6. Eksponent matrice linearnih sistema DJ

6.1. Matrična eksponencijalna funkcija kao jedinstveno rešenje KP matrične DJ

Definicija 1 *Neka je A konstantna kvadratna matrica reda n.* **Matrična eksponencijalna funkcija** e^{Ax} *definiše se kao jedinstveno rešenje KP matrične DJ*

$$Z'(x) = A\,Z(x)\,, \quad Z(0) = \mathbb{I}\,. \tag{1}$$

Specijalno, konstantna matrica e^A naziva se **eksponent matrice** A**.**

Teorema 1 *Za proizvoljne kvadratne konstantne matrice A, B reda n i proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ važi:*

(i) $\Phi(x) = e^{Ax}$ je fundamentalna matrica sistema DJ $y'(x) = A\,y(x)$.

(ii) $e^{A(x+y)} = e^{Ax}e^{Ay} = e^{Ay}e^{Ax}$.

(iii) ako je $AB = BA$, onda je $e^{Ax}B = Be^{Ax}$. Specijalno, matrice A i e^{Ax} su komutativne, odnosno matrice A i e^A su komutativne.

(iv) ako je $AB = BA$, onda su i matrice e^{Ax}, e^{Bx} komutatativne i važi

$$e^{(A+B)x} = e^{Ax}e^{Bx} = e^{Bx}e^{Ax}.$$

Specijalno,

$$e^{A+B} = e^Ae^B = e^Be^A;$$

(v) e^{Ax} ima inverznu matricu e^{-Ax} i $e^{Ax}e^{-Ax} = e^{-Ax}e^{Ax} = \mathbb{I}$. Specijalno, $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$, odnosno inverzna matrica matrice e^A je matrica e^{-A}.

(vi) transponovana matrica matrice e^{Ax} je e^{A^Tx}, odnosno važi $\left(e^{Ax}\right)^T = e^{A^Tx}$.

Dokaz. **(i):** Matrična funkcija $\Phi(x) = e^{Ax}$ je prema Definiciji 3.4. rešenje matrične DJ (1). Kako je $\det\Phi(0) = \det\mathbb{I} = 1 \neq 0$, prema posledici formule Ostrogradskog–Liuvila je $\det\Phi(x) \neq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, pa je prema Definiciji 3.4. matrična funkcija $\Phi(x) = e^{Ax}$ fundamentalna matrica vektorske DJ $y'(x) = A\,y(x)$.

(ii): Fiksirajmo $y \in \mathbb{R}$. Neka je $\Phi(x) = e^{A(x+y)} - e^{Ax}e^{Ay}$. Tada je

$$\Phi'(x) = Ae^{A(x+y)} - Ae^{Ax}e^{Ay} = A[e^{A(x+y)} - e^{Ax}e^{Ay}] = A\Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Dakle, $\Phi(x)$ je rešenje matrične DJ (1). $e^{A\cdot 0} = \mathbb{I}$ jer matrična funkcija $\Psi(x) = e^{Ax}$ zadovoljava početni uslov $\Psi(0) = \mathbb{I}$. Prema tome, imamo da je $\Phi(0) = e^{Ay} -$

$e^{Ay} = \mathbb{O}$. Prema TEJR za matričnu DJ je $\Phi(x) = \mathbb{O}$, za svako $x \in \mathbb{R}$, odnosno $e^{A(x+y)} = e^{Ax}e^{Ay}$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Kako je $y \in \mathbb{R}$ proizvoljno, ovo svojstvo važi za svako $x, y \in \mathbb{R}$. Kako je $e^{Ax}e^{Ay} = e^{A(x+y)} = e^{A(y+x)} = e^{Ay}e^{Ax}$, matrice e^{Ay} i e^{Ax} su komutativne.

(iii): Neka je $AB = BA$ i $\Phi_1(x) = e^{Ax}B$, $\Phi_2(x) = Be^{Ax}$. Tada je

$$\Phi_1'(x) = Ae^{Ax}B = A\Phi_1(x), \quad \Phi_2'(x) = BAe^{Ax} = ABe^{Ax} = A\Phi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Dakle, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ su rešenja matrične DJ (1) koja zadovoljavaju isti početni uslov $\Phi_i(0) = B$, $i = 1, 2$, pa prema TEJR za matričnu DJ je $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

(iv): Neka je $\Phi(x) = e^{Ax}e^{Bx} - e^{(A+B)x}$. Tada koristeći (iii)

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= Ae^{Ax}e^{Bx} + e^{Ax}Be^{Bx} - (A+B)e^{(A+B)x} \\ &= Ae^{Ax}e^{Bx} + Be^{Ax}e^{Bx} - (A+B)e^{(A+B)x} \\ &= (A+B)e^{Ax}e^{Bx} - (A+B)e^{(A+B)x} \\ &= (A+B)[e^{Ax}e^{Bx} - e^{(A+B)x}] = (A+B)\Phi(x)\end{aligned}$$

Kako je $\Phi(0) = \mathbb{O}$, prema TEJR za matričnu DJ je $\Phi(x) = \mathbb{O}$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

Kako je $A+B = B+A$, imamo $e^{Ax}e^{Bx} = e^{(A+B)x} = e^{(B+A)x} = e^{Bx}e^{Ax}$, odnosno matrice e^{Ax}, e^{Bx} su komutativne.

Napomenimo da kako je $(Ax)(Ay) = A^2(xy) = A^2(yx) = (Ay)(Ax)$, odnosno kako su matrice Ax i Ay komutativne, svojstvo (ii) sledi i iz svojstva (iv):

$$e^{Ax}e^{Ay} = e^{Ay}e^{Ax} = e^{Ax+Ay} = e^{A(x+y)}$$

(v): Prema (ii) dobija se

$$e^{Ax}e^{(-A)x} = e^{Ax}e^{A(-x)} = e^{A(x+(-x))} = e^{A\cdot 0} = \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{Ax}\right)^{-1} = e^{-Ax}\,.$$

(vi): Prema Definiciji 2 matrična eksponencijalna funkcija $Z(x) = e^{A^T x}$ je jedinstveno rešenje KP matrične DJ

$$Z'(x) = A^T\, Z(x)\,, \quad Z(0) = \mathbb{I}\,. \tag{2}$$

Dokažimo da je $W(x) = \left(e^{Ax}\right)^T$ rešenje KP (2), odakle zbog jedinstvenosti rešenja sledi traženi zaključak da je $W(x) = Z(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Zaista,

$$\begin{aligned}W'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\left(e^{Ax}\right)^T\right) = \left(\frac{d}{dx}e^{Ax}\right)^T = \left(A\, e^{Ax}\right)^T \\ &= \left(e^{Ax}A\right)^T = A^T\left(e^{Ax}\right)^T = A^T W(x), \quad W(0) = \mathbb{I}^T = \mathbb{I}\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema 2 *Za proizvoljne kvadratne konstantne matrice A, J, T reda n za koje važi da je $J = T^{-1}AT$, biće $e^{Jx} = T^{-1}e^{Ax}T$, $x \in \mathbb{R}$, odnosno $e^J = T^{-1}e^AT$.*

DOKAZ. Jedinstveno rešenje Košijevog problema matrične DJ (1) je $Z(x) = e^{Ax}$. Smenom $Z(x) = TW(x)$ matrična DJ (1) transformiše se u

$$TW'(x) = Z'(x) = AZ(x) = ATW(x) \quad \Rightarrow \quad W'(x) = T^{-1}ATW(x) = JW(x)\,,$$

a početni uslov za matričnu DJ $W'(x) = JW(x)$ je $W(0) = T^{-1}Z(0) = T^{-1}$. Matrična eksponencijalna funkcija $W(x) = e^{Jx}$ je rešenje matrične DJ $W'(x) = JW(x)$, tako da je

$$W(x) = e^{Jx}W(0) = e^{Jx}T^{-1}$$

jedinstveno rešenje Košijevog problema matrične DJ

$$W'(x) = JW(x), \quad W(0) = T^{-1}\,.$$

Prema tome, rešenje Košijevog problema (1) je $Z(x) = TW(x) = Te^{Jx}T^{-1}$, pa zbog jedinstvenosti rešenja je

$$e^{Ax} = Te^{Jx}T^{-1} \;\Rightarrow\; e^{Jx} = T^{-1}e^{Ax}T \;\Rightarrow\; e^J = T^{-1}e^AT. \qquad \square$$

6.2. Određivanje eksponenta matrice - Putzerov algoritam

Teorema 3 *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti kvadratne konstantne matrice A reda n. Tada je rešenje KP matrične DJ*

$$Z'(t) = AZ(t), \quad Z(0) = \mathbb{I} \tag{3}$$

dato sa

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t)M_k \tag{4}$$

gde su M_k, $0 \le k \le n-1$ kvadratne matrice reda n definisane sa

$$M_0 = \mathbb{I}, \quad M_k = (A - \lambda_k\mathbb{I})M_{k-1}, \quad 1 \le k \le n-1 \tag{5}$$

a funkcije $p_k(t)$, $1 \le k \le n$ su rešenja KP sistema DJ

$$\begin{aligned} p_1' &= \lambda_1 p_1, \quad p_1(0) = 1 \\ p_2' &= \lambda_2 p_2 + p_1, \quad p_2(0) = 0 \\ &\vdots \\ p_n' &= \lambda_n p_n + p_{n-1}, \quad p_n(0) = 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Napomena. Iz (5) zaključujemo da je

$$M_k = \prod_{i=1}^{k} (A - \lambda_i \mathbb{I}), \quad 1 \le k \le n-1\,. \tag{7}$$

Sistem DJ (6) možemo predstaviti u vektorskom obliku i jednostavnije formulisati da je vektorska funkcija p definisana sa

$$p(t) = \left(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)\right)^T, \quad t \in \mathbb{R}$$

rešenje KP vektorske DJ

$$p' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_n \end{bmatrix} p, \quad p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Dokaz. Kako je vektorska funkcija $p(t)$ rešenje KP (8)

$$p_1'(t) = \lambda_1 p_1(t), \quad p_i'(t) = p_{i-1}(t) + \lambda_i p_i(t), \quad 2 \le i \le n,\ t \in \mathbb{R}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
Z'(t) - AZ(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}'(t) M_k - A \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t) M_k \\
&= \lambda_1 p_1(t) M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{k+1} p_{k+1}(t) + p_k(t)) M_k - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t) A M_k \\
&= \lambda_1 p_1(t) M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) M_k + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(t) M_k \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t)(M_{k+1} + \lambda_{k+1} M_k) \quad \text{prema (5)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) M_k + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(t) M_k \\
&\qquad - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t) M_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) M_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p_k(t) M_k - \sum_{k=1}^{n} p_k(t) M_k = -p_n(t) M_n\,.
\end{aligned}$$

Prema CayleyHamilton-ovoj teoremi biće $P(A) = \mathbb{O}$, gde je

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i),$$

karakterističan polinom matrice A. Dakle,

$$M_n = (A - \lambda_n\mathbb{I})M_{n-1} = (A - \lambda_n\mathbb{I})(A - \lambda_{n-1}\mathbb{I})M_{n-2} = \ldots = \prod_{i=1}^{n} (A - \lambda_i\mathbb{I}) = \mathbb{O},$$

odnosno $Z'(t) = AZ(t)$. Pored toga,

$$Z(0) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(0)M_k = p_1(0)\mathbb{I} = \mathbb{I} \quad \Box$$

Na osnovu TEJR za KP matrične DJ i Teoreme 3 sledi da je

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(t)M_k,$$

gde su M_k, $0 \le k \le n-1$ kvadratne matrice reda n definisane sa (5), a funkcije $p_k(t)$, $1 \le k \le n$ su rešenja KP sistema DJ (6), odnosno KP vektorske DJ (8). Dakle, prethodnom teoremom opisan je postupak određivanja eksponenta kvadratne brojne matrice A koji je poznat pod nazivom Putzerov algoritam.

6.3. Razvoj matrične eksponencijalne funkcije u beskonačnu matričnu sumu

✠ Skup $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ kvadratnih kompleksnih matrica $A = [a_{ij}]$ reda n sa uobičajenim operacijama sabiranja matrica i množenja matrica skalarom (u opštem slučaju kompleksnim), snabdeven normom

$$||A||_p = \max_{x\in\mathbb{R}^n,\, x\neq 0} \frac{||Ax||_p}{||x||_p} = \max_{||x||_p=1} ||Ax||_p$$

indukovanom normom $||\cdot||_p$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ čini normirani vektorski prostor. Ovako definisana norma je *submultiplikativna*:

$$||A \cdot B|| \le ||A|| \cdot ||B|| \quad \Rightarrow \quad ||A^k|| \le ||A||^k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Imamo da je

$$\begin{aligned}
||A||_1 &= \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|, \quad \text{maksimum zbira apsolutnih vrednosti elemenata kolone} \\
||A||_\infty &= \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \quad \text{maksimum zbira apsolutnih vrednosti elemenata vrste} \\
||A||_2 &= \sqrt{\rho(A^TA)}, \quad \text{spektralna norma}
\end{aligned}$$

gde je $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$, gde su λ_i sopstvene vrednosti matrice A. Važi $||A||_2^2 \leq ||A||_1 \cdot ||A||_\infty$.

Kako je $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ konačno-dimenzionalni vektorski prostor, norme $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ su ekvivalentne.

✠ Niz matrica $\{A_k\}_{k\in N} \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ konvergira ka matrici $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ kad $k \to \infty$, ako $||A_k - A|| \to 0$ kad $k \to \infty$.

✠ Za elemente A_k, $k \in \mathbb{N}$ prostora $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ matričnim redom se naziva beskonačna suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{10}$$

✠ Neka je $S_m = \sum_{k=1}^{m} A_k$, $m \in N$. Matrični red (10) konvergira ka $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ ako niz parcijalnih suma $\{S_m\}_{m\in N}$ konvergira ka A kad $m \to \infty$.

Teorema 4 *Matrični red*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

gde je $A^0 = \mathbb{I}$ jedinična matrica reda n, je konvergentan.

Dokaz. Kako je normirani vektorski prostor $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ Banahov, dovoljno je pokazati da je

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{||A^k||}{k!}$$

konvergentan. Kako je prema (9)

$$\frac{||A^k||}{k!} \leq \frac{||A||^k}{k!}$$

i brojni red $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||}$ je konvergentan, sledi tvrđenje. □

Teorema 5 *Za proizvoljnu kvadratnu brojnu matricu A reda n i proizvoljan broj $x_0 \in \mathbb{R}$, matrični red*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{x^k}{k!} \tag{11}$$

gde je $A^0 = \mathbb{I}$ jedinična matrica reda n, je apsolutno i ravnomerno konvergentan za $||x|| \leq x_0$.

Dokaz Za proizvoljnu kvadratnu brojnu matricu A reda n i proizvoljan broj $x_0 \in \mathbb{R}$, za $||x|| \leq x_0$ je

$$\frac{||Ax||^k}{k!} \leq \frac{||A||^k ||x||^k}{k!} \leq \frac{||A||^k x_0^k}{k!}$$

i kako je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k x_0^k}{k!} = e^{||A|| x_0}$$

sledi da je matrični red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!} \tag{12}$$

apsolutno i ravnomerno konvergentan za $||x|| < x_0$, prema Vajerštrasovom kriterijumu. $\square$

Teorema 6 *Za proizvoljnu kvadratnu konstantnu matricu A reda n i proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ važi:*

$$e^{A\,x} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{x^k}{k!} \tag{13}$$

Dokaz. Matrični red (11) je konvergenta i kako je matrični red

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} \frac{x^k}{k!}$$

prema Vajerštrasovom kriterijumu, apsolutno i ravnomerno konvergentan za $||x|| < x_0$, matrični red (11) može se diferencirati član po član. Neka je

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{x^k}{k!} = \mathbb{I} + A\frac{x}{1!} + A^2 \frac{x^2}{2!} + \cdots .$$

Dakle,

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} \frac{x^k}{k!} = A \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{x^k}{k!} = A\Phi(x)\,.$$

Kako je $\Phi(0) = \mathbb{I}$, zbog jedinstvenosti rešenja KP matrične DJ, zaključujemo da je $\Phi(x) = e^{Ax}$, tj. važi (13). $\square$

Teorema 7 *Ako je $v \in \mathbb{R}^n$ sopstveni vektor matrice A odgovarajući sopstvenoj vrednosti λ, tada je v sopstveni vektor matrice e^A odgovarajući sopstvenoj vrednosti e^λ.*

Dokaz. Kako je $Av = \lambda\, v$ imamo

$$e^A v = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k v}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\, v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) v = e^\lambda\, v \quad \square$$

6.4. Matrična eksponencijalna funkcija kao suma matričnog reda

Eksponent e^A konstantne kvadratne matrice A i matričnu eksponencijalnu funkciju e^{Ax}, uzevši u obzir Teoreme 4 i 5, možemo definisati i na sledeći način:

Definicija 2 Eksponentom konstantne kvadratne matrice A **reda** n, *u oznaci e^A, naziva se kvadratna matrica reda n, definisana kao*

$$e^A := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}. \tag{14}$$

Matrična eksponencijalna funkcija e^{Ax} *definiše na sledeći način*

$$e^{Ax} := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k x^k}{k!} \quad \textit{za svako} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primetimo da prema Teoremi 6, iz Definicije 1. sledi Definicija 2.

Ako na ovaj način definišemo eksponent konstantne kvadratne matrica A, odnosno matričnu eksponencijalnu funkciju e^{Ax}, najpre dokazujemo sledeće dva svojstva.

Teorema 8 *Za proizvoljne kvadratne konstantne matrice A, B reda n i proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$ važi:*

(i) Ako je $AB = BA$, onda su i matrice e^{Ax}, e^{Bx} komutatativne i važi

$$e^{(A+B)x} = e^{Ax}e^{Bx} = e^{Bx}e^{Ax}.$$

Specijalno,

$$e^{A+B} = e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A}.$$

(ii) $e^{A(x+y)} = e^{Ax}e^{Ay} = e^{Ay}e^{Ax}$;

Dokaz. (i) Kako su matrice A, B komutativne imamo

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

odnosno u opštem slučaju za $n \in \mathbb{N}$ imamo binomnu formulu

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$$

Tada je

$$\begin{aligned} e^{Ax}e^{Bx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{B^k x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k \right] \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n x^n}{n!} = e^{(A+B)x}. \end{aligned}$$

Kako je $A + B = B + A$, imamo $e^{Ax}e^{Bx} = e^{(A+B)x} = e^{(B+A)x} = e^{Bx}e^{Ax}$, odnosno matrice e^{Ax}, e^{Bx} su komutativne.

(ii) Kako je $(Ax)(Ay) = A^2(xy) = A^2(yx) = (Ay)(Ax)$, odnosno kako su matrice Ax i Ay komutativne, važiće:

$$e^{Ax}e^{Ay} = e^{Ay}e^{Ax} = e^{Ax+Ay} = e^{A(x+y)} \qquad \square$$

Možemo pokazati da iz Definicije 2. sledi Definicija 1., odnosno uzevši u obzir Teoremu 6, na osnovu koje zaključujemo da iz Definicije 1. sledi Definicija 2, imamo ekvivalentnost ove dve definicije matrične eksponencijalne funkcije.

Teorema 9 *Matrična eksponencijalna funkcija $\Phi(x) = e^{Ax}$ je jedinstveno rešenje KP matrične DJ* (1)*.*

Dokaz. Kako je $\Phi(0) = \mathbb{I}$, pokažimo da je $\Phi'(x) = A\Phi(x)$, odnosno

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax} .$$

Koristeći svojstvo (ii) prethodne Teoreme je

$$e^{A(x+h)} - e^{Ax} = e^{Ax} e^{Ah} - e^{Ax} = \left(e^{Ah} - \mathbb{I}\right) e^{Ax}$$

i dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} e^{Ax} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah} - I}{h}\, e^{Ax} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ah)^k}{k!}\, e^{Ax} \\ &= \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \cdots + \frac{A^n h^{n-1}}{n!} \right) e^{Ax}\end{aligned}$$

Kako je prema Teoremi 5 matrični red (11) apsolutno i ravnomerno konvergentan za $|h| < 1$ imamo

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \cdots + \frac{A^n h^{n-1}}{n!} \right) e^{Ax} = A\, e^{Ax}. \quad \square$$

Svojstva (iii), (v) i (vi) u Teoremi 1 možemo sada pokazati na isti način, dok Teoremu 2 možemo pokazati na sledeći način.

Teorema 10 *Za proizvoljne kvadratne konstantne matrice A, J, T reda n za koje važi da je $J = T^{-1}AT$, biće $e^J = T^{-1}e^A T$.*

Dokaz. Kako za proizvoljne kvadratne matrice P, Q važi

$$T^{-1}(P+Q)T = T^{-1}PT + T^{-1}QT$$

imamo

$$T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \right) T = \sum_{k=0}^{m} \frac{T^{-1}A^k T}{k!} .$$

Takođe, kako je $T^{-1}A^kT = \left(T^{-1}AT\right)^k$ dobijamo

$$T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \right) T = \sum_{k=0}^{m} \frac{\left(T^{-1}AT\right)^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad T^{-1}e^A T = e^J \qquad \square$$