11. Sistemi DJ u simetričnom obliku

Efektivno rešavanje normalnog sistema DJ u opštem slučaju nije jednostavno, sem ako se radi o linearnom sistemu DJ sa konstantnim koeficijentima, ili ako se metodom eliminacije sistem DJ svede na DJ višeg reda koja sa efektivno može rešiti. Kako se u opštem slučaju rešavanje normalnog sistema DJ svodi na nalaženje nezavisnih integrala pomoću kojih se određuje opšti integral, odnosno opšte rešenje, do nezavisnih integrala se jednostavnije može doći prelaskom na sistem diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku.

Definicija 1 *Za date funkcije* $X_i : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, *koje nisu sve istovremeno jednake nuli ni u jednoj tački oblasti* $\mathbb{D}$, *sistem*

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

nazivano SISTEM DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA U SIMETRIČNOM OBLIKU.

Prednost ovakvog predstavljanja sistema diferencijalnih jednačina je u tome što su sve promenljive ravnopravne, što nije slučaj sa normalnim sistemima diferencijalnih jednačina.

Bez narušavanja opštosti pretpostavimo da je $X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ za svako $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}$. Zbog toga se x_n može uzeti za nezavisno promenljivu, a sistem (1) transformisati u ekvivalentan normalni sistem DJ reda $n-1$, nepoznatih $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dx_n} = \frac{X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Sada je jasna pretpostavka da sve funkcije X_i nisu istovremeno jednake nuli ni u jednoj tački oblasti $\mathbb{D}$, jer u suprotnom u toj tački ne bi bilo određeno vektorsko polje.

Pojam rešenja sistema DJ (1) definiše se analogno ovom pojmu za normalni sistem DJ. Sa $\mathbb{G}$, pri čemu je $\mathbb{G} \subset \mathbb{D}$, označena je oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja. Osnovna teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja iskazuje se na sledeći način:

Teorema 1 (Teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja) *Neka su funkcije* $X_i \in C^{(1)}(\mathbb{G})$ *i* $X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ *za svako* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{G}$.

Tada za svaku tačku $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{G}$ postoji jedinstveno rešenje $x_i = \varphi_i(x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ sistema DJ (1), definisano u nekoj okolini tačke x_n^0, koje zadovoljava početne uslove $\varphi_i(x_n^0) = x_i^0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Dokaz: Definišimo funkcije

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Kako je $f_i \in C^{(1)}(\mathbb{G})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, dokaz Teoreme 1 sledi neposredno na osnovu Posledice Pikarve TEJR za sistem DJ u normalnom obliku. □

Naravno, i ostali suštinski pojmovi, kao opšte rešenje, integral, prvi integral i opšti integral sistema (1), definišu se analogno ovim pojmovima za normalni sistem (2). Samim tim važe analogno i sva tvrđenja u vezi normalnog sistema DJ. Tako, teorema o integralu ima sledeću interpretaciju.

Teorema 2 (Teorema o integralu) *Funkcija $\psi \in C^{(1)}(\mathbb{G})$ je integral sistema DJ (1) ako i samo ako je za svako $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{G}$,*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot X_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot X_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cdot X_n = 0.$$

Dokaz: Primenom Teoreme o integralu 9.1. na normalni sistem DJ (2), za svako $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{G}$ je

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0,$$

odakle sledi tvrđenje teoreme množenjem ovog identiteta sa X_n. □

Dakle, sistem (2), a samim tim i sistem (1), ima $n-1$ funkcionalno nezavisnih integrala, pa su formulom $\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ opisani svi integrali sistema (1), gde je Φ proizvoljna funkcija, definisana i neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima po svim promenljivama.

Opšti integral sistema (1) je definisan pomoću $n-1$ funkcionalno nezavisnih prvih integrala

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Po Teoremi 9.4. ovaj sistem implicitno određuje opšte rešenje sistema DJ (1),

$$x_i = \varphi_i(x_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \ i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Uočimo da sistem (1) ima formu višestruke proporcije, pa se za njegovo rešavanje koriste sve osobine višestruke proporcije:

Ako je

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$$

važi

$$(a) \qquad \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + ... + k_n b_n} = \frac{a_1}{b_1},$$

za svaku $n-$torku $(k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{R}^n$ za koju je $k_1 b_1 + k_2 b_2 + ... + k_n b_n \neq 0$;

$$(c) \qquad \frac{k_1 a_1^\alpha + k_2 a_2^\alpha + ... + k_n a_n^\alpha}{k_1 b_1^\alpha + k_2 b_2^\alpha + ... + k_n b_n^\alpha} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^\alpha,$$

za svaku $n-$torku $(k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{R}^n$ za koju je $k_1 b_1^\alpha + k_2 b_2^\alpha + ... + k_n b_n^\alpha \neq 0$.

Ova metoda rešavanja sistema DJ (1), naziva se METODA INTEGRACIONIH KOMBINACIJA.

Primer 10.1. U sistemu

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

izaberimo, na primer, y za nezavisno promenljivu. Tada mora biti $y \neq 0$. Iz jednačine $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ sledi

$$\psi_1(x, z, y) \equiv \frac{z}{y} = c_1$$

i to je jedan prvi integral datog sistema. Drugi se dobija iz jednačine

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{ydy + zdz}{y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2}.$$

Smenom $u = y^2 + z^2$ imamo

$$\frac{dx}{x + u} = \frac{du}{2u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{du} - \frac{x}{2u} = \frac{1}{2}$$

Opšte rešenje dobijene linearne DJ je

$$x = \sqrt{u}(c_2 + \sqrt{u}) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{u}} - \sqrt{u} = c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \sqrt{y^2 + z^2} = c_2$$

Dakle, prvi integral polaznog sistema DJ je i

$$\psi_2(x, y, z) \equiv \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \sqrt{y^2 + z^2} = c_2.$$

Kako je

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x,z)} = -\frac{1}{y\sqrt{y^2+z^2}} \neq 0,$$

integrali ψ_1 i ψ_2 su funkcionalno nezavisni i određuju opšti integral kojim je implicitno odredjeno opšte rešenje:

$$z = c_1 y, \quad x = (y^2+z^2)\big(c_2 + \ln(y^2+z^2)\big).$$

Primer 10.2. Neka je u sistemu diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$$

nezavisno promenljiva u, pri čemu mora biti je $x - z \neq 0$. Iz jednakosti

$$\frac{dx}{y-u} = \frac{dz}{u-y}, \qquad \frac{dy}{z-x} = \frac{du}{x-z}$$

dobijaju se redom jednačine $dx = -dz$ i $dy = -du$. Njihova rešenja su $x = -z + c_1$ i $y = -u + c_2$, pa su $\psi_1(x,y,u,z) \equiv x + z = c_1$ i $\psi_2(x,y,z,u) \equiv y + u = c_2$ dva prva integrala datog sistema.

Još jedan prvi integral će se najjednostavnije odrediti iz integracione kombinacije sabiranjem svih količnika. Kako je u tom slučaju imenilac jednak nuli, mora biti $d(x+y+z+u) = 0$, odnosno $\psi_3(x,y,z,u) \equiv x+y+z+u = c_3$. Pošto je $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$, ovaj integral nije funkcionalno nezavisan sa prva dva, pa se pomoću njega ne može izraziti opšti integral.

Međutim, prvi integral se može odrediti i iz integracione kombinacije

$$\frac{dx - dz}{2(y-u)} = \frac{dy - du}{2(z-x)}.$$

Kako je $-2(x-z)d(x-z) = 2(y-u)d(y-u)$, posle integracije je

$$(y-u)^2 + (x-z)^2 = c_4,$$

pa je još jedan prvi integral sistema

$$\psi_4(x,y,z,u) \equiv (x-z)^2 + (y-u)^2 = c_4.$$

Kako je

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_4)}{D(x,y,z)} = -2(x-z) \neq 0$$

integrali ψ_1, ψ_2 i ψ_4 su funkcionalno nezavisni i određuju opšti integral datog sistema

$$\begin{aligned} x + z &= c_1 \\ y + u &= c_2 \\ (x - z)^2 + (y - u)^2 &= c_4 \,. \qquad \square \end{aligned}$$