10. Integral normalnog sistema DJ

$$(1) \qquad y' = f(x,y) \qquad f : \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{G} \quad \longrightarrow$ oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema DJ (1).

Iz definicije opšteg rešenja sistema DJ sledi da je opšte rešenje sistema DJ vektorskom obliku (1) parametarska vektorska funkcija $y = \varphi(x,c)$, $x \in (a,b)$, takva da je vektorska jednačina $y = \varphi(x,c)$ rešiva po c: $c = \psi(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{G}$, odnosno

$$\varphi(x, \psi(x,c)) = c \quad \text{i} \quad \psi(x, \varphi(x,c)) = c, \quad x \in (a,b).$$

Definicija 1 *Funkcija $\psi : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $\psi \in C^{(1)}(\mathbb{G})$, koja nije identički jednaka konstanti, je* INTEGRAL *sistema* DJ (1), *ako duž bilo kog rešenja ima konstantnu vrednost.*

Teorema 1 (Teorema o integralu) *Funkcija $\psi \in C^{(1)}(\mathbb{G})$ je integral sistema* DJ (1) *ako i samo ako je*

$$(2) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \cdot f_2 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot f_n = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{G}.$$

DOKAZ: $(\Rightarrow)$: Neka je funkcija $\psi = \psi(x,y)$ integral sistema (1) u oblasti $\mathbb{G}$ i neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ proizvoljna tačka. Tada postoji jedinstveno rešenje $y = \varphi(x)$ ovog sistema, definisano u nekoj okolini $O(x_0)$, koje ispunjava početni uslov $\varphi(x_0) = y_0$. Po Definiciji 1 je

$$(3) \qquad \psi(x, \varphi(x)) = \text{const},\ x \in O(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$(4) \qquad \frac{d\psi(x, \varphi(x))}{dx} = 0, \quad x \in O(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$(5) \qquad \frac{\partial \psi(x, \varphi(x))}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi(x, \varphi(x))}{\partial y_i} \cdot \varphi_i'(x) = 0, \quad x \in O(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$(6) \qquad \frac{\partial \psi(x,\varphi(x))}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi(x,\varphi(x))}{\partial y_i} \cdot f_i(x,\varphi(x)) = 0\ , \quad x \in O(x_0)$$

Za $x = x_0$, $\varphi(x_0) = y_0$ je

$$\frac{\partial \psi(x_0,y_0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi(x_0,y_0)}{\partial y_i} \cdot f_i(x_0,y_0) = 0.$$

Kako je $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ proizvoljna tačka, poslednja jednakost važi za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$.

$(\Leftarrow)$: Neka važi (2) i neka je $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ proizvoljno rešenje sistema (1). Pošto grafik rešenja pripada oblasti $\mathbb{G}$, relacija (2) je zadovoljena i za sve tačke $(x, \varphi(x)) \in \mathbb{G}$, pa je zadovoljen identitet (6). Kako za svako $x \in (a, b)$

$$(6) \quad \Rightarrow \quad (5) \quad \Rightarrow \quad (4) \quad \Rightarrow \quad (3)$$

funkcija ψ je integral sistema DJ (1). $\square$

Definicija 2 *Ako je funkcija $\psi = \psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\psi \in C^{(1)}(\mathbb{G})$ integral sistema* (1), *relacija*

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c, \quad c = const$$

se naziva PRVI INTEGRAL SISTEMA.

Definicija 3 *Funkcije $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m \in C^1(\Omega)$, $m \le n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, su* FUNKCIONALNO ZAVISNE *u toj oblasti, ako za bar jedan od integrala ψ_k postoji neprekidno diferencijabilna funkcija Φ, $\Phi \not\equiv 0$, za koju važi relacija*

$$\psi_k(y) = \Phi(\psi_1(y), \ldots, \psi_{k-1}(y), \psi_{k+1}(y), \ldots, \psi_m(y)), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

za svako $y \in \Omega$. Kažemo i da je funkcija ψ_k funkcionalno zavisna od funkcija $\psi_1, \ldots, \psi_{k-1}, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_m$. Ako niti jedna od funkcija ψ_i nije funkcionalno zavisna od ostalih, kažemo da su funkcije FUNKCIONALNO NEZAVISNE.

Stav 1 *Integrali $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sistema DJ (1), definisani u oblasti $\mathbb{G}$, funkcionalno su nezavisni u toj oblasti, ako i samo ako je Jakobijan*

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{G}.$$

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast. Ako svakom elementu $y \in \Omega$ pridružimo neki vektor $F(y) = (f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y))$ kažemo da je u oblasti Ω definisano **vektorsko polje F**. Ako u sistemu diferencijalnih jednačina u normalnom obliku

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{7}$$

funkcije $f_i : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ne zavise od nezavisno promenljive x dobijamo **dinamički sistem**

$$\begin{aligned} y_1' &= F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{8}$$

Dinamički sistem (8) određen je vektorskim poljem $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Pojam integrala DS (8) definiše se analogno ovom pojmu za normalan sistem DJ:

Funkcija $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\psi \in C^{(1)}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (Ω je oblast EJR DS (8)) koja nije identički jednaka konstanti, je INTEGRAL *dinamičkog sistema (8), ako za proizvoljno rešenje $y = \varphi(x)$ sistema definisano na (a, b) važi $\psi(\varphi(x)) = c$ za svako $x \in (a, b)$.*

Teorema o integralu: Funkcija $\psi \in C^{(1)}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je integral DS (8) ako i samo ako je

$$\nabla \psi \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot F_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \cdot F_2 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot F_n = 0, \qquad \text{za svako } y \in \Omega. \tag{9}$$

Homeomorfno preslikavanje Ψ otvorenog skupa $U \subset \mathbb{R}^n$ na otvoreni skup $V \subset \mathbb{R}^n$ je *difeomorfizam* ako je Ψ diferencijabilno, bijektivno preslikavanje, čiji je inverz Ψ^{-1} takodje diferencijabilno preslikavanj. Za difeomorfizam Ψ kažemo da je klase $\mathcal{C}^{(r)}$, $r \geq 1$ ako su preslikavanja Ψ, Ψ^{-1} klase $C^{(r)}$.

Neka je $\Psi : U \to V$, $\Psi(y) = z$, difeomorfizam klase $\mathcal{C}^{(1)}$, gde su $U, V \subset \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi:

$$z_j = \Psi_j(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada se dinamički sistem (8) transformiše u

$$\begin{aligned} \frac{dz_j}{dx} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_k}(y) \frac{dy_k}{dx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_k}(\Psi^{-1}(z)) F_k(\Psi^{-1}(z)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial y_k} F_k \right) (\Psi^{-1}(z)), \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{10}$$

Stav 2 *Neka je $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ neprekidno-diferencijabilno vektorsko polje na $U \in \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in U$ vektor za koji je $\mathbf{F}(y_0) \neq 0$. Tada postoji okolina U_{y_0} i difeomorfizam $\Psi : U_{y_0} \to V_{z_0}$, $z = \Psi(y)$ takav da se dinamički sistem (8) transformiše u dinamički sistem*

$$z'_1 = 0, \ldots, \ z'_{n-1} = 0, \ z'_n = 1\,. \tag{11}$$

Teorema 2 *Neka je $\mathbf{F}$ neprekidno-diferencijabilno vektorsko polje na $U \in \mathbb{R}^n$ i $y_0 \in U$ vektor za koji je $\mathbf{F}(y_0) \neq 0$. Tada postoji okolina U_{y_0} tačke y_0 u kojoj dinamički sistem (8) ima $n-1$ funkcionalno nezavisnih integrala $\psi_k(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Pored toga, za ma koji drugi integral $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ dinamičkog sistema (8) postoji neprekidno-diferencijabilna funkcija Φ tako da je*

$$\psi = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$$

odnosno ma kojih n integrala dinamičkog sistema (8) su funkcionalno zavisna.

Dokaz. Prema Stavu 2 postoji okolina U_{y_0} i difeomorfizam $\psi : U_{y_0} \to V_{z_0}$, $z = \psi(y)$:

$$z_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n), , \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

koji dinamički sistem (8) transformiše u dinamički sistem (11). Kako je prema (10)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} F_k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

na osnovu (9) funkcije $\psi_j(y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ su integrali DS (8). Ti integrali su funkcionalno nezavisni, jer u suprotnom bi rang preslikavanja $\hat{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$ bio manji od $n-1$, što je nemoguće, jer je ψ homeomorfizam.

Za proizvoljni integral $\psi(y_1, \ldots, y_n)$ dinamičkog sistema (8), $\psi \not\equiv \psi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ formiramo sistem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot F_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \cdot F_2 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \cdot F_n = 0 \\
&\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \cdot F_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} \cdot F_2 + \cdots + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \cdot F_n = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_1} \cdot F_1 + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_2} \cdot F_2 + \cdots + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_n} \cdot F_n = 0
\end{aligned}$$

koji je homogen linearan sistem i ima netrivijalno rešenje $(F_1, \ldots, F_n)$ u okolini U_{y_0}. Dakle,

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 0$$

pa su integrali $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ prema Stavu 1 funkcionalno zavisni. $\square$

Kako se sistem diferencijalnih jednačina u normalnom obliku (7) može smenom nezavisno promenljive $x = t$ i uvođenjem nove nepoznate funkcije $x = x(t) = t$ transformisati u dinamički sistem po nepoznatim funkcijama $y_1(t), \ldots, y_n(t), x(t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\frac{dy_2}{dt} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
&\frac{dy_n}{dt} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\frac{dx}{dt} = 1 = f_{n+1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}$$

iz prethodne Teoreme sledi:

Teorema 3 *Ako je* $f_i \in C^{(1)}(\mathbb{G})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *i* $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ *tačka za koju je*

$$f_1^2(x_0, y_0) + f_2^2(x_0, y_0) + \cdots + f_n^2(x_0, y_0) \neq 0,$$

tada postoji okolina $W_{(x_0,y_0)}$ *u kojoj sistem* (1) *ma* n *funkcionalno nezavisnih integrala* $\psi_k(x, y_1, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija 4 *Ako su* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *funkcionalno nezavisni integrali sistema* (1)*u oblasti* $\mathbb{G}$, *identitetima*

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

definisan je OPŠTI INTEGRAL SISTEMA.

Teorema 4 *Opšti integral* (12) *sistema* (1) *implicitno određuje opšte rešenje tog sistema.*

DOKAZ: Neka je (12) opšti integral sistema (1). Iz $\frac{D(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)} \neq 0$ u oblasti $\mathbb{G}$, po teoremi o izvodu implicitnih funkcija sledi da je za svaku (fiksiranu) tačku iz $\mathbb{G}$ sistem jednačina (12) rešiv po $y_1, y_2, \ldots, y_n$ u nekoj okolini te tačke. Prema tome, postoje jedinstvene neprekidno diferencijabilne funkcije φ_i, tako da je

$$y_i = \varphi_i(x, c), \quad c = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

i

$$\psi_i(x, \varphi_1(x, c), \varphi_2(x, c), \ldots, \varphi_n(x, c)) \equiv c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Dokažimo da vektorska funkcija $y = \varphi(x, c) = (\varphi_1(x, c), \ldots, \varphi_n(x, c))$ predstavlja opšte rešenje sistema (1). Pre svega, prvi uslov iz definicije opšteg rešenja da je sistem $y = \varphi(x, c)$ je rešiv po c, $c = \psi(x, y)$ za svako $(x, y) \in \mathbb{G}$ je trivijalno zadovoljen. Dokažimo da je $y = \varphi(x, c)$ rešenje vektorske DJ $y' = f(x, y)$. Diferenciranjem (13) se dobija

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \cdot \varphi_1' + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} \cdot \varphi_2' + \cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} \cdot \varphi_n' \equiv 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

S druge strane, prema Teoremi o integralu za svako $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{G}$, pa prema tome i za tačke $(x, \varphi_1(x, c), \varphi_2(x, c), \ldots, \varphi_n(x, c)) \in \mathbb{G}$, za svaki od integrala $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sistema (1) mora biti

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} \cdot f_2 \cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} \cdot f_n \equiv 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Identiteti (14) i (15) se mogu posmatrati kao nehomogeni sistemi linearnih jednačina sa istom determinantom $\frac{D(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)} \neq 0$ i sa istim slobodnim članovima $\frac{\partial\psi_i}{\partial x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, koji, prema tome, imaju jedinstveno rešenje. Otuda mora biti

$$\varphi_i'(x,c) \equiv f_i(x, \varphi_1(x,c), \varphi_2(x,c), \ldots, \varphi_n(x,c)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

pa skup funkcija $\varphi_i = \varphi_i(x,c)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, predstavlja rešenje sistema (1). $\square$