GLAVA II - Dinamički sistemi diferencijalnih jednačina

1. Fazni portret dinamičkog sistema - osnovni pojmovi

Dinamički sistem DJ:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

gde su $f_i : \mathbb{E} \to \mathbb{R},\ \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ date funkcije.

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E},$$

$$f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T \ \text{ vektorska funkcija}$$

Ako svakom elementu $x \in \mathbb{E}$ pridružimo vektor $f(x)$, kažemo da je u oblasti $\mathbb{E}$ definisano **vektorsko polje** $\to f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Dinamički sistem (1) u vektorskom obliku:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ako su funkcije $f_i \in C^{(1)}(\mathbb{E})$, po TEJR oblast egzistencije i jedinstvenosti rešenja dinamičkog sistema (2) je $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ - za bilo koju tačku (t_0, x_0), $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{E}$ postoji jedinstveno neproduživo rešenje $x = x(t)$ sistema (2), koje zadovoljava početni uslov $x(t_0) = x_0$ i koje je definisano na maksimalnom intervalu egzistencije I_{x_0}, $t_0 \in I_{x_0}$.

Pažnja će najvećim delom biti usmerena na DS drugog reda - sisteme koji su opisani sa dve veličine stanja $x = (x_1, x_2)^T$.

2D Dinamički sistem:

$$
\text{(3)} \qquad \begin{aligned} x_1' &= F_1(x_1, x_2), \quad F_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{R}, \\ x_2' &= F_2(x_1, x_2), \quad F_2 : \mathbb{X} \to \mathbb{R}, \end{aligned} \qquad \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2.
$$

2D Dinamički sistem u vektorskom obliku:

$$
\text{(4)} \qquad x' = F(x), \qquad F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2,
$$

$$
x = (x_1, x_2)^T, \quad F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T.
$$

Fazne trajektorije i fazni portreti DS

Pod rešenjem sistema DJ (4) podrazumeva se neprekidno diferencijabilna vektorska funkcija $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ definisana na $I \subset \mathbb{R}$ koja za svako $t \in I$ identički zadovoljava navedene diferencijalne jednačine

$$
\begin{aligned} x_1(t)' &= F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) &= F_2(x_1(t), x_2(t)). \end{aligned}
$$

U slučaju početnog problema

$$
\text{(5)} \qquad x' = F(x), \quad x(0) = x_0, \qquad F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2,
$$

rešenje mora zadovoljiti i početne uslove

$$
\text{(6)} \qquad x_0 = x(0) = (x_1(0), x_2(0))^T = (x_{10}, x_{20})^T.
$$

Rešenje sistema DJ (3) koje prolazi kroz tačku x_0, odnosno zadovoljava početni uslov (6) označavaćemo sa $x = \hat{x}(t, x_0)$. Kriva određena ovom jednačinom zove se *integralna kriva vektorskog polja* F kroz tačku x_0. Bez gubitka opštosti uzimamo da je za svako $x_0 \in \mathbb{X}$ maksimalni interval egzistencije rešenja $\hat{x}(t, x_0)$, $I_{x_0} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Rešenje početnog problema (5) predstavlja krivu u (x_1, x_2)-ravni koja prolazi kroz tačku $x_0 = (x_1(0), x_2(0))^T$. Ova kriva se zove fazna trajektorija dinamičkog sistema (4) kroz tačku x_0, a rešenje sistema (4) predstavlja njenu parametarsku jednačinu. (x_1, x_2)-ravan nazivamo fazna ravan. Vrednosti veličina stanja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ u trenutku t određuju stanje sistema koje se opisuje položajem reprezentativne tačke u faznoj ravni. Primetimo da fazna trajektorija DS predstavlja skup tačaka

$$
\gamma_{x_0} = \{x(t) \,|\, t \in I_{x_0}\} \subset \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2
$$

koji sadrži tačku x_0 i ne zavisi od parametrizacije. Na primer, kada bi nezavisno promenljiva bila $\tau = kt,\ k = const.$, eksplicitni oblik parametarske jednačine bi bio drugačiji, ali bi fazna trajektorija u faznoj ravni ostala nepromenjena.

Kada se analiziraju fazne trajektorije za sve moguće početne uslove dobija se familija trajektorija koja u potpunosti opisuje dinamiku sistema i zove se FAZNI PORTRET DINAMIČKOG SISTEMA. Pri tome se podrazumeva da je na karakterističnim trajektorijama naznačen smer kretanja reprezentativne tačke po faznoj trajektoriji. *Pravac fazne trajektorije* je pravac kretanja tačke $(x_1(t), x_2(t))$ po faznoj trajektoriji, u pravcu rasta promenljive t.

Do jednačine krive u faznoj ravni duž koje se kreće reprezentativna tačka može se doći eliminacijom vremena t iz sistema (4), odnosno njegovim svođenjem na DJ prvog reda:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_2(x_1, x_2)}{F_1(x_1, x_2)}\,. \tag{7}$$

U slučaju početnog problema, početni uslov (6) se svodi na početni uslov DJ (7) oblika $x_2(x_{10}) = x_{20}$. Međutim, kada se ova kriva odredi u eksplicitnom $x_2 = \psi(x_1)$ ili implicitnom obliku $\Psi(x_1, x_2) = 0$, kretanje sistema $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ se u opštem slučaju ne može rekonstruisati. Zbog toga se kaže da *fazni portret DS pruža kvalitativnu sliku o njegovom ponašanju.*

Analogni pojmovi mogu se definisati i za DS višeg reda (2). *Fazni prostor* u kom se odvija kretanje reprezentativne tačke $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$, ovog sistema biće $n-$dimenzijski euklidski prostor. Pod rešenjem sistema (2) se, kao i kod sistema drugog reda, podrazumeva vektorska funkcija $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ definisana na $t \in I \subset \mathbb{R}$ koja za svako $t \in I$ identički zadovoljava date DJ:

$$x_i'(t) = f_2(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Funkcija $x(t)$ predstavlja rešenje početnog problema

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0, \qquad f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

ako osim DJ (8) zadovoljava i početne uslove

$$x(0) = x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})^T \tag{10}$$

za zadato $x_0 \in \mathbb{E}$. To rešenje, koje predstavlja parametarsku jednačinu fazne trajektorije reprezentativne tačke za $t \in \mathbb{R}$, dalje ćemo označavati sa $x = \hat{x}(t, x_0)$. Bez gubitka opštosti uzimamo da je za svako $x_0 \in \mathbb{E}$ maksimalni interval egzistencije rešenja $\hat{x}(t, x_0)$, $I_{x_0} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Fazna trajektorija (orbita) reprezentativne tačke DS (2) koja prolazi kroz tačku x_0 je skup tačaka:

$$\gamma_{x_0} = \{x(t) \,|\, t \in I_{x_0}\} \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n.$$

Fazna trajektorija je projekcija integralne krive na fazni prostor.

Vektorsko polje

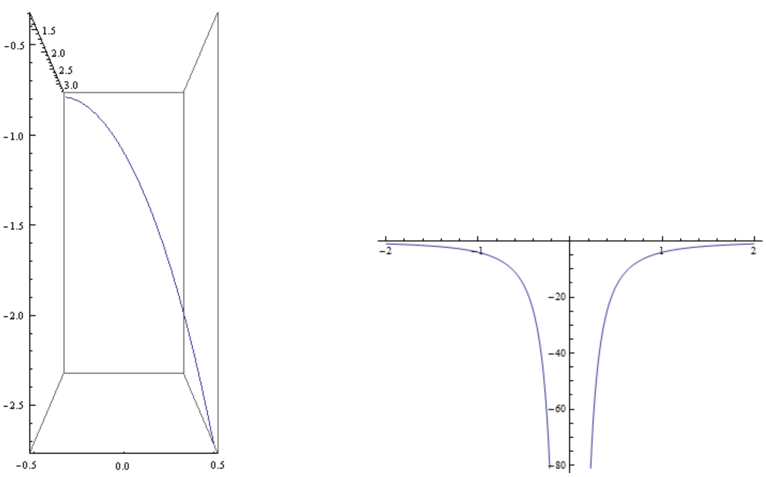
Vektor vektorskog polja f u tački $x_0 \in \mathbb{E}$ je $(f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0))^T$. Geometrijski, vektor tangente proizvoljne fazne trajektorije γ u tački $x_0 = x(t_0)$ faznog prostora, poklapa se sa vektorom vektorskog polja u toj tački, tj.

$$x'(t_0) = (f_1(x(t_0)), \ldots, f_n(x(t_0))) = f(x_0),$$

odnosno vektor vektorskog polja f u tački x_0 je vektor tangente fazne trajektorije DS (2) u toj tački. Naravno, ovo važi samo ako se fazne trajektorije ne sastoje od neizolovanih položaja ravnoteže. Zato, skup vektora u faznom prostoru $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$

$$\{(f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0))^T \;:\; x_0 \in \mathbb{E}\}$$

sa odgovarajućim pravcem fazne trajektorije naziva se VEKTORSKO POLJE (POLJE PRAVACA) DINAMIČKOG SISTEMA (2).



Slika 1: (a) Integralna kriva $\Gamma_1 = \{(t, 2e^{-t}, -e^{2t}),\ t \in \mathbb{R}\}$ Košijevog rešenja DS (11) koje zadovoljava početne uslove $x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -1$ (b) Fazna trajektorija $x_2 = -4/x_1^2$ - projekcija integralne krive Γ_1 na $(x_1, x_2)-$ravan

Primer 1.1. Dinamički sistem

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= 2x_2 \end{aligned} \tag{11}$$

ima opšte rešenje $x_1(t) = c_1 e^{-t},\ x_2(t) = c_2 e^{2t}, t \in \mathbb{R}$.

Integralne krive su geometrijska mesta tačaka $\{(t, c_1 e^{-t}, c_2 e^{2t}),\ t \in \mathbb{R}\}$ (Slika 1-(a)), a fazne trajektorije su projekcije ovih integralnih krivih na faznu ravan $\mathbb{R}^2$ (Slika 1-(b)) i fazne trajektorije su odredjene parametarskim jednačinama:

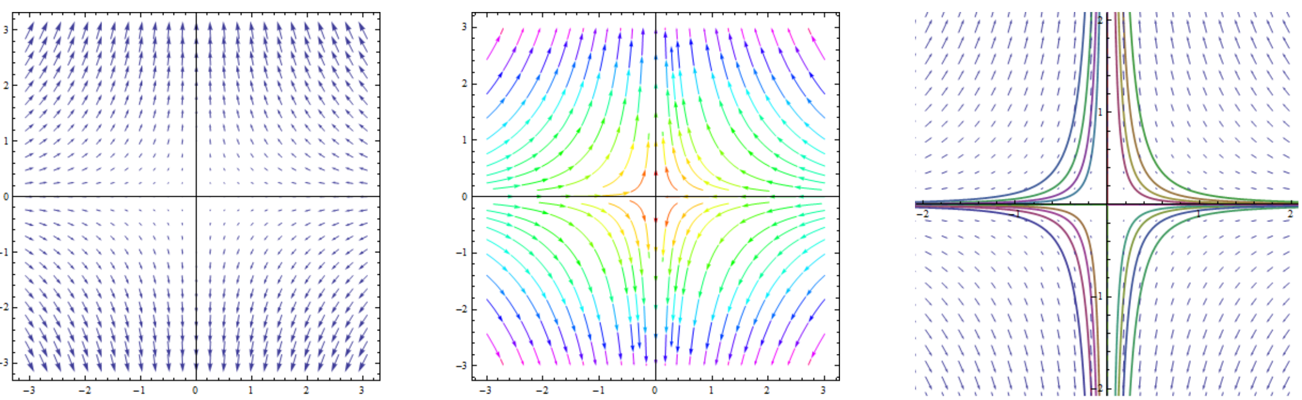
$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) = c_1 e^{-t}, \\ x_2 = x_2(t) = c_2 e^{2t}, \end{cases} \qquad t \in [t_0, \infty)$$

U konkretnom primeru fazne trajektorije se mogu odrediti eliminacijom promenljive t, čime se dobija

$$x_2 = \frac{k}{x_1^2}, \quad k = c_1^2 c_2.$$

Primetimo da su koordinatne poluose $x_1 = 0, x_2 \lesseqgtr 0$, $x_2 = 0, x_1 \lesseqgtr 0$ takođe fazne trajektorije - nazivamo ih pravolinijskim trajektorijama.

Vektorsko polje (polje pravaca) DS i fazni portret DS (11) prikazani su redom na Slici 2-(a) i (c).



Slika 2: (a) vektorsko polje DS; (b) tok DS; (c) fazni portret DS (11) u Primeru 1.1.

Osnovna svojstva faznih trajektorija DS

Stav 1 *(i) Svaka fazna trajektorija dinamičkog sistema* (2)*, različita od položaja ravnoteže, je glatka kriva.*

(ii) Ako je $x = \varphi(t)$ rešenje KP dinamičkog sistema

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

na $[t_0, t_1]$, tada je i funkcija $x = \varphi^*(t)$, gde je $\varphi^*(t) \equiv \varphi(t + t_0)$ rešenje istog sistema na $[0, t_1 - t_0]$ koje zadovoljava početni uslov $\varphi^*(0) = x_0$.

(iii) Ako fazne trajektorije dinamičkog sistema (2) *imaju zajedničku tačku, onda se one poklapaju.*

Dokaz. **(i)** Dokaz neposredno sledi iz pretpostavke $f_i \in C^{(1)}(\mathbb{D})$.
(ii): Ako je $x = \varphi(t)$ definisano na $[t_0, t_1]$, funkcija $x = \varphi^*(t) = \varphi(t+t_0)$ definisana je na $[0, t_1 - t_0]$. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ je

$$\begin{aligned} x_i' - f_i(x_1, \ldots, x_n)\Big|_{x_i = \varphi_i^*(t)} &= \varphi_i'(t+t_0) - f_i(\varphi_1(t+t_0), \ldots, \varphi_n(t+t_0)) \\ &= \varphi_i'(u) - f_i(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Pored toga, $\varphi^*(0) = \varphi(t_0) = x_0$.

U smislu kretanja tačke po faznoj trajektoriji rešenja $x = \varphi(t)$, ovim stavom je izražena činjenica da i rešenju $x = \varphi^*(t)$ odgovara ista fazna trajektorija, samo se kretanje tačke odvija sa kašnjenjem t_0. Zato, bez gubitka opštosti možemo razmatrati DS (2) *na vremenskom intervalu $[0, T]$ sa početnim uslovom $x(0) = x_0$.*

(iii) Neka je $x = \varphi(t, x_0)$ rešenje dinamičkog sistema (2) koje zadovoljava početni uslov $\varphi(0, x_0) = x_0$ i koje je definisano na maksimalnom intervalu $I_{x_0} = (\alpha_1, \beta_1)$, a $x = \psi(t, y_0)$ rešenje dinamičkog sistema (2) koje zadovoljava početni uslov $\psi(0, y_0) = y_0$ i koje je definisano na maksimalnom intervalu $I_{y_0} = (\alpha_2, \beta_2)$.

Pokazaćemo da ako postoje vrednosti $t_1 \in I_{x_0}$, $t_2 \in I_{y_0}$ za koje je $\varphi(t_1, x_0) = \psi(t_2, y_0)$, tada je

$$\varphi(t, x_0) = \psi(t + t_2 - t_1, y_0), \; t \in I_{x_0} \cap I_{\psi(t_2 - t_1, y_0)}. \tag{12}$$

Neka je

$$\psi^*(t, \psi(t_2 - t_1, y_0)) \equiv \psi(t + t_2 - t_1, y_0).$$

Prema (ii), $x = \psi^*(t, \psi(t_2 - t_1, y_0))$ je rešenje DS (2) koje zadovoljava početni uslov $\psi^*(0, \psi(t_2 - t_1, y_0)) = \psi(t_2 - t_1, y_0)$ i definisano je na

$$I_{\psi(t_2 - t_1, y_0)} = (\alpha_2 + t_1 - t_2, \beta_2 + t_1 - t_2) = I_3.$$

Kako je $\alpha_2 < t_2 < \beta_2$, biće

$$\alpha_2 - t_2 < 0 < \beta_2 - t_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 + t_1 - t_2 < t_1 < \beta_2 + t_1 - t_2\,,$$

odnosno $t_1 \in I_3$ i imamo da je

$$\psi^*(t_1, \psi(t_2 - t_1, y_0)) = \psi(t_2, y_0) = \varphi(t_1, x_0),$$

pa rešenja $x = \psi^*(t, \psi(t_2 - t_1, y_0))$ i $x = \varphi(t, x_0)$ zadovoljavaju isti početni uslov. Dakle, ova rešenja se moraju poklapati u zajedničkoj oblasti definisanosti tj. važi (12). Kako je $\alpha_2 + t_1 - t_2 < t_1 < \beta_1$, to je $I_{x_0} \cap I_3 \neq \emptyset$. $\square$ $\square$

Stav 2 *Neka je $x = \varphi(t, x_0)$ rešenje dinamičkog sistema (2) koje zadovoljava početni uslov $\varphi(0, x_0) = x_0$ i koje je definisano na maksimalnom intervalu I_{x_0}. Ako $t_1 \in I_{x_0}$ i $t_2 \in I_{\varphi(t_1,x_0)}$, tada $t_1 + t_2 \in I_{x_0}$ i*

$$\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0)).$$

DOKAZ: Neka je $t_1 \in I_{x_0} = (\alpha, \beta)$ i $t_2 \in I_{\varphi(t_1,x_0)}$. Ako je $t_2 = 0$ tvrđenje trivijalno sledi.

Pretpostavimo da je $t_2 > 0$. Tada funkcija $x : (\alpha, t_1 + t_2] \to \mathbb{E}$ definisana sa

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t, x_0), & \text{za } \alpha < t \leq t_1 \\ \varphi(t - t_1, \varphi(t_1, x_0)), & \text{za } t_1 \leq t \leq t_1 + t_2 \end{cases}$$

je rešenje DS (2) koje zadovoljava početni uslov $x(0) = x_0$ i definisano je na $(\alpha, t_1 + t_2]$, jer po Stavu 1-(ii) funkcija $\varphi(t - t_1, \varphi(t_1, x_0))$ rešenje sistema (2). Dakle, $t_1 + t_2 \in I_{x_0}$ i zbog jedinstvenosti rešenja je

$$\varphi(t_1 + t_2, x_0) = x(t_1 + t_2) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0))\,. \tag{13}$$

Ako je $t_2 < 0$, tada je funkcija $x : [t_1 + t_2, \beta) \to \mathbb{E}$ definisana sa

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t - t_1, \varphi(t_1, x_0)), & \text{za } t_1 + t_2 \leq t \leq t_1 \\ \varphi(t, x_0), & \text{za } t_1 \leq t < \beta \end{cases}$$

rešenje DS (2) koje zadovoljava početni uslov $x(0) = x_0$, definisano je na $[t_1 + t_2, \beta)$, pa je $t_1 + t_2 \in I_{x_0}$ i zbog jedinstvenosti rešenja važi (13).

Zamenom mesta t_1 i t_2 u (13) dobija se

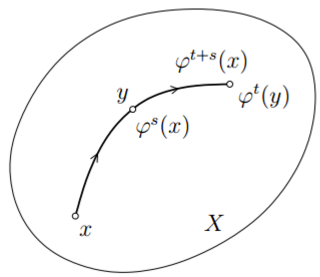
$$\varphi(t_2 + t_1, x_0) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0))\,. \quad \square$$

U smislu kretanja tačke po faznoj trajektoriji rešenja $y = \varphi(x)$, po Stavu 2 sledi da iz početnog položaja $\varphi(0, x_0)$ ona može doći za vreme $t_1 + t_2$ u položaj $\varphi(t_1 + t_2, x_0)$ na dva načina:

- *za vreme t_1 tačka pređe u položaj $\varphi(t_1, x_0)$, a zatim za vreme t_2 iz tog položaja pređe u tačku $\varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0))$;*
- *za vreme t_2 tačka pređe u položaj $\varphi(t_2, x_0)$, a zatim iz tog položaja za vreme t_1 pređe u tačku $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0))$.*

Tok DS

Definicija 1 [Tok DS] *Neka je $\varphi(t, x_0)$ jedinstveno rešenje KP (9) definisano na maksimalnom intervalu I_{x_0}. Za svako $t \in I_{x_0}$,* TOK DINAMIČKOG SISTEMA *(2) (tok vektorskog polja f) je neprekidno preslikavanje $\Phi^t : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ takvo da je $\Phi^t(x) := \varphi(t, x)$.*



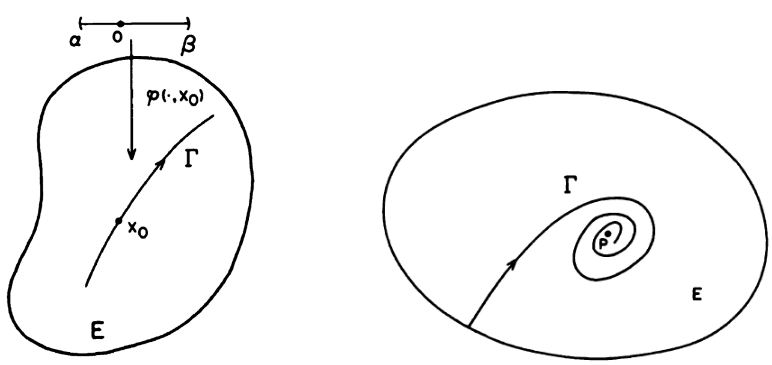
Slika 3: Ako je $y = \phi^s(x)$ onda je $\phi^t(y) = \phi^t(\phi^s(x)) = \phi^{t+s}(x)$

Za tok Φ^t dinamičkog sistema važi:

- $\Phi^0(x) = x$ za svako $x \in \mathbb{E}$;
- $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s} = \Phi^{s+t} = \Phi^s \circ \Phi^t$, $t, s \in \mathbb{R}$ (prema Stavu 2).

Ako fiksiramo početnu tačku $x_0 \in \mathbb{E}$, tada funkcija $\varphi(\cdot, x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ definiše trajektoriju DS (2) kroz tačku x_0. Ako identifikujemo funkciju $\varphi(\cdot, x_0)$ sa njenim grafikom, trajektoriju kroz tačku x_0 razmatramo kao kretanje tačke $x \in \mathbb{E}$ duž krive

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in \mathbb{E} \,|\, x = \Phi^t(x_0),\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$



Slika 4: (a) trajektorija Γ kroz tačku x_0; (b) trajektorija Γ koja se približava tački $P \in \mathbb{E}$ kada $t \to +\infty$

Ako početna tačka x_0 nije od interesa u razmatranju označavaćemo trajektoriju sa Γ, pri čemu će kriva Γ biti predstavljena sa strelicom koja označava kretanje tačke x duž krive sa porastom vremenske promenljive t,.

Topološka ekvivalentnost i konjugovanost DS

Definicija 2 *Neka su* $\varphi^t : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *i* $\psi^t : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ *tokovi DS*

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \quad f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n, \\ y' &= g(y), \quad g : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^n, \end{aligned} \qquad \mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

Za DS (14) *kažemo da su* TOPOLOŠKI EKVIVALENTNI *ako postoji homeomorfizam* $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *(neprekidno, bijektivno preslikavanje, čiji je inverz neprekidan) i neprekidno preslikavanje* $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, *za koje je* $t \mapsto \tau(t, x)$ *strogo rastuća bijekcija, tako da za svako* $t \in \mathbb{R}$ *i svako* $x \in \mathbb{X}$ *važi*

$$h(\varphi^t(x)) = \psi^{\tau(t,x)}(h(x))\,. \tag{15}$$

Homeomorfizam h preslikava fazne trajektorije jednog sistema u fazne trajektorije drugog sistema, pri čemu se čuva orjentacija trajektorija - ako je trajektorija $\varphi(t, x)$ *usmerena od* x_1 *do* x_2 *iz* $\mathbb{X}$, *tada je trajektorija* $\psi(t, x)$ *usmerena od* $h(x_1)$ *do* $h(x_2)$ *iz* $\mathbb{Y}$ *(slika 5).*

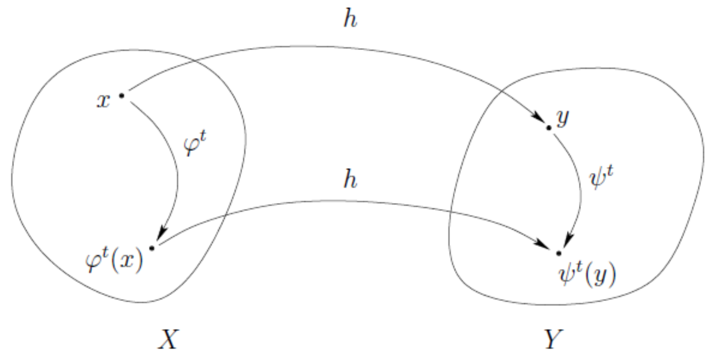
Ako je specijalno $\tau(t, x) = t$ *za svako* $t \in \mathbb{R}$ *i svako* $x \in \mathbb{X}$, *DS* (14) *su* TOPOLOŠKI KONJUGOVANI. *Dakle, DS* (14) *su* TOPOLOŠKI KONJUGOVANI *ako postoji homeomorfizam* $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *tako da važi*

$$h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x)), \quad x \in \mathbb{X}\,. \tag{16}$$

Ako homeomorfizam h preslikava fazne trajektorije jednog DS u fazne trajektorije drugog DS, pri čemu se čuva orjentacija trajektorija, ali i vremenska parametrizacija duž trajektorija, za DS kažemo da su topološki konjugovani.

$$h \circ \varphi^t = \psi^t \circ h \quad \Rightarrow \quad \varphi^t = h^{-1} \circ \psi^t \circ h$$

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \overset{\varphi^t}{\rightarrow} & \varphi^t(x_0) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ y_0 & \overset{\psi^t}{\rightarrow} & \psi^t(y_0) \end{array}$$



Slika 5: Topološki konjugovani DS $h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x))$

Položaj ravnoteže DS

Definicija 3 [Položaj ravnoteže] *Tačka $x^\star \in \mathbb{E}$ u kojoj je $f(x^\star) = 0$, naziva se* POLOŽAJ RAVNOTEŽE *ili* TAČKA MIROVANJA *dinamičkog sistema* (2).

Termin ,,tačka mirovanja” potiče iz fizike i opisuje položaj pri kretanju materijalne tačke kada su brzina i ubrzanje istovremeno jednaki nuli. Koristi se takođe i pojam *stacionarna tačka* DS.

Očigledno, ako je tačka $x^\star$ položaj ravnoteže sistema (2), tada ovaj sistem ima rešenje $x(t) = x^\star,\ t \in \mathbb{R}$, a odgovarajuća fazna trajektorija je upravo tačka $x^\star$ u faznom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definicija 4 *Položaj ravnoteže $x_0 \in \mathbb{E}$ DS* (2) *naziva se* IZOLOVANI *ako u postoji okolina $O(x_0) \setminus \{x_0\}$ u kojoj nema drugih položaja ravnoteže tog DS. U suprotnom položaj ravnoteže naziva se* NEIZOLOVANI.

Lema 1 *Položaj ravnoteže DS preslikava se u položaj ravnoteže njemu topološki konjugovanog DS.*

DOKAZ. Ako su DS (14) topološki konjugovani i ako je $x^\star$ PR DS (14)-(1), a $y^\star = h(x^\star)$, pokazaćemo da je $y^\star$ PR DS (14)-(2). Naime, ako je φ^t tok DS (14)-(1), ψ^t tok DS (14)-(2), tada kako je $\varphi^t(x^\star) = x^\star$ za svako t, biće

$$\psi^t(y^\star) = \psi^t(h(x^\star)) = h(\varphi^t(x^\star)) = h(x^\star) = y^\star . \qquad \square$$

Zatvorena trajektorija. Granični cikl

Oscilatorno kretanje je jedna od najvažijih pojava u dinamičkim sistemima. U matematičkom smislu, ono je opisano periodičnim reěnjima DS i zatvorenim faznim trajektorijama.

Definicija 5 [Zatvorena trajektorija] *Trajektorija $\varphi(t, x)$ DS (3) kroz tačku x je zatvorena ako postoji $T > 0$ tako da je $\varphi(t, x) = \varphi(t + T, x)$ za svako $t \in \mathbb{R}$, a minimalno takvo T naziva se period zatvorene trajektorije. Zatvorena trajektorija DS naziva se* CIKL.

Svakom oscilatornom kretanju, odnosno periodičnom rešenju, odgovara jedna zatvorena trajektorija u faznoj ravni. Međutim, svakoj zatvorenoj faznoj trajektoriji odgovara beskonačno mnogo periodičnih rešenja koja se razlikuju samo po početnim uslovima.

Lema 2 *Periodične trajektorije DS preslikavaju se u periodične trajektorije njemu topološki konjugovanog DS, pri čemu su periodi tih trajektorija jednaki.*

DOKAZ. Neka su (14)-(1) i (14)-(2) topološki konjugovani. Dakle, postoji postoji homeomorfizam $h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tako da važi (16). Ako je $\varphi^t(x_0)$ periodična trajektorija DS (14)-(1) kroz tačku $x_0 \in X$ sa periodom T, tj. $\varphi^t(x_0) = \varphi^{t+T}(x_0)$ i ako je $h(x_0) = y_0$, tada je

$$\psi^t(y_0) = \psi^t(h(x_0)) = h(\varphi^t(x_0)) = h(\varphi^{t+T}(x_0)) = \psi^{t+T}(h(x_0)) = \psi^{t+T}(y_0)$$

tako da je $\psi^t(y_0)$ periodična trajektorija DS (14)-(2) kroz tačku $y_0 \in Y$ sa istom periodom T. $\square$

Treba napomenuti da periodi periodičnih trajektorija topološki ekvivalentnih DS **ne moraju biti jednaki**.

Definicija 6 [Granični cikl] *Neka je $\hat{x}(t)$ periodično rešenje DS (3) sa periodom $T > 0$, koje opisuje zatvorenu faznu trajektoriju $\hat{\gamma}$. Za trajektoriju $\hat{\gamma}$ kažemo da je izolovana ako ma koje drugo rešenje $x(t)$ čija početna tačka se nalazi u $\varepsilon-$okolini periodičnog rešenja $\hat{x}(t, x)$, nije periodično, odnosno opisuje faznu trajektoriju koja nije zatvorena. Trajektoriju $\hat{x}(t, x)$ izolovanog periodičnog rešenja zvaćemo* GRANIČNI CIKL.

Klasifikacija trajektorija DS

Naredno tvrđenje ukazuje na klasifikaciju trajektorija:

Teorema 1 *Fazna trajektorija dinamičkog sistema (2) može biti:*

- *tačka (položaj ravnoteže);*
- *glatka kriva bez samopreseka, kojoj odgovara periodično ili neperiodično rešenje;*
- *zatvorena glatka kriva, kojoj odgovara periodično rešenje.*

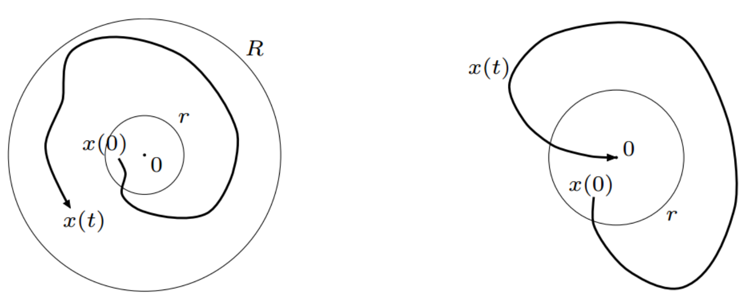
Iz ove teoreme sledi da je fazna trajektorija, koja nije tačka, glatka kriva bez samopreseka koja može biti otvorena ili zatvorena. Ako je fazna trajektorija zatvorena kriva, rešenje dinamičkog sistema je periodična funkcija sa nekom minimalnom periodom. Sa stanovišta primena to znači da realan sistem, matematički modeliran dinamičkim sistemom, radi u stabilnom, periodičnom režimu.

Pojam stabilnosti položaja ravnoteže DS

$$N_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{D} \, : \, ||x - x_0|| < \delta\}$$

Definicija 7 [Stabilnost položaja ravnoteže] *Položaj ravnoteže x_0 DS (2) je stabilan, ako za svako $R > 0$ postoji $r = r(R) > 0$, tako da za svaku faznu trajektoriju $x = x(t)$ ovog sistema, iz $||x(t_0) - x_0|| < r$ sledi $||x(t) - x_0|| < R$ za svako $t \in [t_0, \infty)$. Položaj ravnoteže x_0 DS (2) je nestabilan ako nije stabilan.*

Neka je Φ^t tok DS (2). Položaj ravnoteže x_0 DS (2) je stabilan, ako za svako $R > 0$ postoji $r = r(R) > 0$, tako da za svako $x \in N_r(x_0)$ i za svako $t \geq 0$ je $\Phi^t(x) \in N_R(x_0)$.



Slika 6: Stabilnost i asimptotska stabilnost PR $x_0 = 0$

Definicija 8 [Asimptotska stabilnost položaja ravnoteže] *Položaj ravnoteže x_0 DS (2) je asimptotski stabilan, ako je stabilan i postoji $\delta > 0$, tako da iz $||x(t_0) - x_0|| < \delta$ sledi*

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - x_0|| = 0.$$

Neka je Φ^t tok DS (2). Položaj ravnoteže x_0 DS (2) je asimptotski stabilan, ako je stabilan i postoji $\delta > 0$, tako da za svako $x \in N_\delta(x_0)$ sledi

$$\lim_{t\to\infty} \Phi^t(x) = x_0.$$

Pojmovi za nelinearan DS

Za običnu DJ prvog reda $y' = f(x, y)$ IZOKLINA je geometrijsko mesto tačaka u kojima polje pravaca ima istu vrednost, odnosno

$$\{(x, y) \,:\, f(x, y) = k,\ k = const\}$$

Analogno tome za DS

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \tag{17}$$

se definišu pojmovi x_1-NULA-IZOKLINA i x_2-NULA-IZOKLINA.

Definicija 9 [Nula-izokline] x_1-NULA-IZOKLINA *je skup tačaka u faznoj ravni za koje je $dx_1/dt = 0$, tj. $f_1(x, y) = 0$.* x_2-NULA-IZOKLINA *je skup tačaka u faznoj ravni za koje je $dx_2/dt = 0$, tj. $f_2(x, y) = 0$.*

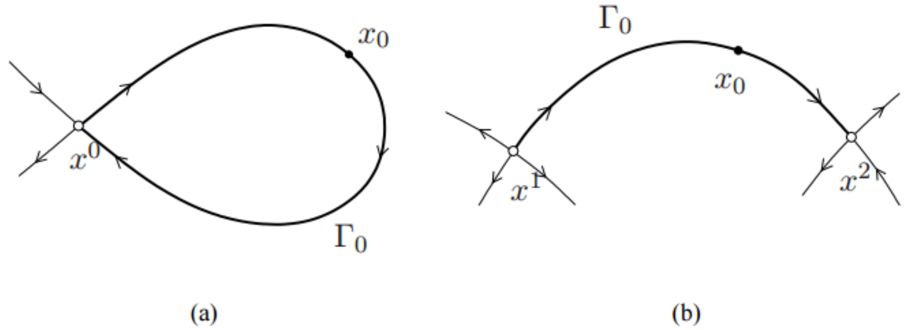
Uz pretpostavku da su funkcije $f_i \in C^{(1)}(\mathbb{E})$, pretpostavimo da je neproduživo rešenje bilo kog KP dinamičkog sistema (2) definisano na $\mathbb{R}$.

Definicija 10 Lokalna stabilna mnogostrukost *položaja ravnoteže $x^\star$ je skup*

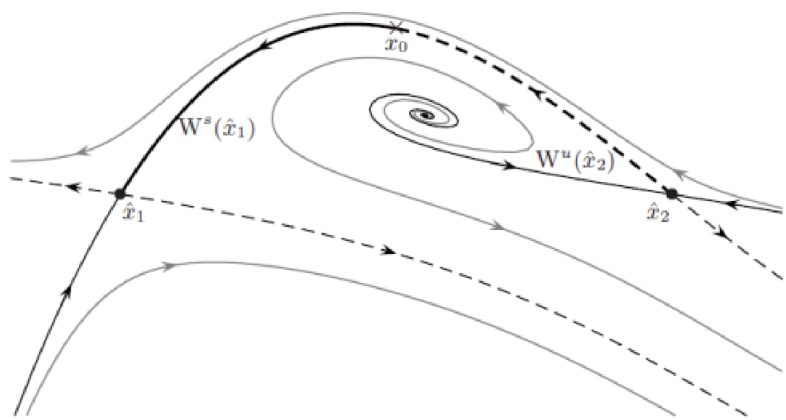
$$\mathcal{W}^s_{loc}(x^\star) = \left\{x \,:\, \lim_{t\to\infty} \Phi^t(x) = x^\star\right\}$$

Lokalna nestabilna mnogostrukost *položaja ravnoteže $x^\star$ je skup*

$$\mathcal{W}^u_{loc}(x^\star) = \left\{x \,:\, \lim_{t\to-\infty} \Phi^t(x) = x^\star\right\}$$



Slika 7: (a) homociklična trajektorija PR x^0; (b) heterociklična trajektorija PR x^1 i x^2.



Slika 8: Heterociklična veza između PR $\hat{x_1}$ i $\hat{x_2}$, pri čemu se stabilna mnogostrukost PR $\hat{x_1}$ poklapa sa nestabilnom mnogostrukošću PR $\hat{x_2}$

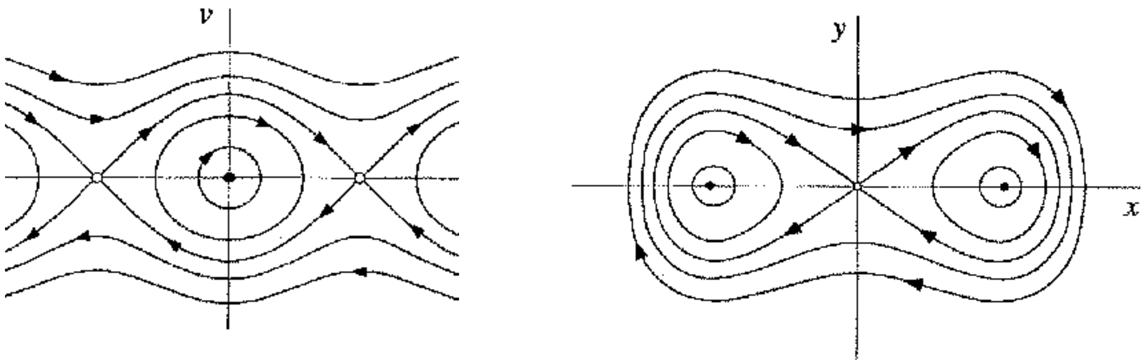
Definicija 11 [Heterociklična trajektorija] *Neka su $\hat{x_1}$ i $\hat{x_2}$ položaji ravnoteže DS. Trajektorija $\gamma(x_0)$ kroz tačku $x_0 \in \mathbb{E}$ naziva se* **heterociklična veza** *između položaja ravnoteže $\hat{x_1}$ i $\hat{x_2}$ ako je*

$$\lim_{t\to\infty} \Phi^t(x_0) = \hat{x_2}, \qquad \lim_{t\to-\infty} \Phi^t(x_0) = \hat{x_1}$$

Trajektorija $\gamma(x_0) \subset \mathcal{W}^u(\hat{x_1})$ i $\gamma(x_0) \subset \mathcal{W}^s(\hat{x_2})$.

Definicija 12 [Homociklična trajektorija] *Neka je $\hat{x_1}$ položaj ravnoteže DS. Trajektorija $\gamma(x_0)$ kroz tačku $x_0 \in \mathbb{E}$ naziva se* **homociklična trajektorija** *položaja ravnoteže $\hat{x_1}$ ako je*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \Phi^t(x_0) = \hat{x_1}$$



Slika 9: (a) heterociklična trajektorija PR $(-1, 0)$ i $(1, 0)$; (b) homociklična trajektorija PR $(0, 0)$

Definicija 13 [Invarijantan skup DS] *Skup $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ je* **invarijantan skup** *DS, ako za proizvoljno rešenje $\hat{x}(t, x_0)$ DS koje polazi iz tačke $x_0 \in \mathbb{S}$, važi $\hat{x}(t, x_0) \in \mathbb{S}$ za svako $t \in \mathbb{R}$, odnosno ako za proizvoljno $x_0 \in \mathbb{S}$ važi $\Phi^t(x_0) \in \mathbb{S}$ za svako $t \in \mathbb{R}$. Skup $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ je* **pozitivno (negativno) invarijantan skup** *DS, ako za proizvoljno $x_0 \in \mathbb{S}$ važi $\Phi^t(x_0) \in \mathbb{S}$ za svako $t > 0$ $(t < 0)$.*

Svaki PR je invarijantan skup. Svaka trajektorija je invarijantan skup. Specijalno, svaki granični cikl je invarijantan skup.