9. Egzistencija i jedinstvenost rešenja sistema diferencijalnih jednačina

Košijev problem normalnog sistema DJ, odnosno vektorske DJ:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \tag{1}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \mathbf{y}' = (y_1', y_2', \ldots, y_n'),$$

$\mathbb{D}$ otvoren podskup skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$; $\mathbf{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \ldots, f_n(x, \mathbf{y})) \tag{2}$$

Lema o ekvivalenciji

Problem egzistencije i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema (1) je u direktnoj vezi sa egzistencijom i jedinstvenošću rešenja odgovarajuće vektorske integralne jednačine

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\, dt. \tag{3}$$

Definicija 1 *Vektorska funkcija $\mathbf{h} : I \to \mathbb{R}^n$ je rešenje vektorske integralne jednačine* (3) *na intervalu I, ako je za svako $x \in I$:*

1. $\mathbf{h}$ *neprekidna na I;*
2. $(x, \mathbf{h}(x)) \in \mathbb{D}$ *za svako $x \in I$;*
3. $\mathbf{h}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{h}(t))\, dt,\ x_0 \in I.$

Naredno tvrđenje upućuje na *ekvivalenciju rešavanja Košijevog problema* (1) *i odgovarajuće integralne jednačine* (3).

Lema 1 [Lema o ekvivalenciji] *Neka je $\mathbf{f} \in C(\mathbb{D})$. Funkcija $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x)$, $\mathbf{h} \in C^1(a, b)$ je rešenje Košijevog problema* (1) *na (a, b) ako i samo ako je $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x)$ rešenje integralne jednačine* (3) *na (a, b).*

Dokaz: $(\Rightarrow)$: Ako je funkcija $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x)$ rešenje Košijevog problema (1), tada $(x, \mathbf{h}(x)) \in \mathbb{D}$ za svako $x \in (a, b)$. Kako je $\mathbf{f} \in C(\mathbb{D})$, tada je $\mathbf{h} \in C^1(a, b)$. Leva i desna strana jednakosti $\mathbf{h}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{h}(x))$, $x \in (a, b)$ su neprekidne, tako da se integracijom na $[x_0, x]$ dobija

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{h}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{h}(t))dt, \ x \in (a, b)\,,$$

pa je $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x), x \in (a, b)$ rešenje integralne jednačine (3).

($\Leftarrow$): Ako je $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x)$, $x \in (a, b)$ rešenje vektorske integralne jednačine (3), tada $(x, \mathbf{h}(x)) \in \mathbb{D}$ za svako $x \in (a, b)$ i zbog neprekidnosti vektorske funkcije $\mathbf{f}$ na $\mathbb{D}$ funkcija $\mathbf{f}(s, \mathbf{h}(s))$ je neprekidna kao funkcija po $s \in (a, b)$, pa je integral u (4) diferencijabilna funkcija. Diferenciranjem (4) dobija se $\mathbf{h}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{h}(x))$ za svako $x \in (a, b)$, odnosno $\mathbf{h} \in C^1(a, b)$ je rešenje vektorske DJ $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$. Kako je $\mathbf{h}(x_0) = \mathbf{y}_0$, funkcija $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x), x \in (a, b)$ je rešenje Košijevog problema (1). $\square$

Peanova teorema egzistencije rešenja

Teorema 1 (Peanova teorema) *Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ vektorska funkcija definisana i neprekidna na pravougaoniku*

$$\Pi = \{(x, \mathbf{y}) \ : \ |x - x_0| \leq a, \ ||\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|| \leq b\}$$

Tada postoji rešenje $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x)$ Košijevog problema (1) definisano na $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, gde je

$$M = \max_{(x,\mathbf{y}) \in \Pi} ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y})||\,, \qquad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Lipšicov uslov

Definicija 2 *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija $f(x, \mathbf{y})$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ u oblasti $\mathbb{D} = I \times \Omega$, ako postoji konstanta $L > 0$ tako da za bilo koje tačke $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}$ važi*

$$\text{(5)} \qquad |f(x, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{z})| \leq L \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|.$$

Za vektorsku funkciju (2) definisanu na $I \times \Omega$, $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ važi adekvatna definicija Lipšicovog uslova, sa nekom normom $||\cdot||$ u prostoru $\mathbb{R}^n$. Mi ćemo se ograničiti na Euklidovu normu: za vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ je

$$||\mathbf{y}||^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ je metrički prostor sa metrikom koja se poklapa sa Euklidovom normom $||\cdot||$. Za vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ važe nejednakosti

$$|y_k| \leq ||\mathbf{y}|| \leq \sum_{k=1}^{n} |y_k|. \tag{6}$$

Definicija 3 *Neka je $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Vektorska funkcija $\mathbf{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ u oblasti $\mathbb{D} = I \times \Omega$, ako postoji konstanta $L > 0$ tako da za bilo koje tačke $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}$ važi*

$$||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| \leq L\, ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||. \tag{7}$$

Definicija 4 *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Vektorska funkcija $\mathbf{f} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ zadovoljava lokalni Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ u oblasti $\mathbb{D} = I \times \Omega$, ako za svaku tačku $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{D}$ postoji okolina $U = U_{(x_0, \mathbf{y}_0)} \subset \mathbb{D}$ te tačke za koju postoji konstanta $L_U > 0$ tako da za bilo koje tačke $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in U$ važi (7).*

Ako vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava lokalni Lipšicov uslov u oblasti $\mathbb{D}$, ne znači da zadovoljava Lipšicov uslov na $\mathbb{D}$, jer (7) ne mora da važi sa istom konstantom $L > 0$ za svako $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}$. Ako vektorksa funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava lokalni Lipšicov uslov u oblasti $\mathbb{D}$, onda ona zadovoljava Lipšicov uslov na svakom kompaktu sadržanom u $\mathbb{D}$.

Lema 2 *Komponente $f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \ldots, f_n(x, \mathbf{y})$ vektorske funkcije $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ zadovoljavaju Lipšicov uslov u oblasti $\mathbb{D} = I \times \Omega$ po promenljivoj $\mathbf{y}$, ako i samo ako vektorska funkcija $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ u toj oblasti.*

DOKAZ: Neka funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n$ zadovoljavaju Lipšiciv uslov (5) sa konstantom L_i u oblasti $\mathbb{D}$ i neka je $L = \max_{1 \leq i \leq n} L_i$. Tada za svaku od ovih funkcija, za proizvoljne tačke $(x, \mathbf{y}) = (x, y_1, y_2, \ldots, y_n), (x, \mathbf{z}) = (x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ oblasti $\mathbb{D}$, sledi

$$|f_i(x, \mathbf{y}) - f_i(x, \mathbf{z})| \leq L_i \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k| \leq L \sum_{k=1}^{n} ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| = Ln\, ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||,$$

odnosno,

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(x, \mathbf{y}) - f_i(x, \mathbf{z})|^2 \leq L^2 n^2 \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||^2 = L^2 n^3 ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||^2.$$

Odavde je

$$||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| \leq Ln^{3/2} ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||,$$

pa, prema tome, vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov (7) sa konstantom $\overline{L} = Ln^{3/2}$.

Obrnuto, neka vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov (7) sa konstantom L u oblasti $\mathbb{D}$. Primenom obe strane nejednakosti (6) sledi

$$|f_i(x, \mathbf{y}) - f_i(x, \mathbf{z})| \leq ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| \leq L ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| \leq L \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|,$$

pa funkcije f_i zadovoljavaju Lipšicov uslov (5) sa konstantom L. $\square$

Za vektorsku funkciju (2) Jakobijeva matrica je

$$D_{\mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}(x, \mathbf{y}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n}(x, \mathbf{y}) \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}(x, \mathbf{y}) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n}(x, \mathbf{y}) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

i biće korišćena matrična norma (maksimum zbira apsolutnih vrednosti elemenata vrste) kvadratne matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

$$||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Lema 3 *Neka su $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ i $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})$ neprekidne na $\mathbb{D} = I \times K$ i neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ konveksan podskup. Ako postoji $L > 0$ tako da je*

$$\left|\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})\right|\right|_\infty \leq L, \quad (x,\mathbf{y}) \in I \times K,$$

tada vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov po $\mathbf{y}$ na $I \times K$.

Dokaz: Fiksirajmo $x \in I$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in K$. Označimo sa $\gamma(s) = (1-s)\mathbf{y} + s\mathbf{z}$ za svako $s \in \mathbb{R}$. Kako je $K \subset \mathbb{R}^n$ konveksan podskup, $\gamma(s) \in K$ za svako $s \in [0,1]$. Tada prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti za vektorsku funkciju $\mathbf{f}$ važi

$$||\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{z})|| \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \left|\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\gamma(s))\right|\right|_\infty ||\mathbf{y}-\mathbf{z}|| \leq L||\mathbf{y}-\mathbf{z}||. \quad \square$$

Lema 4 *Neka su $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ i $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})$ neprekidne na $\mathbb{D} = [a,b] \times \Omega$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren podskup. Tada vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava lokalni Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ na $\mathbb{D}$.*

Dokaz: Neka je $\mathbf{y}_0 \in \Omega$. Tada postoji $\beta > 0$ tako da

$$\Omega_0 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, ||\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|| \leq \beta\} \subset \Omega.$$

Skup Ω_0 je konveksan i kompaktan. Kako je $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$ neprekidna na $[a,b] \times \Omega_0$, ona je i ograničena, pa postoji $L_0 > 0$ tako da je

$$\left|\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})\right|\right|_\infty \leq L_0, \quad (x,\mathbf{y}) \in [a,b] \times \Omega_0.$$

Prema Lemi 3 vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov (7) po $\mathbf{y}$ na $[a,b] \times \Omega_0$ sa konstantom L_0. $\square$

Lema 5 *Neka su $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ i $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})$ neprekidne na $\mathbb{D} = [a,b] \times \mathbb{R}^n$. Vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ na $\mathbb{D}$ akko je $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})$ uniformno ograničena na $\mathbb{D}$.*

Dokaz: ($\Leftarrow$:) Neka je $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})$ uniformno ograničena na $\mathbb{D}$, tj. postoji konstanta $L > 0$ tako da je za svako $(x,\mathbf{y}) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$

$$\left|\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x,\mathbf{y})\right|\right|_\infty \leq L.$$

Kako je $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y})$ neprekidna na $\mathbb{D}$ imamo

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{z} + s(\mathbf{y} - \mathbf{z})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) ds$$

odakle se dobija za svako $(x, \mathbf{y}), (x, \mathbf{z}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| &\leq \int_0^1 \left|\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{z} + s(\mathbf{y} - \mathbf{z})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) \right|\right| ds \\ &\leq \left(\int_0^1 \left|\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{z} + s(\mathbf{y} - \mathbf{z})) \right|\right|_\infty ds \right) ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| \\ &\leq \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left|\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) \right|\right|_\infty ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| \leq L ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||. \end{aligned}$$

Dakle, vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ na $\mathbb{D}$.

($\Rightarrow$:) Neka vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov po $\mathbf{y}$ na $\mathbb{D} = [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Kako su koordinatne funkcije f_i diferencijabilne na $\mathbb{D}$, za svako $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ važi

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{f_i(x, \mathbf{y} + \mathbf{h}) - f_i(x, \mathbf{y})}{||\mathbf{h}||} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, \mathbf{y}) \cdot h_j \qquad \text{za svako } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{\mathbf{f}(x, \mathbf{y} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y})}{||\mathbf{h}||} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) + \varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{h}) ||\mathbf{h}||$$

gde je $\lim_{\mathbf{h} \to 0} \varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{h}) = 0$. Kako je

$$||\mathbf{f}(x, \mathbf{y} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y})|| \leq L ||\mathbf{h}||$$

dobijamo

$$\left|\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{h} \right|\right| \leq \Big(L + \big|\big| \varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{h}) \big|\big| \Big) ||\mathbf{h}||$$

za svako $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, odakle je

$$\left|\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) \right|\right|_\infty = \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{h} \neq 0} \frac{\left|\left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{h} \right|\right|}{||\mathbf{h}||} \leq L + \big|\big| \varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{h}) \big|\big| \to L, \quad \mathbf{h} \to 0 \quad \Box$$

$$\boxed{C^1_y(\mathbb{D}) \Rightarrow \mathrm{Lip}_y(\mathbb{D}) \Rightarrow C^0_y(\mathbb{D})}$$

Primeri:

- $f \in \mathrm{Lip}_{loc}$, $f \notin \mathrm{Lip}$: Funkcija $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ je funkcija koja zadovoljava lokalni Lipšicov uslov, ali ne globalni, jer za $x_0 \in \mathbb{R}$ je

$$\sup_{s \in (x_0-1, x_0+1)} |f'(s)| = \sup_{s \in (x_0-1, x_0+1)} |2s| < 2|x_0| + 2 = L_{x_0}$$

Dakle, za $x, y \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$ je

$$|f(x) - f(y)| \leq L_{x_0} |x - y|$$

tako da funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov na $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ sa konstantom $L_{x_0} = 2|x_0| + 2$. Sa druge strane, kako je $|f'(x)| = |2x| \to \infty$, $x \to \infty$, pa funkcija f ne zadovoljava (globalni) Lipšicov uslov na $\mathbb{R}$.

- $f \in \mathrm{Lip}$, $f \notin C^1$: Funkcija $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ nije diferencijabilna za $x = 0$, ali zadovoljava Lipšicov uslov na $\mathbb{R}$, jer je

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

- $f \notin \mathrm{Lip}[0,1]$, $f \in C[0,1]$: Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ je neprekidna funkcija koja ne zadovoljava globalni Lipšicov uslov na $[0,1]$, jer $f'(x) \to \infty$, $x \to 0+$. Ako pretpostavimo da f zadovoljava Lipšicov uslov na $[0,1]$, biće za svako $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Tako za $y = 2x$ imamo $1/\sqrt{x} \leq L/(\sqrt{2} - 1)$, za svako $x > 0$, što je nemoguće, jer leva strana nejednakosti teži beskonačnosti kada $x \to 0+$.

- $f \in C^1(-\pi/2, \pi/2)$, $f \in \mathrm{Lip}_{loc}(-\pi/2, \pi/2)$, $f \notin \mathrm{Lip}(-\pi/2, \pi/2)$: Funkcija $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ je neprekidno-diferencijabilna na $(-\pi/2, \pi/2)$, tako da zadovoljava lokalni Lipšicov uslov na tom intervalu. Kako $f'(x) = 1/\cos^2 x$ nije iniformno ograničena na ovom intervalu, f ne zadovoljava (globalni) Lipšicov uslov na $(-\pi/2, \pi/2)$. Ali za $[a, b] \subset (-\pi/2, \pi/2)$, $f'(x)$ je ograničeno na $[a, b]$, f zadovoljava lokalni Lipšicov uslov na $(-\pi/2, \pi/2)$.

- Funkcija

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

je neprekidno-diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. Prema tome, $\mathbf{f}$ zadovoljava lokalni Lipšicov uslov na $\mathbb{R}^2$. Da bi odredili Lipšicov konstantu odredimo Jakobijan

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix}$$

za koji je

$$\left|\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|\right|_\infty = \max\{|x_2 - 1| + |x_1|, |x_2| + |1 - x_1|\},$$

gde je matrična norma maksimum zbira apsolutnih vrednosti elemenata vrste

$$||A||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Za svako $(x_1, x_2) \in U = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1| \le \alpha_1,\ |x_2| \le \alpha_2\}$ je

$$|x_2 - 1| + |x_1| \le 1 + \alpha_2 + \alpha_1, \quad |x_2| + |1 - x_1| \le \alpha_2 + 1 + \alpha_1$$

odakle je

$$\left|\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|\right|_\infty \le 1 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

Dakle, $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov na U sa konstantom $L_U = 1 + \alpha_1 + \alpha_2$. Ali, f ne zadovoljava Lipšicov uslov na $\mathbb{R}^2$, jer $[\partial f/\partial x]$ nije uniformno ograničena na $\mathbb{R}^2$.

Banahova teorema o fiksnoj tački

Definicija 5 *Preslikavanje $\mathcal{F}$ metričkog prostora (X, d) u samog sebe je kontrakcija, ako postoji broj $\alpha \in [0, 1)$ tako da je za svako $x, y \in X$,*

$$d\big(\mathcal{F}((x), \mathcal{F}(y)\big) \le \alpha\, d(x, y).$$

Teorema 2 (Banahova teorema o nepokretnoj tački) *1. Kontrakcija $\mathcal{F}$ kompletnog metričkog prostora (X, d) u samog sebe ima jednu i samo jednu fiksnu tačku $u \in X$, tj. postoji jedinstveno $u \in X$ tako da je $\mathcal{F}(u) = u$.*

2. Ako je $x_0 \in X$ proizvoljno, niz $\{x_n\} \subset X$ definisan

$$x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^n x_0 = u$.

Posledica 1 *Neka je $\mathcal{F}$ preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,d) u samog sebe i neka je za neko $m \in N$ preslikavanje $\mathcal{F}^m$ kontrakcija. Tada preslikavanje $\mathcal{F}$ ima jedinstvenu fiksnu tačku.*

Dokaz: Kontrakcija $\mathcal{F}^m$ ima fiksnu tačku $u \in X$, pa je $\mathcal{F}^m u = u$. Tada je za proizvoljno $x_0 \in X$

$$u = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{F}^m)^n(x_0)$$

ali i za $\mathcal{F}x_0 \in X$ je

$$u = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{F}^m)^n \mathcal{F}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(\mathcal{F}^m)^n(x_0) = \mathcal{F}\left(\lim_{n\to\infty} (\mathcal{F}^m)^n(x_0)\right) = \mathcal{F}(u)$$

dakle, $u \in X$ je fiksna tačka preslikavanja $\mathcal{F}$. Jedinstvenost je očigledna jer je svaka fiksna tačka preslikavanja $\mathcal{F}$ istovremeno i fiksna tačka preslikavanja $\mathcal{F}^m$. □

Pikarova teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja

Sledeća teorema predstavlja osnovnu teoremu u teoriji diferencijalnih jednačina, jer daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema (1) u nekoj okolini tačke. U literaturi je poznata kao Pikarova teorema ili Koši–Lipšic–Pikarova teorema. Uobičajeni postupci dokazivanja Pikarove teoreme su *metodom sukcesivnih aproksimacija ili primenom Banahove teoreme o nepokretnoj tački.*

Teorema 3 (Lokalna Pikarova teorema EJR) *Neka je vektorska funkcija $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ definisana i neprekidna u oblasti $\mathbb{G}$ i neka zadovoljava lokalni Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ u $\mathbb{G}$. Tada kroz svaku tačku $(x_0,\mathbf{y}_0) \in \mathbb{G}$ prolazi samo jedno rešenje $\mathbf{y} = \mathbf{g}(x)$ sistema DJ (1), definisano u nekoj okolini tačke x_0, koje zadovoljava početni uslov $\mathbf{g}(x_0) = \mathbf{y}_0$.*

Dokaz: Kako je $\mathbb{G}$ oblast, dakle otvoren skup, za svaku tačku $(x_0,\mathbf{y}_0) \in \mathbb{G}$ postoje realni brojevi $a > 0$ i $b > 0$ tako da kompakt

$$\Pi = \{(x,\mathbf{y}) \ : \ |x - x_0| \le a, \ ||\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|| \le b\}$$

pripada oblasti $\mathbb{G}$. Kako je $\mathbf{f} \in C(\Pi)$, postoji maksimum ove funkcije na Π. Označimo sa $M = \max_\Pi ||\mathbf{f}(x,\mathbf{y})||$. Kako $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ na kompaktu Π, postoji $L_\Pi > 0$ tako da je

$$||\mathbf{f}(x,\mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x,\mathbf{y}_2)|| \le L_\Pi ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||$$

za svako $(x, \mathbf{y}_1), (x, \mathbf{y}_2) \in \Pi$. Neka je $h = \min\{a, b/M, 1/L_\Pi\}$. Tada je kompakt

$$\Pi_1 = \{(x, \mathbf{y}) \ : \ |x - x_0| \leq h, \ ||\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|| \leq b\} \subseteq \Pi.$$

Nadalje označimo sa $\mathcal{C}(I)$ skup svih neprekidnih vektorskih funkcija $\mathbf{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))$, definisanih na segmentu $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. Normirani prostor $(\mathcal{C}(I), || \cdot ||_\mathcal{C})$ je Banahov prostor sa normom

$$||\mathbf{g}||_\mathcal{C} = \max_{x \in I} ||\mathbf{g}(x)||, \quad \varphi \in \mathcal{C}.$$

Ova norma indukuje metriku u $\mathcal{C}$,

$$d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = ||\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2||_\mathcal{C}, \quad \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathcal{C}(I),$$

i $(\mathcal{C}(I), d)$ je kompletan metrički prostor.

Neka je $\mathcal{D}$ podskup skupa $\mathcal{C}(I)$ definisan sa

$$\mathcal{D} = \big\{\mathbf{g} \in \mathcal{C}(I) \, : \, ||\mathbf{g} - \mathbf{y}_0||_\mathcal{C} \leq b\big\} \subset \mathcal{C}(I)\,.$$

Pošto je $(\mathcal{D}, || \cdot ||_\mathcal{C})$ zatvoreni podprostor Banahovog prostora, on je takođe Banahov prostor.

Definišimo preslikavanje $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}(I)$ tako da je za proizvoljno $\mathbf{g} \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}](x) \, := \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{g}(t))\, dt, \quad x \in I. \tag{8}$$

Kako je $\mathbf{f} \in C(\Pi_1)$, sledi $\mathcal{F}[\mathbf{g}] \in \mathcal{C}(I)$. Dokažimo da je preslikavanje $\mathcal{F}$ kontrakcija Banahovog prostora $\mathcal{D}$ u samog sebe.

(i) *Dokažimo da* $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Kako je

$$\left|\left| \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{g}(t))\, dt \right|\right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} ||\mathbf{f}(t, \mathbf{g}(t))||\, dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\, h \leq M\, \frac{b}{M} = b.$$

biće

$$||\mathcal{F}[\mathbf{g}] - \mathbf{y}_0||_\mathcal{C} = \max_{x \in I} \left|\left| \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{g}(t))\, dt \right|\right| \leq b.$$

Prema tome, $\mathcal{F}[\mathbf{g}] \in \mathcal{D}$, tj. $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.

(ii) *Dokažimo da je* $\mathcal{F}$ *kontrakcija.* Neka su $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ proizvoljni elementi skup $\mathcal{D}$. Kako su tačke $(x, \mathbf{g}_1(x)), (x, \mathbf{g}_2(x)) \in \Pi_1 \subset \Pi$ za $x \in I$ i kako vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov (7) sa konstantom L_Π na kompaktu Π, to je

$$\begin{aligned}
\Big|\Big|\mathcal{F}[\mathbf{g}_1](x) - \mathcal{F}[\mathbf{g}_2](x)\Big|\Big| &= \left|\left|\int_{x_0}^{x} [\mathbf{f}(t,\mathbf{g}_1(t)) - \mathbf{f}(t,\mathbf{g}_2(t))]\, dt\right|\right| \\
&\le \left|\int_{x_0}^{x} ||\mathbf{f}(t,\mathbf{g}_1(t)) - \mathbf{f}(t,\mathbf{g}_2(t))||\, dt\right| \\
&\le L_\Pi \left|\int_{x_0}^{x} ||\mathbf{g}_1(t) - \mathbf{g}_2(t)||\, dt\right| \\
&\le L_\Pi ||\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2||_{\mathcal{C}} \left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \\
&= L_\Pi ||\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2||_{\mathcal{C}}\, |x - x_0| \le L_\Pi h ||\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2||_{\mathcal{C}}, \quad x \in I.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$d\Big(\mathcal{F}[\mathbf{g}_1], \mathcal{F}[\mathbf{g}_2]\Big) = \max_{x\in I} \Big|\Big|\mathcal{F}[\mathbf{g}_1](x) - \mathcal{F}[\mathbf{g}_2](x)\Big|\Big| \le L_\Pi h\, d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2).$$

Kako je $L_\Pi h < 1$, preslikavanje $\mathcal{F}$ je kontrakcija. Prema Banahovoj teoremi preslikavanje $\mathcal{F}$ ima jedinstvenu fiksnu tačku $\mathbf{g}^* \in \mathcal{D}$. Dakle, $\mathbf{g}^* = \mathcal{F}[\mathbf{g}^*]$, odnosno prema (8),

$$\mathbf{g}^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{g}^*(t))\, dt, \qquad x \in I.$$

Otuda je $\mathbf{g}^* \in \mathcal{C}(I)$ rešenje vektorske integralne jednačine na intervalu I, pa je rešenje i Košijevog problema (1) na tom intervalu. $\square$

Ako je oblast $\mathbb{G} = [a,b]\times\mathbb{R}^n$, može se dokazati *globalna teorema egzistemcije i jedinstvenosti rešenja Košijevog problema* (1). Svako takvo rešenje je definisano na intervalu $[a,b]$.

Teorema 4 (Globalna Pikarova teorema EJR) *Neka je vektorska funkcija* $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ *definisana i neprekidna u oblasti* $\mathbb{G} = [\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^n$ *i neka zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom* L *po promenljivoj* $\mathbf{y}$ *na* $\mathbb{G}$. *Tada za svaku tačku* $x_0 \in [\alpha,\beta]$ *i proizvoljan konačan vektor* $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ *postoji jedinstveno rešenje Košijevog problema* (1), *definisano na* $[\alpha,\beta]$.

Dokaz: Neka je $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{G}$ proizvoljna tačka. Označimo sa

$$(\mathcal{C}[\alpha, \beta], ||\cdot||_{\mathcal{C}})$$

Banahov prostor neprekidnih vektorskih funkcija definisanih na $[\alpha, \beta]$, sa normom $||\mathbf{g}||_{\mathcal{C}} = \max_{x \in [\alpha,\beta]} ||\mathbf{g}(x)||$ i metrikom $d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = ||\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2||_{\mathcal{C}}$. Definišimo preslikavanje $\mathcal{G}$ na $\mathcal{C}[\alpha, \beta]$:

$$\mathcal{G}[\mathbf{g}](x) := \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{g}(t))\, dt, \quad \mathbf{g} \in \mathcal{C}[\alpha, \beta].$$

Jasno, $\mathcal{G} : \mathcal{C}[\alpha, \beta] \to \mathcal{C}[\alpha, \beta]$.

Neka su $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ proizvoljni elementi skup $\mathcal{C}[\alpha, \beta]$. Kako funkcija $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj $\mathbf{y}$ na skupu $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$, kao u dokazu Teoreme 3 pokazuje se da je za $x \in [\alpha, \beta]$

$$\big|\big|\mathcal{G}[\mathbf{g}_1](x) - \mathcal{G}[\mathbf{g}_2](x)\big|\big| \le L|x - x_0|\, d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$$

odakle dalje dobijamo

$$\begin{aligned}
\big|\big|\mathcal{G}^2[\mathbf{g}_1](x) - \mathcal{G}^2[\mathbf{g}_2](x)\big|\big| &\le \left|\int_{x_0}^{x} \big|\big|f\big(t, \mathcal{G}[\mathbf{g}_1](t)\big) - f\big(t, \mathcal{G}[\mathbf{g}_2](t)\big)\big|\big|\, dt\right| \\
&\le L \left|\int_{x_0}^{x} \big|\big|\mathcal{G}[\mathbf{g}_1](t) - \mathcal{G}[\mathbf{g}_2](t)\big|\big|\, dt\right| \\
&\le L^2 d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt\right| \\
&= \frac{L^2 |x - x_0|^2}{2!}\, d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2), \quad x \in [\alpha, \beta].
\end{aligned}$$

Sada se matematičkom indukcijom lako zaključuje da je za svako $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|\big|\mathcal{G}^n[\mathbf{g}_1](x) - \mathcal{G}^n[\mathbf{g}_2](x)\big|\big| \le \frac{L^n |x - x_0|^n}{n!}\, d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \le \frac{L^n (\beta - \alpha)^n}{n!}\, d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$

za svako $x \in [\alpha, \beta]$. Kako desna strana ove nejednakosti ne zavisi od x, to je

$$\max_{x \in I} \big|\big|\mathcal{G}^n[\mathbf{g}_1](x) - \mathcal{G}^n[\mathbf{g}_2](x)\big|\big| \le \frac{L^n (\beta - \alpha)^n}{n!}\, d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$

odnosno,

$$d\Big(\mathcal{G}^n[\mathbf{g}_1], \mathcal{G}^n[\mathbf{g}_2]\Big) \le \frac{L^n (\beta - \alpha)^n}{n!}\, d(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2).$$

Kako $\frac{L^n(\beta-\alpha)^n}{n!} \to 0$ kad $n \to \infty$, postoji dovoljno veliki broj $m \in \mathbb{N}$, tako da je $\frac{L^m(\beta-\alpha)^m}{m!} < 1$, tako da je preslikavanje $\mathcal{G}^m$ kontrakcija. Prema Posledici 1

Banahove teoreme preslikavanje $\mathcal{G}$ ima jedinstvenu fiksnu tačku $\mathbf{g}^* \in \mathcal{C}[\alpha, \beta]$. Dakle,

$$\mathbf{g}^*(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{g}^*(t))\, dt, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

odakle sledi da je $\mathbf{y} = \mathbf{g}^*(x),\ x \in [\alpha, \beta]$ jedinstveno rešenje Košijevog problema (1) na segmentu $[\alpha, \beta]$. $\square$

Primer: Posmatrajmo linearni sistem DJ (linearnu vektorsku DJ)

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \tag{9}$$

gde je $A(x)$ neprekidna matrična funkcija na $[a, b]$ i $\mathbf{g}(x)$ neprekidna vektorska funkcija na $[a, b]$. Tada je funkcija $\mathbf{f}$ neprekidna na $\mathbb{D} = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ i postoji $L > 0$ tako da je $||A(x)||_\infty \leq L$ za svako $x \in [a, b]$, odakle zaključujemo da je za svako $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ i svako $x \in [a, b]$

$$||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})|| = ||A(x) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z})|| \leq ||A(x)||_\infty\, ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| \leq L||\mathbf{y} - \mathbf{z}||$$

odnosno vektorska funkcija $\mathbf{f}$ zadovoljava Lipšicov uslov na $\mathbb{D}$. Dakle, za svako $x_0 \in [a, b]$ i $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ postoji jedinstveno rešenje $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x)$ linearne vektorske DJ (9) koje zadovoljava početni uslov $\mathbf{h}(x_0) = \mathbf{y}_0$, a koje je definisano na $[a, b]$.