordanovih blokova

(10)

$$J_{2s}(\lambda_j) = \begin{bmatrix} C_j & I_2 & & & 0 \\ & C_j & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & & C_j \end{bmatrix}_{2s\times 2s}, \quad \text{gde je } C_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix},\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eksponent Jordanovog bloka (9) dimenzije s je

$$e^{J_s(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s-4}}{(s-4)!} & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-5}}{(s-5)!} & \frac{t^{s-4}}{(s-4)!} & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eksponent Jordanovog bloka (10) dimenzije $2s$ je

$$e^{J_{2s}(\lambda_j)t} = e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} R_2 & tR_2 & \frac{t^2}{2}R_2 & \frac{t^3}{3!}R_2 & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}R_2 & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}R_2 & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}R_2 \\ 0 & R_2 & tR_2 & \frac{t^2}{2}R_2 & \dots & \frac{t^{s-4}}{(s-4)!}R_2 & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}R_2 & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}R_2 \\ 0 & 0 & R_2 & tR_2 & \dots & \frac{t^{s-5}}{(s-5)!}R_2 & \frac{t^{s-4}}{(s-4)!}R_2 & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}R_2 \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R_2 & tR_2 & \frac{t^2}{2}R_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_2 & tR_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix},$$

gde je $R_2 = \begin{bmatrix} \cos\beta_j t & \sin\beta_j t \\ -\sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{bmatrix}$.

Primer 8.4. Rešiti sistem DJ $Y' = AY$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Matrica A ima trostruku sopstvenu vrednost $\lambda = 2$ i samo jedan sopstveni vektor $v_1 = (-1, 1, 0)$:

```
A = {{2, 0, −1}, {0, 2, 1}, {−1, −1, 2}}; Eigensystem[A]
Out[1] = {{2, 2, 2}, {{−1, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}
```

I način: Odredimo druga dva linearno nezavisna vektora - generalisana sopstvena vektora:

Vektor v_2 je rešenje linearnog sistema jednačina $(A - 2I)v_2 = v_1$:

```
LinearSolve[A - 2 IdentityMatrix[3], {−1, 1, 0}]
Out[3] = {0, 0, 1}
```

Vektor v_3 je rešenje linearnog sistema jednačina $(A - 2I)v_3 = v_2$:

```
LinearSolve[A - 2 IdentityMatrix[3], {0, 0, 1}]
Out[4] = {−1, 0, 0}
```

Matrica tranformacije je

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
T = Transpose[{{−1, 1, 0}, {0, 0, 1}, {−1, 0, 0}}];
TT = Inverse[T]; J = TT.A.T; Matrix Form[J]
```

Jordanova normalna forma matrice A je oblika (iii) u Lemi 2:

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prema Lemi 2. je

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Tada je

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2t}\left(2+t^2\right) & \frac{1}{2}e^{2t}t^2 & -e^{2t}t \\ -\frac{1}{2}e^{2t}t^2 & -\frac{1}{2}e^{2t}\left(-2+t^2\right) & e^{2t}t \\ -e^{2t}t & -e^{2t}t & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Primetimo da je

$$(A-2I)^2v_3 = (A-2I)v_2 = v_1, \quad (A-2I)^2v_2 = (A-2I)v_1 = 0, \quad (A-2I)^3v_3 = (A-2I)v_1 = 0,$$

odnosno v_2 je generalisani sopstveni vektor ranga 2 i v_3 je generalisani sopstveni vektor ranga 3.

II način: Kako je

$$\mathcal{N}_1(\lambda) = \{(-1,1,0)\}, \quad \mathcal{N}_2(\lambda) = \{(0,0,1),(-1,1,0)\}, \quad \mathcal{N}_3(\lambda) = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$$

$$\varrho_1 = \dim \mathcal{N}_1(\lambda) = 1, \quad \varrho_2 = \dim \mathcal{N}_2(\lambda) = 2, \quad \varrho_3 = \dim \mathcal{N}_3(\lambda) = 3$$

najmanji broj κ za koji je $\varrho_\kappa = \dim \mathcal{N}_\kappa(\lambda) = 3$ je u ovom slučaju $\kappa = 3$. Tada je

$$d_1 = \varrho_1 = 1, \qquad d_2 = \varrho_2 - \varrho_1 = 2 - 1 = 1, \qquad d_3 = \varrho_3 - \varrho_2 = 3 - 2 = 1$$

Napomena. Jezgro matrice $(A - 2\,I)^j$, $j = 2, 3$ u programskom paketu `Mathematica` odredjujemo na sledeći način:

```
id=IdentityMatrix[3];
A2=MatrixPower[A-λ id,2];   NullSpace[A2]
A3=MatrixPower[A-λ id,3];   NullSpace[A3]
```

Popunjavamo dijagram oblika:

$$\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \square\end{array}$$

i u Jordanovoj matrici imaćemo jedan blok odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda = 2$ koji je dimenzije 3×3.

I IZBOR:

$$w_3 = (0,1,0) \in \mathcal{N}_3(\lambda) \setminus \mathcal{N}_2(\lambda) \xrightarrow{(A-2I)} w_2 = (A-2I)w_3 \xrightarrow{(A-2I)} w_1 = (A-2I)w_2$$

II IZBOR:

$$\widetilde{w}_3 = (1,0,0) \in \mathcal{N}_3(\lambda) \setminus \mathcal{N}_2(\lambda) \xrightarrow{(A-2I)} \widetilde{w}_2 = (A-2I)\widetilde{w}_3 \xrightarrow{(A-2I)} \widetilde{w}_1 = (A-2I)\widetilde{w}_2$$

$$\begin{array}{ccc}\boxed{(1,-1,0)} & \qquad & \boxed{(1,-1,0)}\\ \uparrow & & \uparrow\\ \boxed{(0,0,-1)} & & \boxed{(0,0,-1)}\\ \uparrow & & \uparrow\\ \boxed{(0,1,0)} & & \boxed{(1,0,0)}\end{array}$$

Primetimo da je $w_1 = \widetilde{w}_1 \in \mathcal{N}_1(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(A-2I)$, jer je $w_1 = -v_1$. Dakle, matrica tranformacije je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad J = T^{-1}AT = \widetilde{T}^{-1}A\widetilde{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

PROVERA: Matricu transformacije T i Jordanovu normalnu formu matrice, u programskom paketu `Mathematica`, određujemo naredbom `JordanDecomposition`$[A]$.

```
JDA = JordanDecomposition[A]; JDA
Out[3] = {{{-1,0,-1},{1,0,0},{0,1,0}},{{2,1,0},{0,2,1},{0,0,2}}}
T = JDA[[1]]; MatixForm[T]
```

Matrica tranformacije je

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$J = \text{JDA}[[2]]; \text{MatixForm}[J]$

Jordanova normalna forma matrice A je oblika (iii) u Lemi 1:

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primer 8.5. Rešiti sistem DJ $Y' = AY$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Konjugovano kompleksnoj sopstvenoj vrednosti odgovaraju kompleksni sopstveni vektori

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mp i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mp i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = V_1 \mp iV_2$$

a dvostrukoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_3 = 2$ odgovara sopstveni vektor $v_3 = (1, 0, 0, 0)$. Rešavanjem sistema $(A - 2I)V = v_3$ dobija se

$$V = [0, 0, 1, 0] = v_4 .$$

Uzimajući za vektore baze $\{V_1, V_2, v_3, v_4\}$, matrica tranformacije je

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies J = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc|cc} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t & 0 & 0 \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

Tada je

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & e^{2t}t & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos(t) & 0 & e^{2t}\sin(t) \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -e^{2t}\sin(t) & 0 & e^{2t}\cos(t) \end{bmatrix}$$

Primer 8.6. Rešiti sistem DJ $Y' = AY$ gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Matrica A ima trostruku sopstvenu vrednost $\lambda = 2$ i dva sopstvena vektora $v_1 = (0,0,1)$ i $v_2 = (1,1,0)$. Kako je

$$\mathcal{N}_1(\lambda) = \{(0,0,1),(1,1,0)\}, \quad \mathcal{N}_2(\lambda) = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$$

$$\varrho_1 = \dim \mathcal{N}_1(\lambda) = 2, \quad \varrho_2 = \dim \mathcal{N}_2(\lambda) = 3$$

najmanji broj κ za koji je $\varrho_\kappa = \dim \mathcal{N}_\kappa(\lambda) = 3$ je u ovom slučaju $\kappa = 2$. Tada je

$$d_1 = \varrho_1 = 2, \qquad d_2 = \varrho_2 - \varrho_1 = 3 - 2 = 1$$

Popunjavamo dijagram oblika:

$$\begin{array}{cc} \boxed{w_1} & \boxed{w_3} \\ & \\ \boxed{w_2} & \end{array}$$

i imaćemo jedan blok Jordanove matrice dimenzije 2×2 i jedan blok dimenzije 1×1. Prema tome, Jordanova normalna forma matrice A je

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \implies e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]. \tag{11}$$

I izbor:

$$w_2 = (1,0,0) \in \mathcal{N}_2(\lambda) \setminus \mathcal{N}_1(\lambda) \xrightarrow{(A-2I)} w_1 = (A-2I)w_2 = (-1,-1,-1)$$

Treba odrediti vektor $w_3 \in \mathcal{N}_1(\lambda)$ koji je linearno nezavisan sa vektorom w_1:

$$w_3 = (0,0,1) \in \mathcal{N}_1(\lambda)$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{(-1,-1,-1)} & \rightarrow & \boxed{(0,0,1)} \\ \uparrow & & \\ \boxed{(1,0,0)} & & \end{array}$$

II izbor:

$$\widetilde{w}_2 = (0,1,0) \in \mathcal{N}_2(\lambda) \setminus \mathcal{N}_1(\lambda) \xrightarrow{(A-2I)} \widetilde{w}_1 = (A-2I)\widetilde{w}_2 = (1,1,1)$$

Treba odrediti vektor $\widetilde{w}_3 \in \mathcal{N}_1(\lambda)$ koji je linearno nezavisan sa vektorom $\widetilde{w}_1$:

$$\widetilde{w}_3 = (1,1,0) \in \mathcal{N}_1(\lambda)$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{(1,1,1)} & \rightarrow & \boxed{(1,1,0)} \\ \uparrow & & \\ \boxed{(0,1,0)} & & \end{array}$$

Dakle, matrica tranformacije je

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a Jordanova normalna forma matrice A je u slučaju transformacije T i transformacije $\widetilde{T}$ istog oblika (11), odnosno $J = T^{-1}AT = \widetilde{T}^{-1}A\widetilde{T}$. Dakle,

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} -e^{2t}(-1+t) & e^{2t}t & 0 \\ -e^{2t}t & e^{2t}(1+t) & 0 \\ -e^{2t}t & e^{2t}t & e^{2t} \end{bmatrix} = \Phi(t)$$

Primer 8.7. Rešiti sistem DJ $Y' = AY$ gde je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Matrica A ima sopstvenu vrednost $\lambda = 0$ algebarske višetrukosti $m = 4$ i geometrijske višetrukosti $\mu = 1$ sa jednim sopstvenim vektorom $v_1 = (1, 3, 0, 0)$. Kako je

$$\mathcal{N}_1(\lambda) = \{\{1, 3, 0, 0\}\},$$

$$\mathcal{N}_2(\lambda) = \{\{0, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0\}\}$$

$$\mathcal{N}_3(\lambda) = \{\{0, 0, 2, 1\}, \{0, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0\}\}$$

$$\mathcal{N}_4(\lambda) = \{\{0, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0\}\}$$

$$\varrho_1 = \dim \mathcal{N}_1(\lambda) = 1, \quad \varrho_2 = \dim \mathcal{N}_2(\lambda) = 2, \quad \varrho_3 = \dim \mathcal{N}_3(\lambda) = 3, \quad \varrho_4 = \dim \mathcal{N}_4(\lambda) = 4 = m$$

najmanji broj κ za koji je $\varrho_\kappa = \dim \mathcal{N}_\kappa(\lambda) = 4 = m$ je u ovom slučaju $\kappa = 4$. Tada je

$$d_1 = \varrho_1 = 1, \qquad d_2 = \varrho_2 - \varrho_1 = 1, \qquad d_3 = \varrho_3 - \varrho_2 = 1, \qquad d_4 = \varrho_4 - \varrho_3 = 1$$

Popunjavamo dijagram oblika:

$$\begin{array}{c} \boxed{w_1} \\ \uparrow \\ \boxed{w_2} \\ \uparrow \\ \boxed{w_3} \\ \uparrow \\ \boxed{w_4} \end{array}$$

Jordanova matrica ima jedan blok odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda = 0$ dimenzije 4×4, odnosno oblika je

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da bi odredili matricu transformacije T, popunjavamo dijagram:

$$\begin{array}{c}\boxed{(-168,-504,0,0)}\\ \uparrow \\ \boxed{(-14,126,0,0)}\\ \uparrow \\ \boxed{(7,-1,-8,-4)}\\ \uparrow \\ \boxed{(0,0,0,1)}\end{array}$$

$$w_4=(0,0,0,1)\in\mathcal{N}_4(\lambda)\setminus\mathcal{N}_3(\lambda)\ \xrightarrow{(A-\lambda I)}\ w_3=Aw_4=(7,-1,-8,-4)$$
$$\xrightarrow{(A-\lambda I)}\ w_2=Aw_3=(-14,126,0,0)\ \xrightarrow{(A-\lambda I)}\ w_1=Aw_2=(-168,-504,0,0)$$

Primetimo da je $w_1\in\mathcal{N}_1(\lambda)=\operatorname{Ker}A$, jer je $w_1=-168\,v_1$. Matrica tranformacije je

$$T=\begin{bmatrix}-168 & -14 & 7 & 0\\ -504 & 126 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica datog sistema je

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}=\begin{bmatrix}3t+1 & -t & t(14t(t+1)+1) & -7t\,(4t^2+t-1)\\ 9t & 1-3t & 7t\,(6t^2-1) & t(21(3-4t)t-1)\\ 0 & 0 & 4t+1 & -8t\\ 0 & 0 & 2t & 1-4t\end{bmatrix}$$

Primer 8.8. Rešiti sistem DJ $Y'=AY$ gde je

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Rešenje. Matrica A ima prostu sopstvenu vrednost $\lambda_1=1$ i njoj odgovarajući sopstveni vektor $v_1=(-1,-1,-1,-1,1)$ i sopstvenu vrednost $\lambda_2=0$ algebarske višestrukosti $m=4$ i geometrijske višestrukosti $\mu=2$, sa dva sopstvena vektora $v_2=(0,0,0,1,0)$, $v_3=(0,0,1,0,0)$. Kako je

$$\mathcal{N}_1(\lambda_2)=\{\{0,0,0,1,0\},\{0,0,1,0,0\}\},\ \ \mathcal{N}_2(\lambda_2)=\{\{0,-1,0,0,1\},\{0,0,0,1,0\},\{0,0,1,0,0\}\}$$
$$\mathcal{N}_3(\lambda_2)=\{\{0,0,0,0,1\},\{0,0,0,1,0\},\{0,0,1,0,0\},\{0,1,0,0,0\}\}$$
$$\varrho_1=\dim\mathcal{N}_1(\lambda_2)=2,\quad \varrho_2=\dim\mathcal{N}_2(\lambda_2)=3,\quad \varrho_3=\dim\mathcal{N}_3(\lambda_2)=4=m$$

najmanji broj κ za koji je $\varrho_\kappa=\dim\mathcal{N}_\kappa(\lambda_2)=4$ je u ovom slučaju $\kappa=3$. Tada je

$$d_1=\varrho_1=2,\qquad d_2=\varrho_2-\varrho_1=3-2=1,\qquad d_3=\varrho_3-\varrho_2=4-3=1$$

Da bi odredili matricu transformacije T, odnosno još dva generalisana sopstvena vektora odgovarajućih sopstvenoj vrednosti $\lambda_2 = 0$ popunjavamo dijagram oblika:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{w_1} & \rightarrow & \boxed{w_4} \\ \uparrow & & \\ \boxed{w_2} & & \\ \uparrow & & \\ \boxed{w_3} & & \end{array}$$

U Jordanovoj matrici imaćemo jedan blok odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda_2 = 0$ koji je dimenzije 3×3, dok će drugi blok biti dimenzije 1×1. Prema tome, Jordanova matrica je oblika

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \implies e^{Jt} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{array}\right]$$

$$w_3 = (0,0,0,0,1) \in \mathcal{N}_3(\lambda_2) \setminus \mathcal{N}_2(\lambda_2) \xrightarrow{(A-\lambda_2 I)} w_2 = Aw_3 = (0,-1,-1,-1,1)$$
$$\xrightarrow{(A-\lambda_2 I)} w_1 = Aw_2 = (0,0,0,-1,0)$$

Treba odrediti vektor $w_4 \in \mathcal{N}_1(\lambda_2) = \{v_1, v_2\}$ koji je linearno nezavisan sa vektorom $w_1 = -v_1$:

$$w_4 = v_2 = (0,0,1,0,0) \in \mathcal{N}_1(\lambda_2)$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{(0,0,0,-1,0)} & \rightarrow & \boxed{(0,0,1,0,0)} \\ \uparrow & & \\ \boxed{(0,-1,-1,-1,1)} & & \\ \uparrow & & \\ \boxed{(0,0,0,0,1)} & & \end{array}$$

Matrica tranformacije je

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies J = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dakle,

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+e^t & 1-t & 0 & 0 & -t \\ -1+e^t & -t & 1 & 0 & -t \\ -t+e^t-1 & -\frac{t^2}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2}t(t+2) \\ 1-e^t & t & 0 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$$

Primer 8.9. Rešiti sistem DJ $Y' = AY$ gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Matrica A ima sopsvenu vrednost $\lambda = 1$ algebarske višestrukosti $m = 6$ i geometrijske višestrukosti $\mu = 3$, sa tri sopstvena vektora $v_1 = (0, -1, 0, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Kako je

$$\mathcal{N}_1(\lambda) = \{\{0, -1, 0, 0, 1, 0\}, \{1, 0, 0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0, 0\}\},$$

$$\mathcal{N}_2(\lambda) = \{\{0, 0, 0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0, 0, 0\}\}$$

$$\mathcal{N}_3(\lambda) = \{\{0, 0, 0, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{1, 0, 0, 0, 0, 0\}\}$$

$$\varrho_1 = \dim \mathcal{N}_1(\lambda) = 3, \quad \varrho_2 = \dim \mathcal{N}_2(\lambda) = 5, \quad \varrho_3 = \dim \mathcal{N}_3(\lambda) = 6 = m$$

najmanji broj κ za koji je $\varrho_\kappa = \dim \mathcal{N}_\kappa(\lambda) = 6 = m$ je u ovom slučaju $\kappa = 3$. Tada je

$$d_1 = \varrho_1 = 3, \qquad d_2 = \varrho_2 - \varrho_1 = 5 - 3 = 2, \qquad d_3 = \varrho_3 - \varrho_2 = 6 - 5 = 1$$

Da bi odredili matricu transformacije $T = [w_1 \ \ w_2 \ \ w_3 \ \ w_4 \ \ w_5 \ \ w_6]$, popunjavamo dijagram oblika:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{w_1} & \boxed{w_4} \arrow[r] & \boxed{w_6} \\
\boxed{w_2} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{w_5} \arrow[u] & \\
\boxed{w_3} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Dakle, jedan blok Jordanove matrice odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda = 1$ je dimenzije 3×3, drugi blok je dimenzije 2×2 i treći blok je dimenzije 1×1. Prema tome, Jordanova matrica je oblika

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \implies e^{Jt} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} e^t & t\,e^t & e^t \frac{t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & t\,e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^t & t\,e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{array}\right]$$

$$w_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \in \mathcal{N}_3(\lambda) \setminus \mathcal{N}_2(\lambda) \quad \xrightarrow{(A-\lambda I)} \quad w_2 = (A - I)w_3 = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$$

$$\xrightarrow{(A-\lambda I)} \quad w_1 = (A - I)w_2 = (0, -1, -1, 0, 1, 0)$$

Treba odrediti vektor $w_5 \in \mathcal{N}_2(\lambda)$ koji je linearno nezavisan sa vektorima iz $\mathcal{N}_1(\lambda) = \{v_1, v_2, v_3\}$, kao i sa vektorom $w_2 = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$. Kako za vektor $\tilde{w}_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0) \in \mathcal{N}_2(\lambda)$ važi

$$\tilde{w}_5 = w_2 + v_1 - v_3$$

on ne ispunjava navedene uslove. Ali, možemo uzeti vektor $w_5 = (0,0,0,1,0,0) \in \mathcal{N}_2(\lambda)$ koji je lineano nezavisan sa $\{w_2, v_1, v_2, v_3\}$.

$$w_5 = (0,0,0,1,0,0) \in \mathcal{N}_2(\lambda) \quad \xrightarrow{(A-\lambda I)} \quad w_4 = (A-I)w_5 = (0,0,1,0,0,0)$$

Napomena. Linearnu nezavisnost vektora $\{v_1, v_2, v_3, w_2, \tilde{w}_5\}$ možemo u programskom paketu `Wolfram Mathematica` ispitati odredjivanjem ranga matrice $W = [v_1\ v_2\ v_3\ w_2\ \tilde{w}_5]$ naredbom `MatrixRank[W]`.

Treba još odrediti vektor $w_6 \in \mathcal{N}_1(\lambda) = \{v_1, v_2, v_3\}$ koji je linearno nezavisan sa vektorima

$$w_1 = v_1 - v_3, \quad w_4 = v_3$$

Dakle,

$$w_6 = v_2 = (1,0,0,1,0,0)$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{(0,-1,-1,0,1,0)} & \boxed{(0,0,1,0,0,0)} \arrow[r] & \boxed{(1,0,0,1,0,0)} \\
\boxed{(0,1,1,0,0,0)} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{(0,0,0,1,0,0)} \arrow[u] & \\
\boxed{(0,0,0,0,0,1)} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Matrica tranformacije $T = [\, w_1\ \ w_2\ \ w_3\ \ w_4\ \ w_5\ \ w_6 \,]$ je

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^t(t-1) & 0 & 0 & -e^t t & -\frac{1}{2}e^t(t-2)t \\ -e^t t & -e^t t & e^t & e^t t & -e^t t & -\frac{1}{2}e^t(t-2)t \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t t & 0 & 0 & e^t(t+1) & \frac{e^t t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Primer 8.10. Rešiti sistem DJ $Y' = AY$ gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_{1,2} = \pm i$ alegbarske višetrukosti 2 sa jednim parom konjugovano-kompleksnih sopstvenih vektora

$$v_{1,2} = \left[\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}, 1, 0, 0\right]^T$$

Kompleksan sopstveni vektor odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda_1 = i$ je

$$v_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, 1, 0, 0\right]^T$$

Tada je $\overline{v_1}$ sopstveni vektor odgovarajući sopstvenoj vrednosti $\lambda_2 = -i$. Rešavanjem sistema $(A - i\,I)V = v_1$ dobija se drugi generalisani sospstveni vektor

$$V = \left[0, 0, 1, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right]^T = v_2\,.$$

Tada je $\overline{v_2}$ rešenje sistema $(A - i\,I)V = \overline{v_1}$. Izaberimo za vektore baze

$$\begin{aligned}
V_1 &= \operatorname{Re} v_1 = (v_1 + \overline{v_1})/2 = (1/2, 1, 0, 0)\\
V_2 &= \operatorname{Im} v_1 = -I(v_1 - \overline{v_1})/2 = (1/2, 0, 0, 0)\\
V_3 &= \operatorname{Re} v_2 = (v_2 + \overline{v_2})/2 = (0, 0, 1, 1/2)\\
V_4 &= \operatorname{Im} v_2 = -i(v_2 - \overline{v_2})/2 = (0, 0, 0, 1/2)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \implies J = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos t & \sin t & t\cos t & t\sin t\\ -\sin t & \cos t & -t\sin t & t\cos t\\ \hline 0 & 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{array}\right]$$

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \sin t & 0\\ -t\sin t & \cos t & t\cos t & -\sin t\\ -\sin t & 0 & \cos t & 0\\ t\cos t & \sin t & t\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Opšte rešenje sistema $Y' = AY$ je $Y(t) = e^{At}c$:

$$Y(t) = Te^{Jt}T^{-1}c = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \sin t & 0\\ -t\sin t & \cos t & t\cos t & -\sin t\\ -\sin t & 0 & \cos t & 0\\ t\cos t & \sin t & t\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c_1 + c_4 t)\cos t + (c_1 - c_2 - c_3 t + c_4 t)\sin t\\ (c_2 + c_3 t)\cos t - (-2c_1 + c_2 + (c_3 - 2c_4)t)\sin t\\ c_3\cos t - (c_3 - 2c_4)\sin t\\ c_4\cos t + (-c_3 + c_4)\sin t \end{bmatrix}$$

Ako za matricu transformacije uzmemo $T = [v_1\ v_2\ \overline{v_1}\ \overline{v_2}\ ]$ tj.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

dobija se Jordanova matrica u kompleksnom obliku

$$J_K = \left[\begin{array}{cc|cc} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right]$$

Primer 8.11. Rešiti sistem DJ $Y' = AY$ gde je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & -6 & 5 & 0 & 1 & -6 \\ 7 & -7 & 4 & -2 & 4 & -7 \\ 6 & -6 & 6 & -6 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$, algebarske višestrukosti 3 i geometrijske višestrukosti $\mu = 1$ sa jednim parom konjugovano-kompleksnih sopstvenih vektora $v_{1,2} = (1 \pm i, i, 0, 0, 0, 1)^T$. Neka je $\lambda_1 = 2 + 3i$.

$$\mathcal{N}_1(\lambda_1) = \{(1+i, i, 0, 0, 0, 1)\}, \quad \mathcal{N}_2(\lambda_1) = \{(1+i, i, 0, 0, 0, 1), (0, -i, 1-i, 1, 0, 0)\},$$

$$\mathcal{N}_3(\lambda_1) = \{(1+i, i, 0, 0, 0, 1), (0, 1+i, 2i, 0, 2, 0), (0, -i, 1-i, 1, 0, 0)\}$$

$$\varrho_1 = \dim \mathcal{N}_1(\lambda_1) = 1, \quad \varrho_2 = \dim \mathcal{N}_2(\lambda_1) = 2, \quad \varrho_3 = \dim \mathcal{N}_3(\lambda_1) = 3 \quad \Longrightarrow \kappa = 3$$

$$\Downarrow$$

$$d_1 = \varrho_1 = 1, \qquad d_2 = \varrho_2 - \varrho_1 = 2 - 1 = 1, \qquad d_3 = \varrho_3 - \varrho_2 = 3 - 2 = 1$$

$$w_3 = (0, 1+i, 2i, 0, 2, 0) \in \mathcal{N}_3(\lambda) \backslash \mathcal{N}_2(\lambda) \xrightarrow{(A-\lambda_1 I)} w_2 = (A-(2+3i)I)w_3 = (2i, 0, 2, 1+i, 0, 1+i)$$

$$\xrightarrow{(A-\lambda_1 I)} w_1 = (A-(2+3i)I)w_2 = (2, 1+i, 0, 0, 0, 1-i), \quad w_1 = (1-i)v_1 \in \mathcal{N}_1(\lambda)$$

$$\boxed{(2, 1+i, 0, 0, 0, 1-i)}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{(2i, 0, 2, 1+i, 0, 1+i)}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{(0, 1+i, 2i, 0, 2, 0)}$$

Matrica transformacije je $T = [w_1 \;\; w_2 \;\; w_3 \;\; \overline{w_1} \;\; \overline{w_2} \;\; \overline{w_3}\;]$:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2i & 0 & 2 & -2i & 0 \\ 1+i & 0 & 1+i & 1-i & 0 & 1-i \\ 0 & 2 & 2i & 0 & 2 & -2i \\ 0 & 1+i & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1-i & 1+i & 0 & 1+i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

i Jordanova matrica u kompleksnom obliku je

$$J_K = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2+3i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2-3i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{array}\right]$$

Ako za matricu transformacije uzmemo

$$T = [\operatorname{Re} w_1 \;\; \operatorname{Im} w_1 \;\; \operatorname{Re} w_2 \;\; \operatorname{Im} w_2 \;\; \operatorname{Re} w_3 \;\; \operatorname{Im} w_3\;] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kompleksnu Jordanovu normalnu formu J_K dovodimo na realni oblik

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad e^{Jt} = e^{2t} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \cos(3t) & \sin(3t) & t\cos(3t) & t\sin(3t) & \frac{1}{2}t^2\cos(3t) & \frac{1}{2}t^2\sin(3t) \\ -\sin(3t) & \cos(3t) & -t\sin(3t) & t\cos(3t) & -\frac{1}{2}t^2\sin(3t) & \frac{1}{2}t^2\cos(3t) \\ \hline 0 & 0 & \cos(3t) & \sin(3t) & t\cos(3t) & t\sin(3t) \\ 0 & 0 & -\sin(3t) & \cos(3t) & -t\sin(3t) & t\cos(3t) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(3t) & \sin(3t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(3t) & \cos(3t) \end{array}\right]$$