

2. Fazni portret dvodimenzionalnog linearnog DS sa konstantnim koeficijentima

HOMOGEN LINEARAN SISTEMA DJ SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA:

$$(1) \quad \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

$$(2) \quad Y'(t) = AY(t), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Pre svega, primetimo da ako je $\det A \neq 0$, jedini PR DS (1) je koordinatni početak $(0, 0)$.

Ako su $\lambda_{1,2}$ realne sopstvene vrednosti matrice A , a $v_{1,2}$ odgovarajući (generalisani) sopstveni vektori, za novu bazu prostora \mathbb{R}^2 uzimamo $\{v_1, v_2\}$. Matrica transformacije T je matrica čije su kolone vektori $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, $v_2 = (v_{21}, v_{22})^T$, odnosno $T = (v_1 \ v_2)$. Ako su $\lambda_{1,2}$ par konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti A , a $v_1 = \bar{v}_2$ odgovarajući sopstveni vektori, onda je matrica transformacije $T = (\operatorname{Re} v_1 \ \operatorname{Im} v_1)$. Matrica $J = T^{-1}AT$ sistema u kanonskom obliku

$$(3) \quad X'(t) = JX(t)$$

može biti jednog od oblika

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$
$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad J_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

gde su $\lambda_{1,2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ako matrica A ima dva realne različite sopstvene vrednosti, matrica $J = J_1$. Ako matrica A ima par konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti $\alpha \pm i\beta$, matrica $J = J_2$. Ako matrica A ima dvostruku realnu sopstvenu vrednost $\lambda_1 = \lambda_2$, matrica $J = J_3$ ili $J = J_4$, u zavisnosti od toga da li postoje, redom, dva ili jedan sopstveni vektor odgovarajući dvostruku sopstvenoj vrednosti.

Odredićemo najpre fazni portret sistema (3) u svakom od slučajeva:

- ★ $J = J_1$, odnosno kada matrica A ima dva realne različite sopstvene vrednosti;
 - ★ $J = J_2$, odnosno kada matrica A ima par konjugovano kompleksnih sopstvenih vrednosti;
 - ★ $J = J_3$ i $J = J_4$, odnosno kada matrica A ima dvostruku realnu sopstvenu vrednost i redom dva, odnosno jedan sopstveni vektor.
- a zatim i fazni portret sistema (2).

1 Sopstvene vrednosti matrice A su realne i različite: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Kanonski oblik sistema (2) je $X'(t) = J_1 X(t)$, odnosno

$$(4) \quad x_1' = \lambda_1 x_1, \quad x_2' = \lambda_2 x_2,$$

čije je opšte rešenje

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

odnosno

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

što su parametarske jednačine faznih trajektorija. Fazne trajektorije su integralne krive DJ

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2'(t)}{x_1'(t)} = \frac{\lambda_2 x_2}{\lambda_1 x_1}$$

odnosno $|x_2|^{\lambda_1} = k|x_1|^{\lambda_2}$.

Dovoljno je razmatrati samo ponašanje trajektorija u prvom kvadrantu (za $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$), jer se trajektorije simetrično preslikavaju na ostala tri kvadranta.

1A Neka je $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Za $c_1 > 0, c_2 > 0$ važi

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow 0, & x_2(t) &\rightarrow 0 & \text{kad } t &\rightarrow +\infty, \\ x_1(t) &\rightarrow \infty, & x_2(t) &\rightarrow \infty & \text{kad } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Kada su obe sopstvene vrednosti negativne, $x_1(t)$ i $x_2(t)$ eksponencijalno opadaju kada $t \rightarrow +\infty$. Ali kako je $\lambda_1 < \lambda_2$, $x_2(t)$ opada mnogo sporije nego $x_1(t)$ kada $t \rightarrow +\infty$, $c_2 e^{\lambda_2 t} (0, 1)^T$ je dominantan sabirak u opštem rešenju kada $t \rightarrow +\infty$. S druge strane, kada $t \rightarrow -\infty$, $x_1(t)$ i $x_2(t)$ eksponencijalno rastu, pri čemu $x_1(t)$ raste mnogo brže nego $x_2(t)$, $c_1 e^{\lambda_1 t} (1, 0)^T$ je dominantan sabirak u opštem rešenju kada $t \rightarrow -\infty$. Trajektorije se približavaju koordinatnom početku, a da bi dali odgovor na pitanje kako, odredimo koeficijent pravca tangente fazne trajektorije:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow \infty \quad \text{kad } t \rightarrow +\infty,$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0 \quad \text{kad } t \rightarrow -\infty.$$

Dakle, sve trajektorije se približavaju koordinatnom početku tangentno na x_2 -osu kada $t \rightarrow +\infty$ i ulivaju se u koordinatni početak (slika 1-(a)), a udaljavaju se od njega kada $t \rightarrow -\infty$ paralelno x_1 -osi.

Položaj ravnoteže $(0, 0)$ naziva se **STABILAN ČVOR** \sim **stable node = sink** .

Za $c_1 = c_2 = 0$ trajektorija je tačka $(0, 0)$.

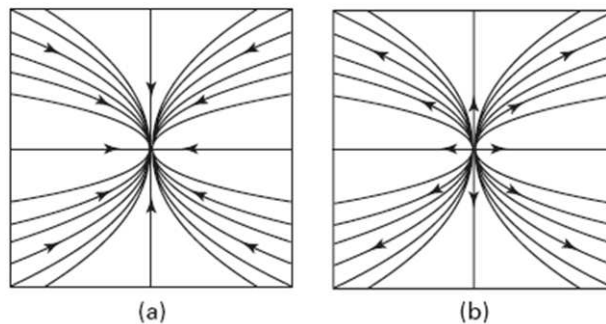
Za $c_1 \leq 0, c_2 = 0$ trajektorije su pozitivna i negativna x_1 -poluosa, a za $c_1 = 0, c_2 \leq 0$ trajektorije su pozitivna i negativna x_2 -poluosa .

⊗ *Pravolinijske trajektorije*: Poluose $x_1 = 0, x_2 \leq 0$ i $x_2 = 0, x_1 \leq 0$ pored toga što su trajektorije sadrže tkz. PRAVOLINIJSKE TRAJEKTORIJE: trajektorije koje polaze sa neke od koordinatnih osa ostaju zauvek na toj pravoj, pri čemu duž nje eksponencijalno opadaju kada $t \rightarrow +\infty$. Pravolinijske trajektorije $c_1 e^{\lambda_1 t} (1, 0)^T$ leže na x_1 -osi i teže ka $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$, dok pravolinijske trajektorije $c_2 e^{\lambda_2 t} (0, 1)^T$ leže na x_2 -osi i teže ka $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$.

⊗ *Stabilni (nestabilni) pravci*: Kako pravolinijske trajektorije duž koordinatnih poluosa eskponencijalno opadaju ka $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$, koordinatne poluose nazivaju su STABILNI PRAVCI ČVORA.

⊗ *Spori (brzi) pravci*: Poluose x_1 nazivamo *brzim pravcima*, jer $x_1(t)$ koordinata rešenja $X(t)$ teži nuli kada $t \rightarrow +\infty$ mnogo brže nego $x_2(t)$ koordinata. Drugim rečima, pravolinijske trajektorije duž x_1 -poluosa se približavaju koordinatnom početku znatno brže nego pravolinijske trajektorije duž x_2 -poluosa. Analogno, x_2 -poluose nazivamo *sporim pravcima*. Tačnije, pod *sporim pravcem* podrazumevamo pravac određen sopstvenim vektorom koji je odgovarajući sopstvenoj vrednosti sa manjom apsolutnom vrednošću, odnosno pod *brzim pravcem* podrazumevamo pravac određen sopstvenim vektorom koji je odgovarajući sopstvenoj vrednosti sa većom apsolutnom vrednošću.

Trajektorije se kada $t \rightarrow +\infty$ približavaju koordinatnom početku tangentno na spori pravac (x_2 -osu), a kada $t \rightarrow -\infty$ trajektorije se udaljavaju od koordinatnog početka paralelno sa brzim pravcem (x_1 -osom).



Slika 1: Stabilan i nestabilan čvor

1B Neka je $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Tada za $c_1 > 0, c_2 > 0$ važi

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow \infty, & x_2(t) &\rightarrow \infty & \text{kad } t &\rightarrow +\infty \\ x_1(t) &\rightarrow 0, & x_2(t) &\rightarrow 0 & \text{kad } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Izgled trajektorija ostaje isti, samo se menja njihov pravac sa rastom promenljive t . Kako se trajektorije udaljavaju od tačke $(0, 0)$ kad $t \rightarrow +\infty$, one *izviru* iz koordinatnog početka, a položaj ravnoteže se naziva **NESTABILAN ČVOR** \sim **unstable node = source** (slika 1-(b)). U ovom slučaju, obe koordinatne ose su *nestabilni pravci čvora*, jer se pravolinijske trajektorije duž njih udaljavaju od koordinatnog početka. Kako je $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, $x_1(t)$ teži ∞ mnogo brže nego $x_2(t)$, odnosno pravolinijske trajektorije duž x_1 -poluosa se udaljavaju od koordinatnog početka znatno brže nego pravolinijske trajektorije duž x_2 -poluosa. x_1 -poluose nazivamo *brzim pravcima*, x_2 -poluose nazivamo *sporim pravcima*.

Trajektorije "izlaze" iz koordinatnog početka tangentno na spori pravac (x_2 -osu), i kada $t \rightarrow +\infty$ udaljavaju se od KP paralelno sa brzim pravcem (x_1 -osom).

Ako su sopstvene vrednosti istog znaka trajektorije se kada $t \rightarrow +\infty$ uvek približavaju koordinatnom početku (stabilan čvor), ili se udaljavaju od njega (nestabilan čvor), tangentno na spori pravac - određen sopstvenim vektorom odgovarajućim sopstvenoj vrednosti sa manjom apsolutnom vrednošću.

FAZNI PORTET SISTEMA (2): ako su $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ sopstvene vrednosti matrice A , a $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, $v_2 = (v_{21}, v_{22})^T$ odgovarajući sopstveni vektori, opšte rešenje sistema je

$$\begin{aligned} Y(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}. \\ y_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{21}, & y_2(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_{12} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22} \end{aligned}$$

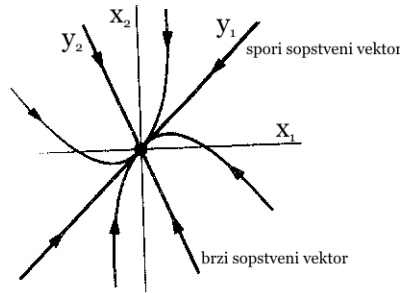
Saglasno sporom i brzom pravcu DS (4), sopstveni vektor v_1 (v_2) naziva se *spori* (*brzi*) *sopstveni vektor* DS (2), odnosno pravac određen sporim (brzim) sopstvenim vektorom naziva se *spori* (*brzi*) *pravac* položaja ravnoteže. Oba pravca određena sopstvenim vektorima v_1 i v_2 su stabilni i sadrže redom pravolinijske trajektorije $Y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$, $Y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$, koje se približavaju položaju ravnoteže $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$. Koefficient pravca tangente trajektorije u koordinatnom početku je onda

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dy_1} &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_{12} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}}{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_{21}} \\ &= \frac{\lambda_1 c_1 v_{12} + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{22}}{\lambda_1 c_1 v_{11} + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{21}} \rightarrow \frac{v_{12}}{v_{11}} \quad \text{kad } t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

ako je $c_1 \neq 0$. Kako je v_{12}/v_{11} pravac sopstvenog vektora v_1 odgovarajućeg sopstvenoj vrednosti λ_1 , sve trajektorije (izuzev pravolinijskih trajektorija na brzom pravcu - za $c_1 = 0$) približavaju se koordinatnom početku kada $t \rightarrow +\infty$ tangentno na pravac sporog vektora v_1 . Sa druge strane,

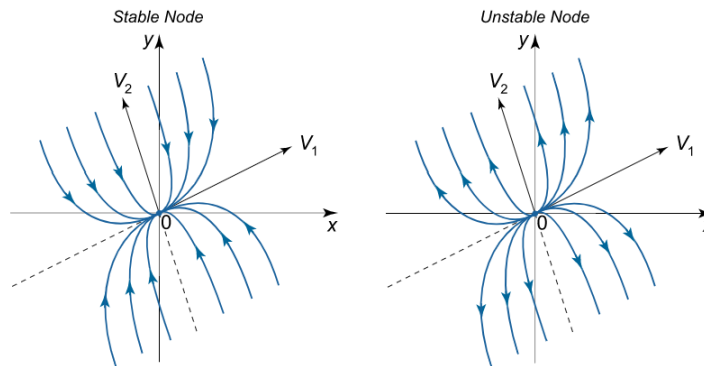
$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_{12} + \lambda_2 c_2 v_{22}}{\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_{11} + \lambda_2 c_2 v_{21}} \rightarrow \frac{v_{22}}{v_{21}} \quad \text{kad } t \rightarrow -\infty$$

ako je $c_2 \neq 0$, tako da se sve trajektorije (izuzev pravolinijskih trajektorija na sporom pravcu - za $c_2 = 0$) udaljavaju od koordinatnog početka kada $t \rightarrow -\infty$ paralelno brzom vektoru v_2 .



Slika 2: Stabilan čvor DS (2) : y_1 je spori stabilan pravac, y_2 je brzi stabilan pravac

Na Slici 2 prikazan je tipičan fazni portret sistema (2) u slučaju kada su obe sopstvene vrednosti negativne i $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

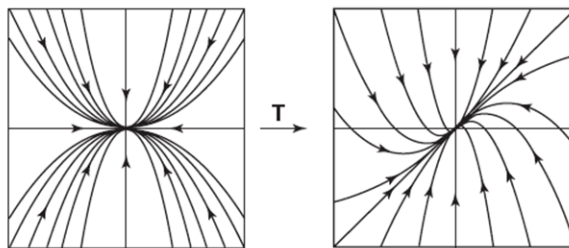


Slika 3: Stabilan i nestabilan čvor DS: v_1 je spori pravac, v_2 je brzi pravac

Na Slici 3 prikazan je tipičan fazni portret DS (2) u slučaju kada su:

- (a) obe sopstvene vrednosti negativne i $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$;
- (b) obe sopstvene vrednosti pozitivne i $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Primetimo da fazni portreti sistema (2) i (3) nisu identični, ali se tip položaja ravnoteže ne menja i očuvana je orijentacija trajektorija. Fazni portreti sistema (2) i (3) su topološki konjugovani (videti Definiciju 1 i Teoremu 1).



Slika 4: Topološki konjugovani fazni portret DS $X' = JX$ i $Y' = AY$ kada je $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$,

Primer 2.1. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Za sistem $Y' = AY$, sopstvene vrednosti matrice A su $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = -1$, a odgovarajući sopstveni vektori su $v_1 = (0, 1)^T$ (*brzi stabilan pravac* $y_2 = 0$) i $v_2 = (1, 1)^T$ (*spori stabilan pravac* $y_2 = y_1$). Opšte rešenje sistema $Y' = AY$ je

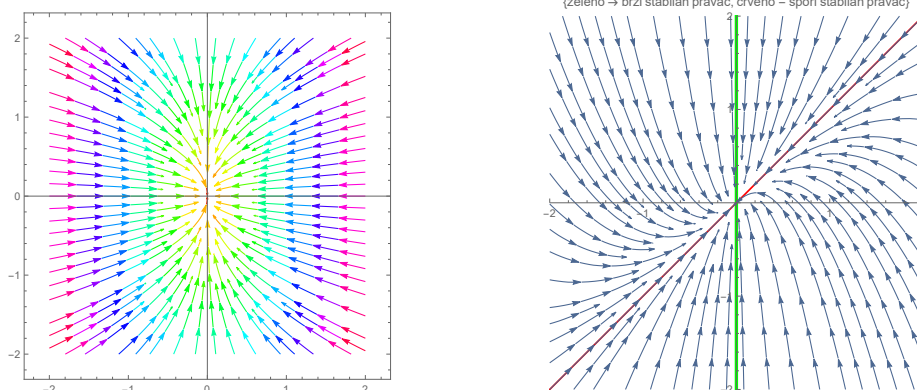
$$(5) \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Matrica transformacije je

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opšte rešenje sistema $X' = JX$ je

$$(6) \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$



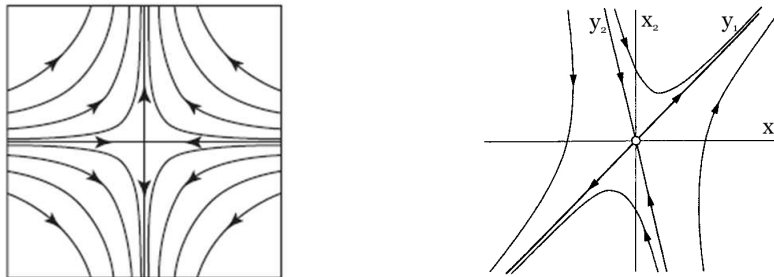
Slika 5: Fazni portret DS $X' = JX$ i $Y' = AY$ u Primeru 2.1.: $(0, 0)$ je stabilan čvor

PR $(0, 0)$ je stabilan čvor. Prema (6), kako je $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, x_2 -poluose su spori stabilni pravci, x_1 -poluose su brzi stabilni pravci. Sve trajektorije sistema $X' = JX$ se približavaju kada $t \rightarrow +\infty$ koordinatnom početku tangentno na x_2 -poluosu, a kada $t \rightarrow -\infty$ trajektorije se udaljavaju od koordinatnog početka paralelno sa x_1 -poluosom. Sa druge strane prema (5), sopstveni vektor $v_2 = (1, 1)^T$ je spori sopstveni vektor DS $Y' = AY$, a sve fazne trajektorije tog sistema se približavaju kada $t \rightarrow +\infty$ koordinatnom početku tangentno na pravu $y_2 = y_1$. Sopstveni vektor $v_1 = (0, 1)^T$ je brzi sopstveni vektor DS $Y' = AY$, i kada $t \rightarrow -\infty$ trajektorije se udaljavaju od koordinatnog početka paralelno sa brzim pravcem $y_2 = 0$.

1C Neka je $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Za $c_1 > 0, c_2 > 0$ je

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow 0, & x_2(t) &\rightarrow \infty & \text{kad } t &\rightarrow +\infty, \\ x_1(t) &\rightarrow \infty, & x_2(t) &\rightarrow 0 & \text{kad } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Dakle, kada $t \rightarrow +\infty$, $x_1(t)$ eksponencijalno opada, dok $x_2(t)$ eksponencijalno raste. Kako je $\lambda_1 < 0$, pravolinijske trajektorije $c_1 e^{\lambda_1 t} (1, 0)^T$ leže na x_1 -osi i teže ka $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$, pa su x_1 -poluose *stabilni pravci položaja ravnoteže*. S druge strane, $\lambda_2 > 0$, tako da se pravolinijske trajektorije $c_2 e^{\lambda_2 t} (0, 1)^T$ udaljavaju od $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$, pa su x_2 -poluose *nestabilni pravci položaja ravnoteže*.



Slika 6: Sedlo

U tom slučaju PR $(0, 0)$ se naziva **SEDLO** \sim **saddle** (slika 6-(a)). Kako je

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow \infty & \text{kad } t &\rightarrow +\infty, \\ \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0 & \text{kad } t &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

za svaki položaj ravnoteže koji je sedlo, **trajektorije se približavaju nestabilnom pravcu (x_2 -poluose) kada $t \rightarrow +\infty$, odnosno stabilnom pravcu (x_1 -poluose) kada $t \rightarrow -\infty$, izuzev pravolinijskih trajektorija na stabilnom i nestabilnom pravcu.**

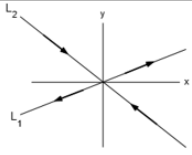
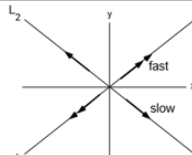
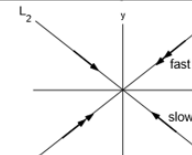
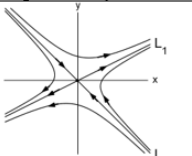
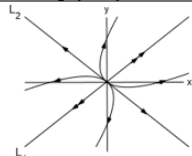
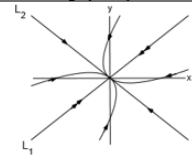
FAZNI PORTRET DS (2): neka su $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ sopstvene vrednosti matrice A , a $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, $v_2 = (v_{21}, v_{22})^T$ odgovarajući sopstveni vektori. *Nestabilan pravac sedla* je određen sopstvenim vektorom v_1 i sadrži pravolinijske trajektorije $Y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$ koje se udaljavaju od položaja ravnoteže $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$. *Stabilan pravac sedla* je određen sopstvenim vektorom v_2 i sadrži pravolinijske trajektorije $Y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ koje se približavaju položaju ravnoteže $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$. Na Slici 6-(b) prikazan je tipičan fazni portret sistema (2) u slučaju kada su sopstvene vrednosti različitog znaka $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Primetimo da za $c_2 \neq 0$

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_{12} + \lambda_2 c_2 v_{22}}{\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} v_{11} + \lambda_2 c_2 v_{21}} \rightarrow \frac{v_{22}}{v_{21}} \quad \text{kad } t \rightarrow -\infty$$

odnosno $Y(t) \sim c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = Y_2(t)$, $t \rightarrow -\infty$, a za $c_1 \neq 0$

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_1 c_1 v_{12} + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{22}}{\lambda_1 c_1 v_{11} + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_{21}} \rightarrow \frac{v_{12}}{v_{11}} \quad \text{kad } t \rightarrow +\infty,$$

odnosno $Y(t) \sim c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 = Y_1(t)$, $t \rightarrow +\infty$. Dakle, sve ostale fazne trajektorije (sem pravolinijskih trajektorija na stabilnom i nestabilnom pravcu) približavaju se nestabilnom pravcu kada $t \rightarrow +\infty$ i stabilnom pravcu kada $t \rightarrow -\infty$.

Sedlo $\mu_2 < 0 < \mu_1$	Nestabilan čvor $0 < \mu_2 < \mu_1$	Stabilan čvor $\mu_1 < \mu_2 < 0$
		
L_1 nestabilan pravac L_2 stabilan pravac	L_1 brzi pravac L_2 spori pravac	L_1 brzi pravac L_2 spori pravac
		
Fazne trajektorije se približavaju <ul style="list-style-type: none"> ➤ nestabilnom pravcu L_1 kada $t \rightarrow \infty$ ➤ stabilnom pravcu L_2 kada $t \rightarrow -\infty$ 	Fazne trajektorije su <ul style="list-style-type: none"> ➤ paralelne sa brzim pravcem L_1 kada $t \rightarrow \infty$ ➤ tangentne na spori pravac L_2 kada $t \rightarrow -\infty$ 	Fazne trajektorije su <ul style="list-style-type: none"> ➤ paralelne sa brzim pravcem L_1 kada $t \rightarrow -\infty$ ➤ tangentne na spori pravac L_2 kada $t \rightarrow \infty$

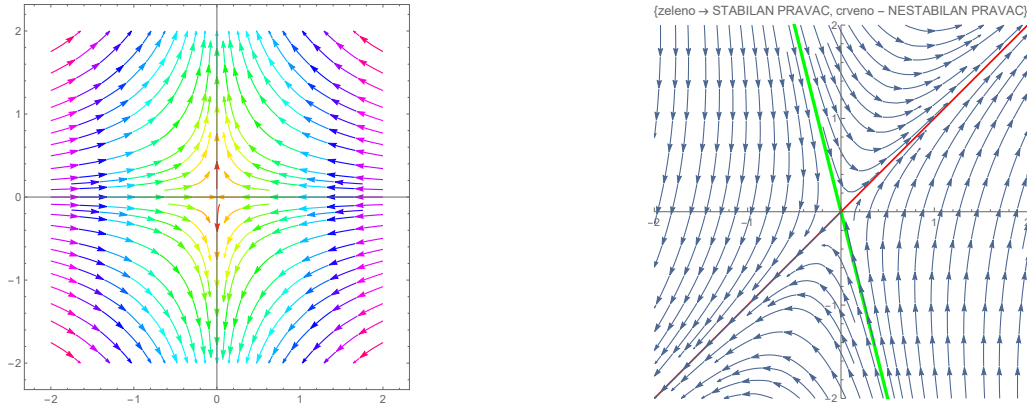
Slika 7: Fazni portret linearnog DS u ravni kada su sopstvene vrednosti matrice realne i različite

Primer 2.2. Za sistem $Y' = AY$, gde je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

sopstvene vrednost matrice A su $\lambda_1 = -3$ i $\lambda_2 = 2$, a odgovarajući sopstveni vektori su $v_1 = (-1, 4)^T$ (*stabilan pravac* $y_2 = -4y_1$) i $v_2 = (1, 1)^T$ (*nestabilan pravac* $y_2 = y_1$). Matrica transformacije je

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \implies J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

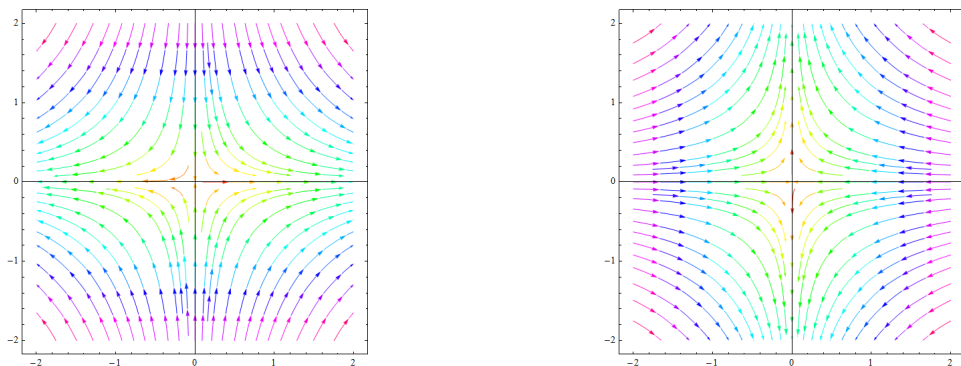


Slika 8: Fazni portret DS $X' = JX$ i $Y' = AY$ u Primeru 2.2. - $(0, 0)$ je sedlo

Opšte rešenje DS $X' = JX$

$$X(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

x_1 -poluose su stabilni pravci PR sistema $X' = JX$, dok su x_2 -poluose nestabilni pravci PR sistema $X' = JX$, (slika 8-(a).) Stabilan pravac PR sistema $Y' = AY$ je određen vektorom v_2 , a pravac određen vektorom v_1 nestabilan pravac PR. Trajektorije se približavaju nestabilnom pravcu $y_2 = y_1$ kada $t \rightarrow \infty$ i stabilnom pravcu $y_2 = -4y_1$ kada $t \rightarrow -\infty$ (slika 8-(b)).



Slika 9: Tokovi DS (a) $x_1' = 2x_1$, $x_2' = -3x_2$ i (b) $x_1' = -3x_1$, $x_2' = 2x_2$

Na Slici 9 prikazani su tokovi DS (a) $x_1' = 2x_1$, $x_2' = -3x_2$ i (b) $x_1' = -3x_1$, $x_2' = 2x_2$.

1D Jedna od sopstvenih vrednosti je jednaka nuli: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Sistem u kanonskom obliku je

$$x_1' = 0 = f_1(x_1, x_2), \quad x_2' = \lambda_2 x_2 = f_2(x_1, x_2).$$

čije je opšte rešenje

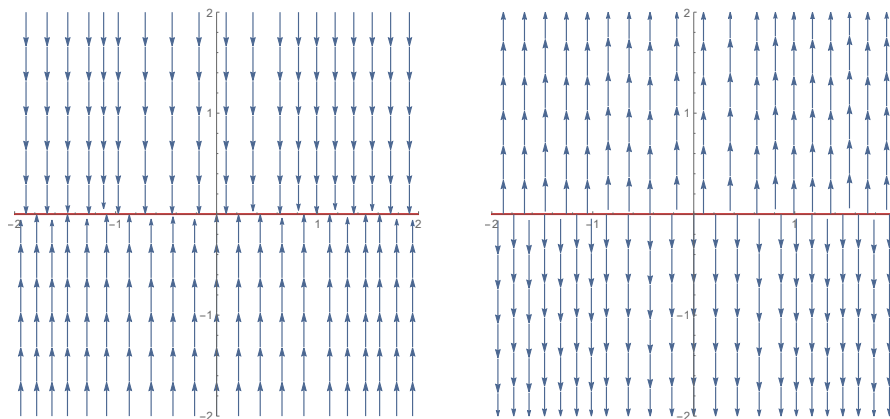
$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

odnosno

$$x_1(t) = c_1, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Kako je $f_1(x_1, x_2) = 0$ za svako $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ i $f_2(x_1, x_2) = 0$ za $x_2 = 0$, tačke $(x_1, 0)$ za svako $x_1 \in \mathbb{R}$ (sve tačke x_1 -ose) su PR sistema u kanonskom obliku. Takve PR nazivamo **NEIZOLOVANI ČVOROVI**. Dakle, *sve tačke prave određene sopstvenim vektorom odgovarajućim sopstvenoj vrednosti $\lambda_1 = 0$ su neizolovani položaji ravnoteže sistema.*

Sve trajektorije su pravolinijske (poluprave paralelne x_2 -osi). Za $\lambda_2 < 0$ pravolinijska trajektorija se približava neizolovanom PR na pravoj $x_2 = 0$ (slika 10-(a)), koji se naziva **STABILAN NEIZOLOVANI ČVOR**, dok za $\lambda_2 > 0$ pravolinijska trajektorija se udaljava od neizolovanog PR na pravoj $x_2 = 0$ (slika 10-(b)), koji se naziva **NESTABILAN NEIZOLOVANI ČVOR**.

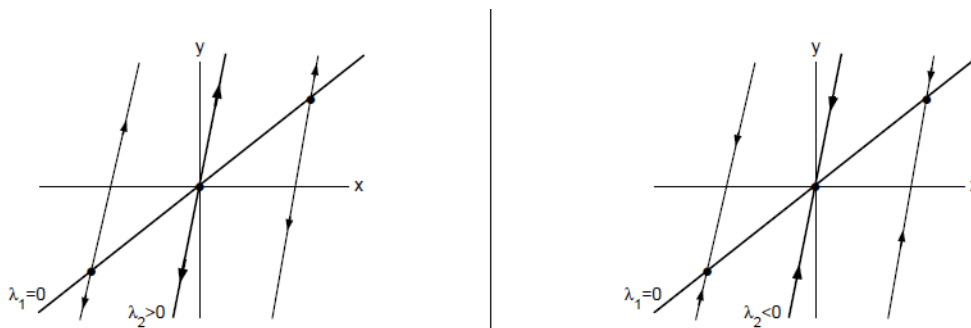


Slika 10: (a) Stabilni neizolovani čvorovi; (b) Nestabilni neizolovani čvorovi

FAZNI PORTRET DS (2): ako sopstvenim vrednostima $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ odgovaraju linearno nezavisni sopstveni vektori v_1 i v_2 matrice A , opšte rešenje sistema (2) je $Y(t) = c_1 v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$, odnosno

$$y_1(t) = c_1 v_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{21}, \quad y_2(t) = c_1 v_{12} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}.$$

Sve tačke prave određene sopstvenim vektorom v_1 (odgovarajućim sopstvenoj vrednosti $\lambda_1 = 0$) su neizolovani položaji ravnoteže sistema.



Slika 11: (a) Nestabilni neizolovani čvorovi; (b) Stabilni neizolovani čvorovi

Kako je

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}}{c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_{21}} = \frac{v_{22}}{v_{21}}$$

trajektorije su poluprave paralelne pravcu koji je određen sopstvenim vektorom v_2 , i one se za $\lambda_2 < 0$ približavaju PR na pravoj određenoj sopstvenim vektorom v_1 , a za $\lambda_2 > 0$ se udaljavaju od PR na toj pravoj. Neizolovani položaji ravnoteže na pravoj određenoj sopstvenim vektorom v_1 nazivaju se **NEIZOLOVANI ČVORovi**, za $\lambda_2 < 0$ (slika 11-(b)) - **stabilni neizolovani čvor = stable saddle-node** i za $\lambda_2 > 0$ (slika 11-(a)) - **nestabilni neizolovani čvor = unstable saddle-node**.

Primer 2.3. Za svaki od sledećih sistema $Y' = A \cdot Y$:

$$(A) \quad \begin{cases} y_1' = 5y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -4y_1 - 3y_2 \end{cases} \quad (B) \quad \begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases} \quad (C) \quad \begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

(i) Naći sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A .

(ii) Naći matricu T koja transformiše matricu A u kanonski oblik i odrediti matricu J kanonskog oblik sistema;

(iii) Skicirati fazni portret za oba sistema $Y' = A \cdot Y$ i $X' = JX$.

REŠENJE: (A) Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori matrice A su: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$,

- $v_1 = (-3, 2)^T$ (nestabilan pravac $y_2 = -\frac{2}{3}y_1$),
- $v_2 = (-1, 2)^T$ (stabilan pravac $y_2 = -2y_1$).

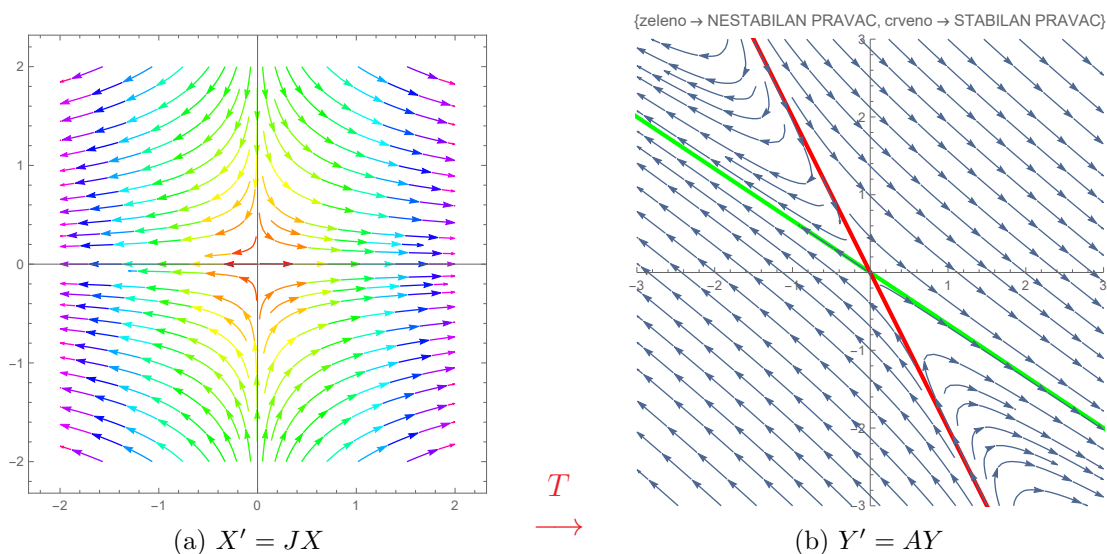
Matrica transformacije T čije su kolone sopstveni vektori i matrica kanonskog oblika sistema su:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(B) Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori matrice A su $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$

- $v_1 = (2, 3)^T$ (brzi stabilan pravac $y_2 = \frac{3}{2}y_1$),
- $v_2 = (1, 1)^T$ (spori stabilan pravac $y_2 = y_1$).

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

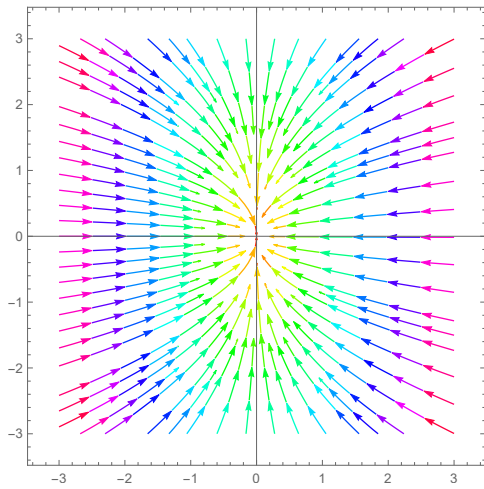


Slika 12: Primer 2.3-(1) : **sedlo**

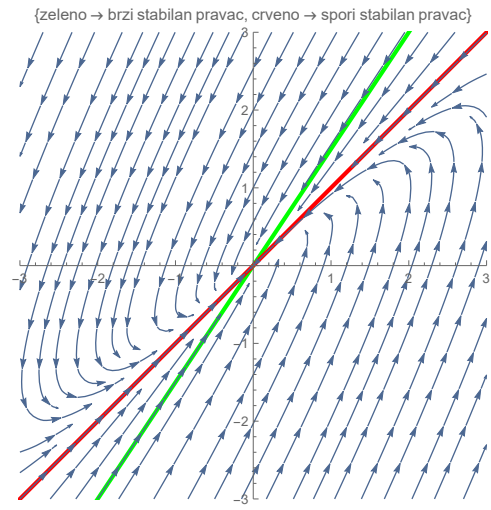
(C) Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori matrice A su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

- $v_1 = (-2, 3)^T$ (brzi nestabilan pravac $y_2 = -\frac{3}{2}y_1$),
- $v_2 = (-1, 1)^T$ (spori nestabilan pravac $y_2 = -y_1$).

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

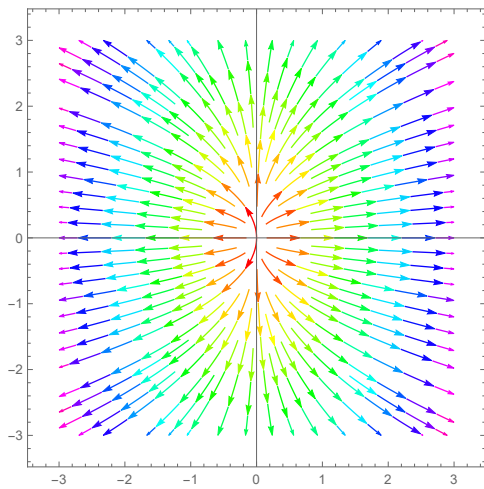


(a) $X' = JX$

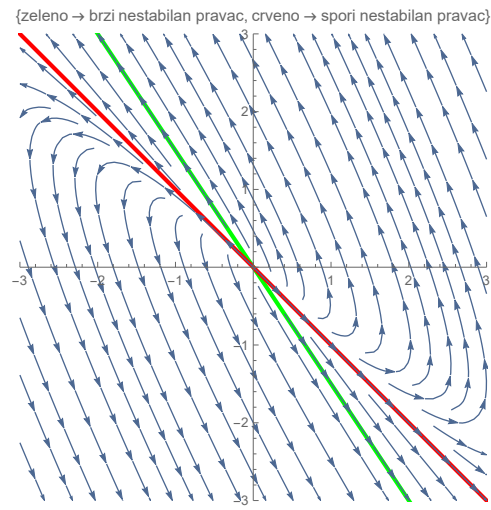


(b) $Y' = AY$

T
→



(c) $X' = JX$



(d) $Y' = AY$

T
→

Slika 13: (a)-(b) : Primer 2.3-(2) - stabilan čvor; (c)-(d) : Primer 2.3-(3) - nestabilan čvor

2] Sopstvene vrednosti matrice A su kompleksne: $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$

Neka su $v_{1,2} = a \pm ib$ sopstveni vektori odgovarajući sopstvenim vrednostima $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ matrice A . Matrica kanonskog oblik sistema je matrica J_2 , odnosno sistem u kanonskom obliku je

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad x'_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2.$$

Sopstvene vrednosti matrice J_2 su $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, dok su odgovarajući sopstveni vektori $h_{1,2} = (\mp i, 1)$. Dobijamo kompleksno rešenje

$$X(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} + i e^{\alpha t} \begin{pmatrix} -\cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} = X_{\text{Re}}(t) + i X_{\text{Im}}(t),$$

pa su $X_{\text{Re}}(t)$ i $X_{\text{Im}}(t)$ linearno nezavisna rešenja, a opšte rešenje je

$$X(t) = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} -\cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} (c_1 \sin \beta t - c_2 \cos \beta t) \\ e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \end{pmatrix}$$

Dakle, parametarske jednačine faznih trajektorija sistema $X' = J_2 X$ su

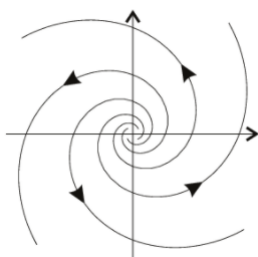
$$x_1(t) = e^{\alpha t} (c_1 \sin \beta t - c_2 \cos \beta t), \quad x_2(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

odnosno

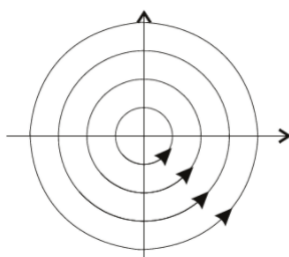
$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = C^2 e^{2\alpha t}, \quad C^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

Fazni portret zavisi od vrednosti α :

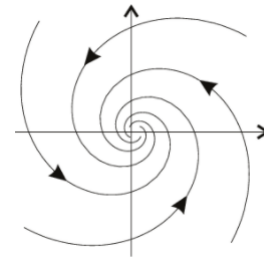
★ ako je $\alpha = 0$, rešenja su periodična sa periodom $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$, a oko koordinatnog početka su zatvorene trajektorije (kružnice sa centrom u $(0, 0)$) - položaj ravnoteže se naziva **CENTAR** (slika 14-(a)).



(a) NESTABILAN FOKUS



(b) CENTAR



(c) STABILAN FOKUS

Slika 14: Fazni portret DS (3) kada su sopstvene vrednosti matrice konjugovano kompleksne $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$: (a) $\alpha > 0$; (b) $\alpha = 0$; (c) $\alpha < 0$

Član $e^{\alpha t}$ transformiše kružnice u spirale koje ili idu ka koordinatnom početku ili se udaljavaju od njega

★ ako je $\alpha > 0$, trajektorije "izviru" iz koordinatnog početka, odnosno spiralno se udaljavaju od položaj ravnoteže i položaj ravnoteže naziva se **NESTABILAN FOKUS** \sim **unstable focus = spiral source** (slika 14-(b)).

★ ako je $\alpha < 0$, trajektorije "uviru" u koordinatni početak, odnosno približavaju se spiralno položaju ravnoteže i položaj ravnoteže se naziva **STABILAN FOKUS** \sim **stable focus = spiral sink** (slika 14-(c)).

SMER ROTACIJE TRAJEKTORIJA OKO KP. Za matricu

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

smer kretanja tačke po zatvorenoj trajektoriji (kružnici) biće u smeru kretanja kazaljki na satu za $\beta > 0$ (negativna orijentacija) i suprotno kretanja kazaljki na satu za $\beta < 0$ (pozitivna orijentacija) - videti Sliku 15. Do zaključka dolazimo određivanjem vektora vektorskog polja DS $X' = J_2 X$ u tačkama neke od koordinatnih osa. DS je oblika

$$x'_1 = \beta x_2, \quad x'_2 = -\beta x_1.$$

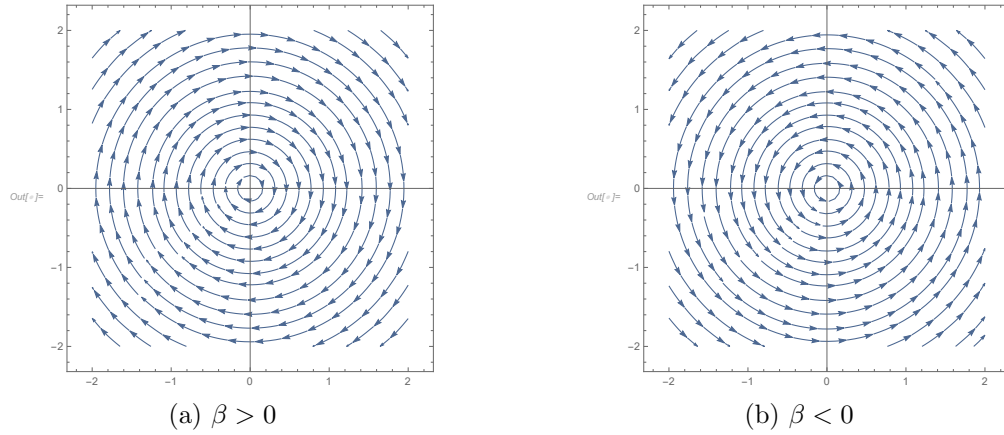
U proizvoljnoj tački $W(w, 0)$ x_1 -ose je $x'_1 = 0$, $x'_2 = -\beta w = w_0$, odnosno u tački W vektora vektorskog polja DS je $(0, w_0)$. Dakle, za $w_0 > 0$ vektor vektorskog polja DS je \uparrow , dok za $w_0 < 0$ vektor vektorskog polja DS je \downarrow . Za $\beta > 0$ je:

- $w_0 > 0$ za $w < 0$, odnosno u tački W sa negativnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \uparrow
- $w_0 < 0$ za $w > 0$, odnosno u tački W sa pozitivnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \downarrow

odakle zaključujemo da će smer kretanja tačke po kružnici biti u smeru kretanja kazaljki na satu (negativna orijentacija). Za $\beta < 0$ je:

- $w_0 < 0$ za $w < 0$, odnosno u tački W sa negativnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \downarrow
- $w_0 > 0$ za $w > 0$, odnosno u tački W sa pozitivnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \uparrow

odakle zaključujemo da će smer kretanja tačke po kružnici biti u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu (pozitivna orijentacija). Do zaključka se može doći i određivanjem vektora vektorskog polja DS u proizvoljnoj tački $V(0, v)$ x_2 -ose. U tački V je $x'_1 = \beta v = v_0$, $x'_2 = 0$, odnosno u tački V vektora vektorskog polja DS



Slika 15: Orientacija zatvorenih trajektorija oko centra (a) negativna orijentacija; (b) pozitivna orijentacija

je $(v_0, 0)$. Dakle, za $v_0 > 0$ vektor vektorskog polja DS je \rightarrow , dok za $v_0 < 0$ vektor vektorskog polja DS je \leftarrow .

Za matricu

$$J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

analogno prethodnom postupku određivanjem vektora vektorskog polja u tačkama koordinatnih poluosa, može se doći do zaključka da je smer rotacije spiralne trajektorija prema koordinatnom početku (ili od koordinatnog početka) u smeru kretanja kazaljki na satu za $\beta > 0$ (negativna orijentacija) i suprotno kretanja kazaljki na satu za $\beta < 0$ (pozitivna orijentacija). DS $X' = J_2 X$ je oblika

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad x'_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2.$$

U proizvoljnoj tački $W(w, 0)$ x_1 -ose je $x'_1 = \alpha w = w_1$, $x'_2 = -\beta w = w_2$, odnosno u tački W vektora vektorskog polja DS je (w_1, w_2) . Dakle,

- za $w_1 > 0, w_2 > 0$ vektor vektorskog polja DS je \nearrow ,
- za $w_1 > 0, w_2 < 0$ vektor vektorskog polja DS je \searrow ,
- za $w_1 < 0, w_2 > 0$ vektor vektorskog polja DS je \nwarrow ,
- za $w_1 < 0, w_2 < 0$ vektor vektorskog polja DS je \swarrow .

Prema tome, za $\beta > 0$ je:

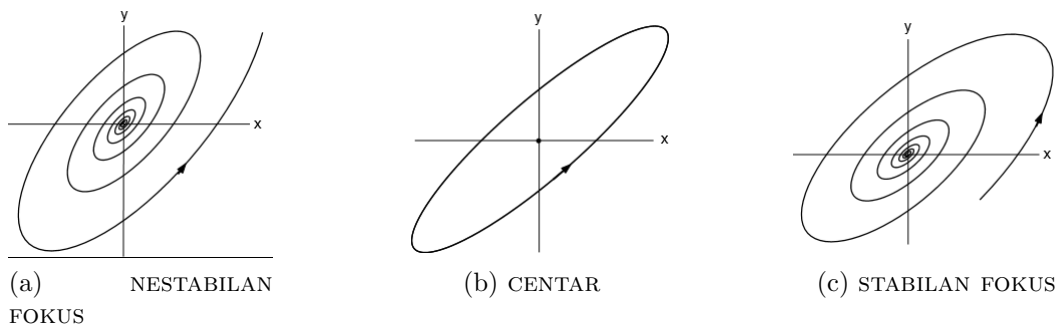
- $w_2 > 0$ za $w < 0$, odnosno u tački W sa negativnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \nearrow (za $\alpha < 0$) ili \nwarrow (za $\alpha > 0$),

- $w_2 < 0$ za $w > 0$, odnosno u tački W sa pozitivnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \swarrow (za $\alpha < 0$) ili \searrow (za $\alpha > 0$),

odakle zaključujemo da će smer kretanja tačke po kružnici biti u smeru kretanja kazaljki na satu (negativna orijentacija). Za $\beta < 0$ je:

- $w_2 < 0$ za $w < 0$, odnosno u tački W sa negativnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \swarrow (za $\alpha > 0$) ili \searrow (za $\alpha < 0$),
- $w_2 > 0$ za $w > 0$, odnosno u tački W sa pozitivnog dela x_1 -ose vektor vektorskog polja DS je \nearrow (za $\alpha > 0$) ili \nwarrow (za $\alpha < 0$),

odakle zaključujemo da će smer kretanja tačke po kružnici biti u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu (pozitivna orijentacija).



Slika 16: Fazni portret DS (2) kada su sopstvene vrednosti matrice konjugovano kompleksne $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$; (a) $\alpha > 0$; (b) $\alpha = 0$; (c) $\alpha < 0$

FAZNI PORTRET DS (2): opšte rešenje DS (2) je

$$\begin{aligned} Y(t) &= c_1 e^{\alpha t} (a \cos \beta t - b \sin \beta t) + c_2 e^{\alpha t} (a \sin \beta t + b \cos \beta t) \\ &= e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) a + e^{\alpha t} (-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t) b \end{aligned}$$

Koordinate vektora $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ u bazi $\{a, b\}$, $a = \text{Re}(v_1)$, $b = \text{Im}(v_1)$ su dakle

$$y_1(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t), \quad y_2(t) = e^{\alpha t} (-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t)$$

što su parametarske jednačine faznih trajektorija sistema $Y' = AY$ u novoj bazi $\{a, b\}$ prostora \mathbb{R}^2 . Dakle,

$$y_1^2(t) + y_2^2(t) = C^2 e^{2\alpha t}, \quad C^2 = c_1^2 + c_2^2,$$

Za $\alpha = 0$, dolazi do "rastezanja" kružnica kao zatvorenih trajektorija oko koordinatnog početka DS $X' = J_2 X$, u pravcu vektora baze $\{a, b\}$ i zatvorene trajektorije DS (2) postaju ellipse sa centrom u $(0, 0)$. Fazni portret je u zavisnosti od α prikazan na Slici 16.

SMER ROTACIJE TRAJEKTORIJA OKO KP. Za matricu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

smer kretanja tačke po zatvorenoj trajektoriji (elipsi) u slučaju centra odnosno smer rotacije spiralne trajektorija prema koordinatnom početku (ili od koordinatnog početka) biće u smeru kazaljki na satu za $b > 0$ (negativna orijentacija) i suprotno kretanja kazaljki na satu za $b < 0$ (pozitivna orijentacija). Prema tome, za matricu A sa sopstvenim vrednostima $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta > 0$ i odgovarajućim sopstvenim vektorima $V_1 = v_1 + iv_2$ i $V_2 = v_1 - iv_2$, ukoliko želimo da očuvamo i smer rotacije tačke po trajektoriji, za $b > 0$ dovodimo je na kanonski oblik

$$X' = J_2 X, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0$$

matricom transformacije $T = (v_1 \ v_2)$, dok za $b < 0$ je dovodimo na kanonski oblik

$$X' = J_2 X, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0$$

matricom transformacije $T = (v_1 \ -v_2)$.

Primer 2.4. Za svaki od sledećih sistema $Y' = A \cdot Y$

$$(a) A = \begin{pmatrix} -3 & 20 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 20 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) Naći sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A .

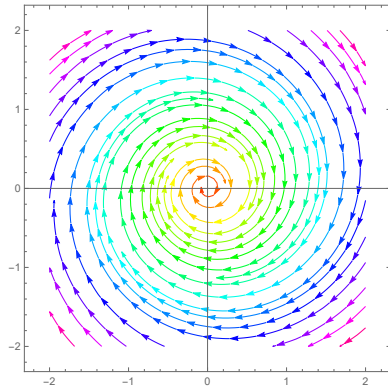
(ii) Naći matricu T koja transformiše matricu A u kanonski oblik i odrediti matricu J kanonskog oblik sistema;

(iii) Skicirati fazni portret za oba sistema $Y' = A \cdot Y$ i $X' = JX$.

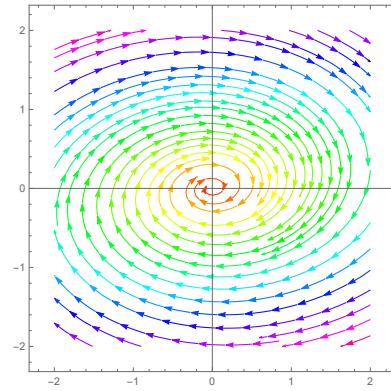
REŠENJE: (A) Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori su:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{199}, \quad v_{1,2} = \frac{1}{10} \left(1 \mp i\sqrt{199}, 1 \right)^T.$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 20 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{\sqrt{199}}{10} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{199} \\ -\sqrt{199} & -2 \end{pmatrix}$$



(a) $X' = JX$



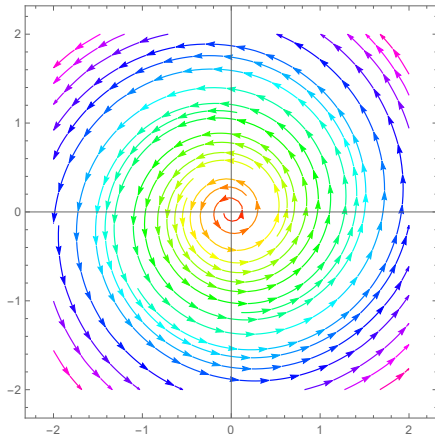
(b) $Y' = AY$

Slika 17: Primer 2.4-(a) : **stabilan fokus** $\alpha = -2 < 0$

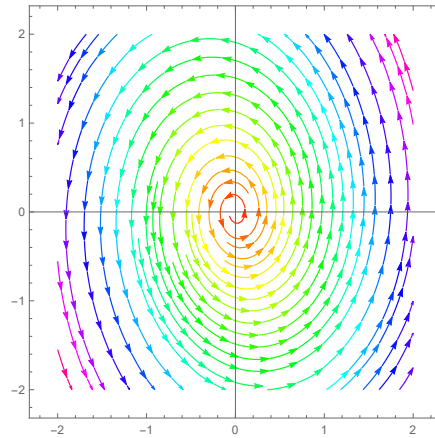
(B) Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori su:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{199}, \quad v_{1,2} = \frac{1}{20} \left(-1 \pm i\sqrt{199}, 1 \right)^T .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 20 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & -\frac{\sqrt{199}}{20} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{199} \\ \sqrt{199} & 2 \end{pmatrix}$$



(a) $X' = JX$



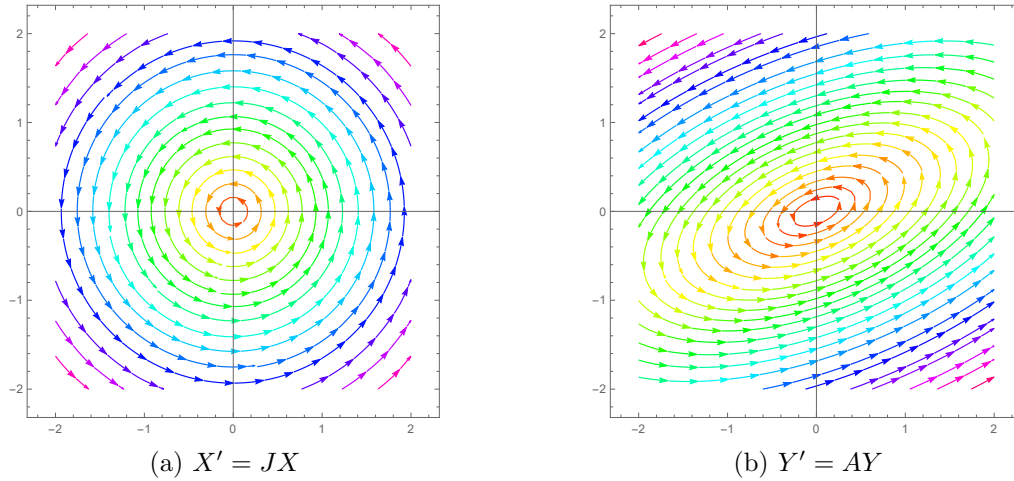
(b) $Y' = AY$

Slika 18: Primer 2.4-(b) : **nestabilan fokus** $\alpha = 2 > 0$

(C) Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori su:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{31}, \quad v_{1,2} = \frac{1}{4} \left(3 \pm i\sqrt{31}, 1 \right)^T .$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{31}}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{31} \\ \sqrt{31} & 0 \end{pmatrix}$$



Slika 19: Primer 2.4-(c) : **centar** $\alpha = 0$

3 Dvostruka realna sopstvena vrednost matrice A : $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

3A Pretpostavimo da sopstvenoj vrednosti λ_1 odgovaraju dva linearno nezavisna sopstvena vektora v_1 i v_2 . Tada matrica kanonskog oblika sistema mora biti oblika

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

a sistem $X' = J_3 X$ ima opšte rešenje

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

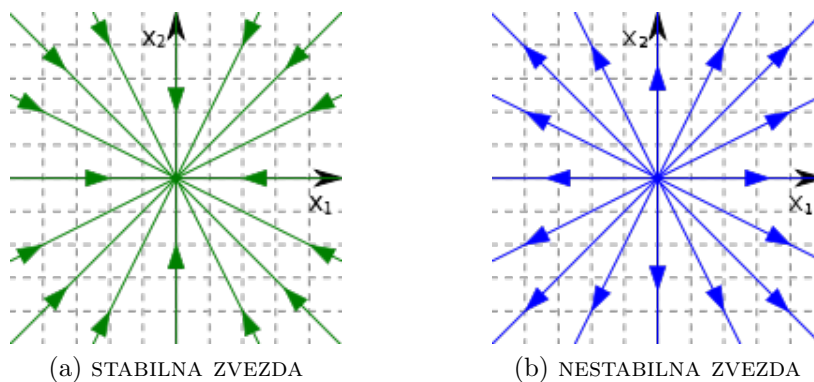
$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Ako je $\lambda_1 = 0$, trajektorije su $x_1 = c_1, x_2 = c_2$, odnosno tačke (c_1, c_2) u \mathbb{R}^2 koje su istovremeno i položaji ravnoteže DS. Prema tome, čitava fazna ravan se sastoji iz (neizolovanih) položaja ravnoteže DS.

Ako je $\lambda_1 \neq 0$, trajektorije su poluprave koje počinju iz koordinatnog početka ili se završavaju u koordinatnom početku, kao i PR $(0, 0)$ za $c_1 = c_2 = 0$.

Za $\lambda_1 < 0$ sledi $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$ kad $t \rightarrow +\infty$, tako da pravolinijske trajektorije se približavaju PR $(0, 0)$ koji se u ovom slučaju naziva **STABILNA ZVEZDA** \sim **stable star** (slika 20-(a)).

Za $\lambda_1 > 0$ pravolinijske trajektorije imaju suprotnu orijentaciju, "izviru" iz koordinatnog početka koji se naziva **NESTABILNA ZVEZDA** \sim **unstable star** (slika 20-(b)).



Slika 20

3B Pretpostavimo da sopstvenoj vrednosti λ_1 odgovara samo jedan sopstveni vektor v_1 , tj. $Av_1 = \lambda_1 v_1$. Za drugi vektor baze v_2 , linearno nezavistan sa v_1 , uzimamo generalisani vektor, koji se dobija iz $(A - \lambda_1 I)v_2 = v_1$, tj. $(A - \lambda_1 I)^2 v_2 = 0$. Tada je matrica $T^{-1}AT$ oblika J_4 . Sistem u kanonskom obliku $X' = J_4 X$ je

$$x_1' = \lambda_1 x_1 + x_2, \quad x_2' = \lambda_1 x_2,$$

čije je opšte rešenje

$$x_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_1 t},$$

odnosno

$$X(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ako je $c_1 = c_2 = 0$, trajektorija je PR $(0, 0)$.

Ako je $\lambda_1 < 0$, za $c_2 = 0$, $c_1 > 0$, trajektorija je poluosa $x_2 = 0, x_1 > 0$, odnosno za $c_2 = 0$, $c_1 < 0$, trajektorija je $x_2 = 0, x_1 < 0$. Pravolinijske trajektorije $c_1 e^{\lambda_1 t} (1, 0)^T$ leže na x_1 -osi i teže ka $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$, pa je x_1 -osa jedini stabilni pravac PR. Ako je $\lambda_1 < 0$, za $c_2 \neq 0$ je

$$x_1(t) \rightarrow 0, \quad x_2(t) \rightarrow 0 \quad \text{kada } t \rightarrow +\infty$$

i

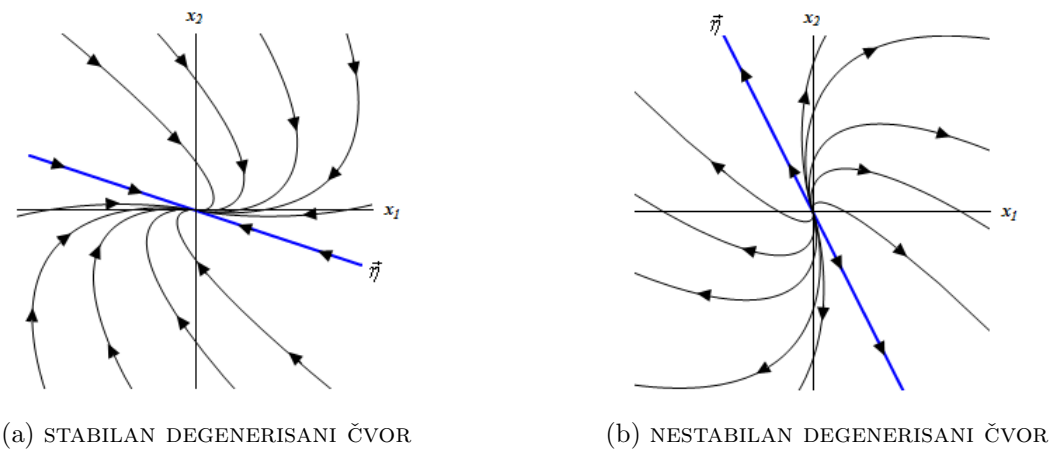
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{c_2 \lambda_1}{(c_1 + c_2 t) \lambda_1 + c_2} \rightarrow 0 \quad \text{kada } t \rightarrow \pm\infty$$

Trajektorije se približavaju koordinatnom početku tangentsno na x_1 -osu (stabilan pravac) kada $t \rightarrow +\infty$, a udaljavaju se od koordinatnog početka paralelno x_1 -osi

kada $t \rightarrow -\infty$. PR $(0, 0)$ je **STABILAN DEGENERISANI ČVOR** \sim *stable degenerative node (degenerative nodal sink)*.

Ako je $\lambda_1 > 0$, analogno se zaključuje da su trajektorije iste kao u prethodnom slučaju, samo su suprotne orijentacije. Trajektorije "izlaze" iz koordinatnog početka tangentno na x_1 -osu (stabilan pravac) i kada $t \rightarrow +\infty$ udaljavaju se od koordinatnog početka paralelno x_1 -osi. PR $(0, 0)$ je **NESTABILAN DEGENERISANI ČVOR** \sim *unstable degenerative node (degenerative nodal sink)*.

Ako je $\lambda_1 = 0$, tada je $x_1(t) = c_1 + c_2 t$, $x_2(t) = c_2$. Za $c_2 \neq 0$ trajektorije su prave paralelne osi x_1 . Za $c_2 = 0$ sve tačke x_1 -ose su (neizolovani) položaji ravnoteže.



Slika 21

Za fazni portret sistema (2), opšte rešenje sistema je

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_1 t} \left[t \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \right],$$

Ako je $\lambda_1 < 0$, pravac određen sopstvenim vektorom v_1 je *stabilan pravac PR* i sadrži pravolinijske trajektorije $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$ koje eksponencijalno opadaju ka PR $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$. Kako su $(y_1(t), y_2(t))$ koordinate vektora $Y(t)$ u bazi $\{v_1, v_2\}$:

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_1 t},$$

dobijamo

$$y_1(t) \rightarrow 0, \quad y_2(t) \rightarrow 0 \quad \text{kad} \quad t \rightarrow +\infty$$

i

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_1 c_1 v_{12} + c_2 (\lambda_1 t + 1) v_{12} + c_2 \lambda_1 v_{22}}{\lambda_1 c_1 v_{11} + c_2 (\lambda_1 t + 1) v_{11} + c_2 \lambda_1 v_{21}} \rightarrow \frac{v_{12}}{v_{11}} \quad \text{kad} \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Dakle, trajektorije se kada $t \rightarrow +\infty$ približavaju koordinatnom početku tangentno na stabilan pravac određen sopstvenim vektorom $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, a udaljavaju se od koordinatnog početka paralelno sa stabilnim pravcem kada $t \rightarrow -\infty$ (slika 21-(a)).

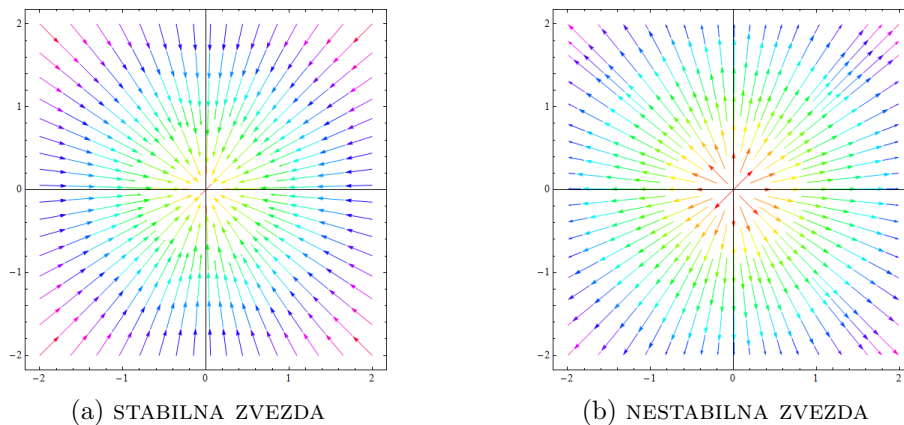
Ako je $\lambda_1 > 0$, pravac određen sopstvenim vektorom $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$ je *nestabilan pravac PR* i sadrži pravolinijske trajektorije koje se udaljavaju od $(0, 0)$ kada $t \rightarrow +\infty$, dok se sve ostale fazne trajektorije "izlaze" iz koordinatnog početka tangentno na pravac određen sopstvenim vektorom v_1 i udaljavaju se od njega paralelno sa nestabilnim pravcem kada $t \rightarrow +\infty$ (slika 21-(b)).

Ako je $\lambda_1 = 0$, tada je $y_1(t) = c_1 + c_2t$, $y_2(t) = c_2$. Za $c_2 \neq 0$ trajektorije su prave paralelne pravoj koja je određena sopstvenim vektorom v_1 . Za $c_2 = 0$ sve tačke te prave su neizolovani PR.

Primer 2.5. Za svaki od sledećih sistema $X' = A \cdot X$ skicirati fazni portret:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad A &= \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & \text{(d)} \quad A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

REŠENJE: **(A i B):** Fazni potreti su prikazani na slici 22-(a) i slici 22-(b).

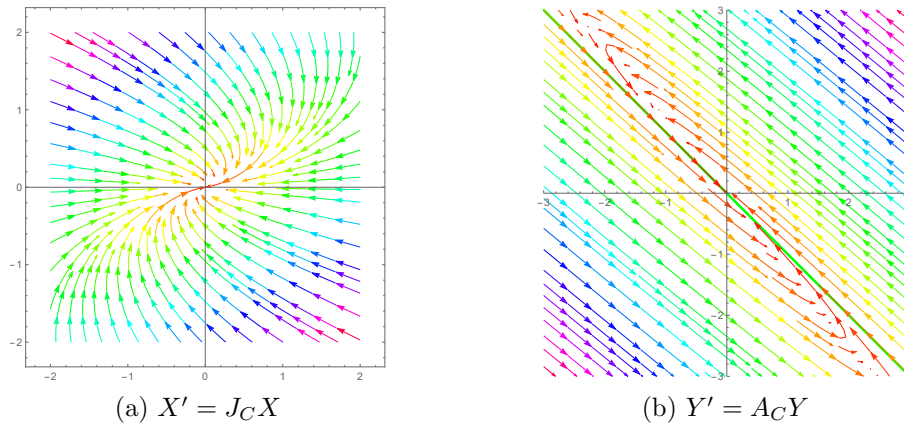


Slika 22: Primer 2.5. (a) i (b)

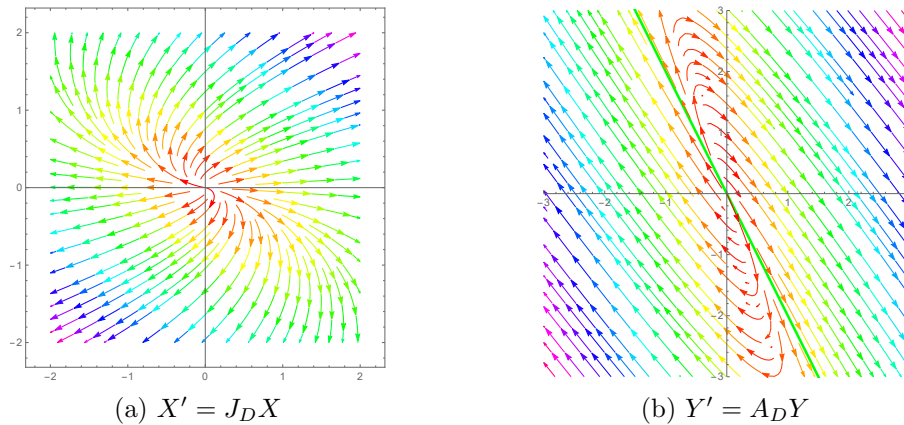
(C): Sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, a sopstveni vektor je $v_1 = (-1, 1)^T$ (*stabilan pravac* je $y_2 = -y_1$). Drugi vektor baze v_2 linearno nezavisan sa sopstvenim vektorom v_1 dobijamo iz $(A+I)v_2 = v_1$, odakle je $v_2 = (1/5, 0)^T$. Matrica transformacije je

$$T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies J_C = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fazni potret DS $X' = J_C X$ prikazan je na slici 23-(a), a fazni potret DS $Y' = A_C Y$ prikazan je na slici 23-(b).



Slika 23: Primeru 2.5-(c) : stabilan degenerisani čvor



Slika 24: Primeru 2.5-(d) : nestabilan degenerisani čvor

(D): Sopstvene vrednosti su $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, a sopstveni vektor je $v_1 = (-1, 2)^T$ (*nestabilan pravac* je $y_2 = -2y_1$). Drugi vektor baze v_2 linearno nezavisan sa sopstvenim vektorom v_1 dobijamo iz $(A - I)v_2 = v_1$, odakle je $v_2 = (-1/2, 0)^T$. Matrica transformacije je

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies J_D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazni potret DS $X' = J_D X$ prikazan je na slici 24-(a), a fazni potret DS $Y' = A_D Y$ prikazan je na slici 24-(b).

Klasifikacija položaja ravnoteže

Za matricu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

karakteristična jednačina je

$$(KJ) \quad \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \iff \lambda^2 - p\lambda + q = 0,$$

gde je $p = \text{tr}A = a + d$ – trag matrice A , a $q = \det A = ad - bc$ – determinatna matrice A . Diskriminanta kvadratne jednačine (KJ) je $\Delta = p^2 - 4q$, a rešenja kvadratne jednačine (KJ) su

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(p \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

Primetimo da je

$$(1) \quad \lambda_+ + \lambda_- = \text{tr}A = p, \quad \lambda_+ \cdot \lambda_- = \det A = q.$$

Klasifikaciju položaja ravnoteže možemo prikazati grafički u pq –koordinatnom sistemu. Matrici A sa tragom p_A i determinantom q_A odgovara tačka sa koordinatama (p_A, q_A) u pq –ravni. Položaj tačke u pq –ravni određuje tip PR.

Pre svega, znak $\Delta = p^2 - 4q$ određuje tip sopstvenih vrednosti:

(1) **Realne i različite sopstvene vrednosti:** $\Delta = p^2 - 4q > 0$. Tip položaja ravnoteže zavisi od znaka sopstvenih vrednosti.

Ako je $q > 0$ sopstvene vrednosti su istog znaka. Obe sopstvene vrednosti su negativne ako je $p < 0$, dok su obe pozitivne ako je $p > 0$. Geometrijsko mesto ovih položaja ravnoteže je ograničeno parabolom $p^2 = 4q$ i pravom $q = 0$.

Ako je $q < 0$ sopstvene vrednosti su različitog znaka, a položaj ravnoteže je sedlo bez obzira na znak traga p . Geometrijsko mesto ovih položaja ravnoteže je ograničeno pravom $q = 0$ i obuhvata celu poluravan određenu sa $q < 0$.

Ako je $q = 0$ imamo sledeće sopstvene vrednosti: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = p$. One odgovaraju neizolovanim čvorovima koji su stabilni kada je $p < 0$, odnosno nestabilni kada je $p > 0$. Geometrijsko mesto ovih položaja ravnoteže je p –osa.

Dakle, ako je $p^2 - 4q > 0$ (izvan parabole):

(1a) *stabilan čvor*, ako je $q > 0$ i $p < 0$;

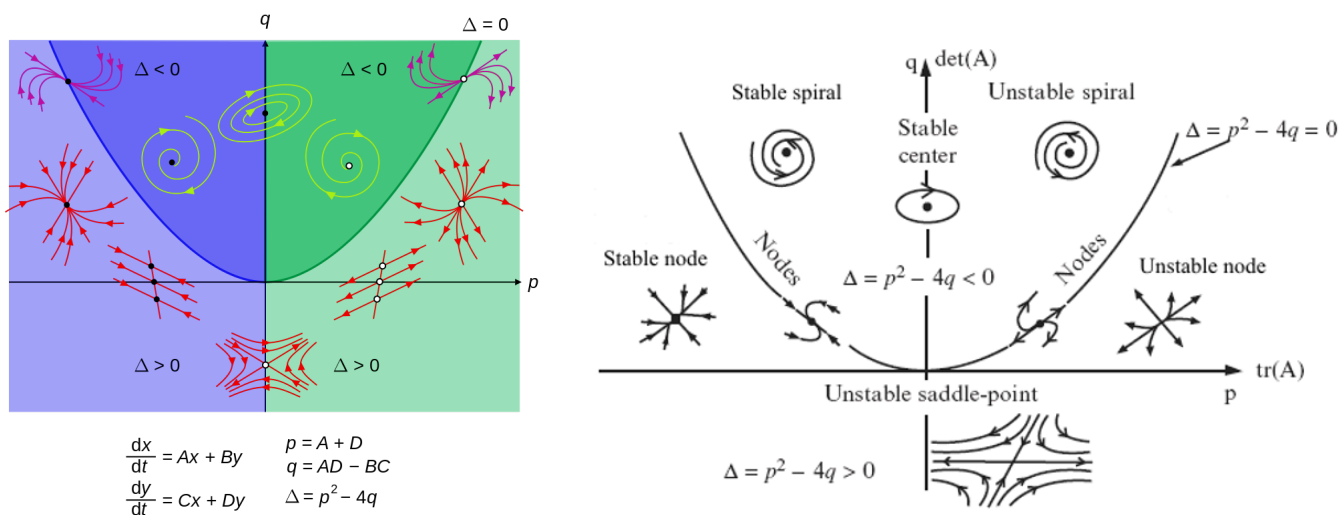
(1b) *nestabilan čvor*, ako je $q > 0$ i $p > 0$;

(1c) *sedlo*, ako je $q < 0$;

(1d) *stabilni neizolovani čvor*, ako je $q = 0, p < 0$;

(1e) *nestabilni neizolovani čvor*, ako je $q = 0, p > 0$.

Geometrijsko mesto prve dve grupe položaja ravnoteže je ograničeno parabolom $p^2 = 4q$ i p -osom, stabilni sa negativnim delom ose i nestabilni sa pozitivnim delom ose. Geometrijsko mesto sedla je poluravan ispod p -ose, a geometrijsko mesto neizolovanih čvorova je p -osa, pozitivan deo ose za stabilne i negativni deo ose za nestabilne neizolovane čvorove.



Slika 25: Klasifikacija položaja ravnoteže u pq -ravni, gde je p trag i q determinanta matrice A

(2) **Konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti:** $\Delta < 0 \Rightarrow p^2 < 4q \Rightarrow q > 0$. Biće u zavisnosti od znaka traga p :

(2a) *stabilan fokus*, ako je $p < 0$;

(2b) *nestabilan fokus*, ako je $p > 0$;

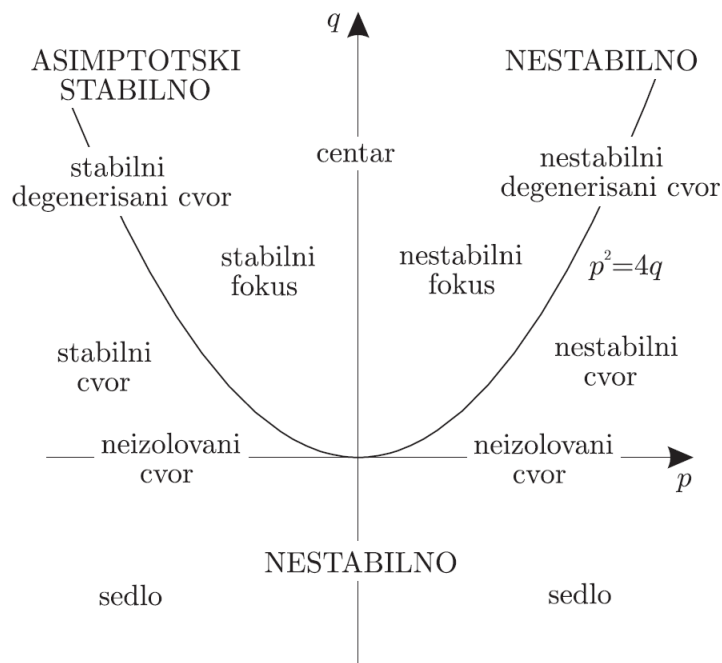
(2c) *centar*, ako je $p = 0$.

Geometrijsko mesto prve dve grupe položaja ravnoteže je ograničeno parabolom $p^2 = 4q$ i pozitivnim delom q -ose, dok je geometrijsko mesto centara poluprava $p = 0, q > 0$, odnosno pozitivna q -osa.

(3) **Realne dvostruke sopstvene vrednosti:** Ako je $\Delta = p^2 - 4q = 0$, matrica A ima dvostruku realnu sopstvenu vrednost λ , tj. $\lambda_- = \lambda_+$. Tip položaja ravnoteže zavisi od znaka λ , odnosno od znaka traga $p = 2\lambda_+$. Biće:

◇ ako postoje dva linearno nezavisna sopstvena vektora:

(3a-1) *stabilna zvezda*, ako je $p < 0$;



Slika 26: Klasifikacija položaja ravnoteže u pq -ravni, gde je p trag i q determinanta matrice A

(3a-2) *nestabilna zvezda*, ako je $p > 0$;

(3a-3) *sve tačke fazne ravni su neizolovani PR*, ako je $p = 0$;

◇ postoji jedinstven sopstveni vektor;

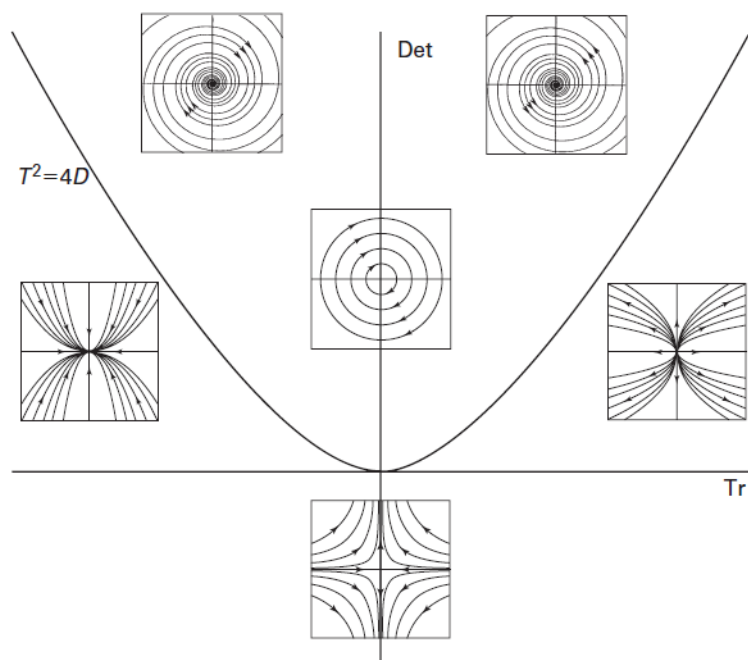
(3b-1) *stabilan degenerisani čvor*, ako je $p < 0$;

(3b-2) *nestabilan degenerisani čvor*, ako je $p > 0$;

(3b-3) *sve tačke prave određene sopstvenim vektorom su neizolovani PR*, ako je $p = 0$;

Geometrijsko mesto ovih položaja ravnoteže je parabola $p^2 = 4q$.

Slika 25 pokazuju da su osnovne vrste položaja ravnoteže: sedlo, čvor i fokus. Centar, zvezda, degenerisani i neizolovani čvor su tkz. granični slučajevi koji se pojavljuju duž krivih u pq -ravni. Degenerisani čvor i zvezda su granični slučajevi između fokusa (spiralnih trajektorija) i čvora, a neizolovani čvor (eng. "saddle-node") je granični slučaj između čvora i sedla.



Slika 27: Svaka sličnost ove slike sa licem čitaoca je sasvim slučajna !!

Klasifikaciju PR možemo izvršiti i posmatrajući znak determinante matrice $q = ad - bc$.

(1) $q < 0$: PR je *sedlo*

(2) $q = 0$: neizolovani PR

(i) ako je $p < 0 \rightarrow$ prava čije su sve tačke PR = *stabilni neizolovani čvorovi*

(ii) ako je $p = 0$

◇ ako postoji jedinstven sopstveni vektor, sve tačke prave određene tim sopstvenim vektorom su neizolovani čvorovi

◇ ako postoji dva linearno nezavisna sopstvena vektora, sve tačke fazne ravni su neizolovani čvorovi

(iii) ako je $p > 0 \rightarrow$ prava čije su sve tačke PR = *nestabilni neizolovani čvorovi*

(3) $q > 0$: izolovani PR

(i) ako je $p < -2\sqrt{q} \rightarrow$ PR je *stabilan čvor*

(ii) ako je $p = -2\sqrt{q}$

- ◇ ako postoje dva linearno nezavisna sopstvena vektora PR je *stabilna zvezda*
- ◇ ako postoji jedinstven sopstveni vektor PR je *stabilana degenerisani čvor*
- (iii) ako je $-2\sqrt{q} < p < 0 \rightarrow$ PR je *stabilan fokus*
- (iv) ako je $p = 0 \rightarrow$ PR je *centar*
- (v) ako je $0 < p < 2\sqrt{q} \rightarrow$ PR je *nestabilan fokus*
- (vi) ako je $p = 2\sqrt{q}$
 - ◇ ako postoje dva linearno nezavisna sopstvena vektora PR je *nestabilna zvezda*
 - ◇ ako postoji jedinstven sopstveni vektor PR je *nestabilan degenerisani čvor*
- (vii) ako je $p > 2\sqrt{q} \rightarrow$ PR je *nestabilan čvor*

Topološka ekvivalentnost linearnih DS u ravni

Posmatrajmo linearne DS sa konstantnim koeficijentima

$$(7) \quad x' = Ax, \quad A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

$$(8) \quad x' = Bx, \quad B = [b_{ij}]_{n \times n}$$

Definicija 1 Neka su $\varphi^t : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ i $\psi^t : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ tokovi DS

$$(9) \quad \begin{aligned} x' &= f(x), & f : \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ y' &= g(y), & g : \mathbb{Y} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad \mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n.$$

Za DS (9) kažemo da su TOPOLOŠKI EKVIVALENTNI ako postoji homeomorfizam $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ (neprekidno, bijektivno preslikavanje, čiji je inverz neprekidan) i neprekidno preslikavanje $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, za koje je $t \mapsto \tau(t, x)$ strogo rastuća bijekcija, tako da za svako $t \in \mathbb{R}$ i svako $x \in \mathbb{X}$ važi

$$(10) \quad h(\varphi^t(x)) = \psi^{\tau(t,x)}(h(x)).$$

Ako homeomorfizam h preslikava fazne trajektorije jednog sistema u fazne trajektorije drugog sistema, pri čemu se čuva orijentacija trajektorija (ako je tok φ^t usmeren od x_1 do x_2 iz \mathbb{X} , tada je tok ψ^t usmeren od $h(x_1)$ do $h(x_2)$ iz \mathbb{Y}), za DS kažemo da su topološki ekvivalentni.

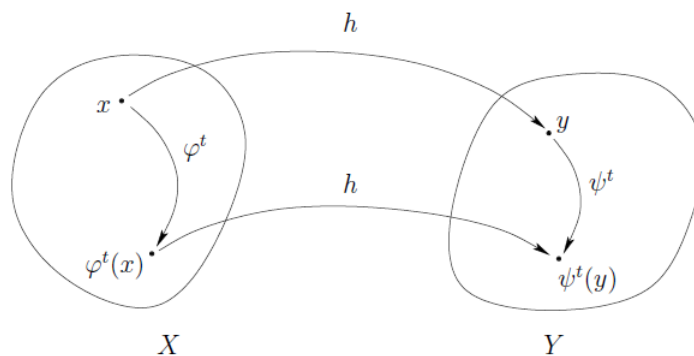
Za DS (9) kažemo da su TOPOLOŠKI C^k -EKVIVALENTNI, $k \geq 1$ ako postoji C^k -difeomorfizam (k -puta neprekidno-diferencijabilno, bijektivno preslikavanje, čiji je inverz k -puta neprekidno-diferencijabilan) $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ za koji važi (10).

Ako je specijalno $\tau(t, x) = t$ za svako $t \in \mathbb{R}$ i svako $x \in \mathbb{X}$, DS (9) su TOPOLOŠKI KONJUGOVANI. Dakle, DS (9) su TOPOLOŠKI KONJUGOVANI ako postoji homeomorfizam $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tako da važi

$$(11) \quad h(\varphi^t(x_0)) = \psi^t(h(x_0)), \quad x_0 \in \mathbb{X}.$$

Ako homeomorfizam h preslikava fazne trajektorije jednog DS u fazne trajektorije drugog DS, pri čemu se čuva orijentacija trajektorija, ali i vremenska parametrizacija duž trajektorija, za DS kažemo da su topološki konjugovani.

Za DS (9) kažemo da su TOPOLOŠKI \mathcal{C}^k -KONJUGOVANI, $k \geq 1$ ako postoji \mathcal{C}^k -difeomorfizam $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ koji preslikava fazne trajektorije jednog sistema u fazne trajektorije drugog sistema, pri čemu se čuva orijentacija trajektorija, odnosno za koji važi (11).



Slika 28: Topološki konjugovani DS $h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x))$

Teorema 1 Neka su matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ i $k \geq 1$. Linearni DS (7) i (8) su topološki \mathcal{C}^k -konjugovani ako i samo ako su matrice A i B slične tj. postoji nesingularna matrica $T = [t_{ij}]_{n \times n}$ tako da je $A = T^{-1}BT$.

DOKAZ. Neka su $\varphi^t = e^{At}$, $\psi^t = e^{Bt}$ tokovi linearnih DS (7) i (8).

(\Leftarrow .) Neka su matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ slične tj. postoji nesingularna matrica T tako da je $A = T^{-1}BT$. Preslikavanje $h(x) = Tx$ je \mathcal{C}^k -difeomorfizam i važi

$$h(\varphi^t(x)) = Te^{At}x = Te^{T^{-1}BTt}x = TT^{-1}e^{Bt}Tx = e^{Bt}Tx = e^{Bt}h(x) = \psi^t(h(x)),$$

odakle sledi da su tokovi φ^t , ψ^t linearnih DS (7) i (8) topološki \mathcal{C}^k -konjugovani.

(\Rightarrow .) Neka postoji \mathcal{C}^k -difeomorfizam g tako da je $g(\varphi^t(x)) = \psi^t(g(x))$. Neka je $g(\mathbf{0}) = Y$, tada je

$$\psi^t(Y) = \psi^t(g(\mathbf{0})) = g(\varphi^t(\mathbf{0})) = g(e^{At}\mathbf{0}) = g(\mathbf{0}) = Y$$

pa je Y PR toka ψ^t DS (8). Definišimo $h(x) = g(x) - Y$. Tada je

$$(12) \quad h(\varphi^t(x)) = g(\varphi^t(x)) - Y = \psi^t(g(x)) - Y = \psi^t(h(x) + Y) - Y = \psi^t(h(x)).$$

Dakle, h je \mathcal{C}^k -difeomorfizam tokova φ^t, ψ^t koji preslikava PR $\mathbf{0}$ DS (7) u PR $\mathbf{0}$ DS (8). Definišimo matricu

$$T = Dh(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{0}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\mathbf{0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Matrica T je invertibilna jer je h difeomorfizam. Diferenciranjem (12) po x imamo

$$Dh(e^{At}x)e^{At} = e^{Bt}Dh(x)$$

i zamenom $x = \mathbf{0}$ se dobija $Te^{At} = e^{Bt}T$. Diferenciranjem po t dobijene jednakosti, imamo $TAe^{At} = Be^{Bt}T$ i zamenom $t = 0$ dobija se $TA = BT$, tj. matrice A i B su slične. \square

Slično se može pokazati i sledeća teorema o topološkoj \mathcal{C}^k -ekvivalentnosti linearnih DS.

Teorema 2 *Neka su matrice $A = (a_{ij})_{n \times n}$ i $B = (b_{ij})_{n \times n}$ i $k \geq 1$. Linearni DS (7) i (8) su topološki \mathcal{C}^k -ekvivalentni ako i samo ako postoji $\alpha > 0$ i nesingularna matrica $T = (t_{ij})_{n \times n}$ tako da je $A = \alpha T^{-1}BT$.*

DOKAZ. Neka su $\varphi^t = e^{At}$, $\psi^t = e^{Bt}$ tokovi linearnih DS (7) i (8).

(\Leftarrow): Postoji $\alpha > 0$ i nesingularna matrica $T = (t_{ij})_{n \times n}$ tako da je $A = \alpha T^{-1}BT$. Preslikavanje $h(x) = Tx$ je \mathcal{C}^k -difeomorfizam i važi

$$\begin{aligned} h(\varphi^t(x)) &= Te^{At}x = Te^{\alpha T^{-1}BTt}x = TT^{-1}e^{\alpha Bt}Tx \\ &= e^{B\alpha t}Tx = e^{B\tau(t,x)}h(x) = \psi^{\tau(t,x)}(h(x)), \end{aligned}$$

odakle sledi da su linearni DS (7) i (8) topološki \mathcal{C}^k -ekvivalentni.

(\Rightarrow): Neka postoji \mathcal{C}^k -difeomorfizam h i neprekidno preslikavanje $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, za koje je $t \mapsto \tau(t, x)$ strogo rastuća bijekcija, tako da je

$$(13) \quad h(\varphi^t(x)) = \psi^{\tau(t,x)}(h(x)) \quad \Rightarrow \quad h(e^{At}x) = e^{B\tau(t,x)}h(x).$$

Bez gubitka opštosti pretpostavimo da je $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Diferenciranjem (13) po x imamo i zamenom $x = \mathbf{0}$ se dobija

$$Dh(\mathbf{0})e^{At} = e^{B\tau(t,\mathbf{0})}Dh(\mathbf{0}).$$

Diferenciranjem po t dobijene jednakosti i zamenom $t = 0$ dobija se

$$Dh(\mathbf{0})A = \tau'_t(0, \mathbf{0}) B Dh(\mathbf{0}).$$

Definišimo matricu $T = Dh(\mathbf{0})$ koja je invertibilna, jer je h difeomorfizam i neka je $\alpha = \tau'_t(0, \mathbf{0})$. Tada je $A = \alpha T^{-1} B T$. \square

Matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

nisu ni topološki \mathcal{C}^k -konjugovane, niti su topološki \mathcal{C}^k -ekvivalentne za $k \geq 1$. Medjutim, obe matrice odredjuju stabilan čvor - matrica A stabilnu zvezdu i matrica B stabilan čvor. Sa stanovišta faznog portreta odgovarajućih dinamičkih sistema, kako je ponašanje trajektorije u okolini stabilnog čvora i stabilne zvezve kvalitativno slično, zapravo bi bilo prirodno da one pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Zato se uobičajeno posmatra topološka konjugovanosti i topološka ekvivalentnost DS.

Primer 2.6. (Topološka konjugovanost zvezde i nedegenerisanog čvora): Posmatrajmo DS (7) i (8) gde je

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrice A i B nisu slične, pa prema Teoremi 1. odgovarajući DS nisu topološki \mathcal{C}^k -konjugovani, $k \geq 1$. Ali oni jesu topološki konjugovani. Da bi odredili preslikavanje $y = h(x) = (h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2))$ za koje važi (11), odredimo najpre tokove posmatranih DS

$$\varphi^t(x_1, x_2) = (e^{-2t}x_1, e^{-2t}x_2), \quad \psi^t(y_1, y_2) = (e^{-2t}(y_1 + ty_2), e^{-2t}y_2)$$

Iz $h(\varphi^t(x_1, x_2)) = \psi^t(y_1, y_2)$ imamo da je

$$h_2(e^{-2t}x_1, e^{-2t}x_2) = e^{-2t}y_2 = e^{-2t}h_2(x_1, x_2).$$

Rešenje ove funkcionalne jednačine je $h_2(x_1, x_2) = x_2$. Takodje iz

$$h_1(e^{-2t}x_1, e^{-2t}x_2) = e^{-2t}(y_1 + ty_2) = e^{-2t}(h_1(x_1, x_2) + tx_2)$$

Da bi rešili ovu funkcionalnu jednačinu, uvedimo smenu $h_1(x_1, x_2) = x_1 + f(x_2)$ i dobijamo

$$\begin{aligned} f(e^{-2t}x_2) &= h_1(e^{-2t}x_1, e^{-2t}x_2) - e^{-2t}x_1 = e^{-2t}(h_1(x_1, x_2) + tx_2 - x_1) \\ &= e^{-2t}(f(x_2) + tx_2), \end{aligned}$$

čije je rešenje $f(x) = -\frac{x}{2} \ln |x|$. Ako dodefinišemo $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, f je neprekidno u $\mathbf{0}$. Dakle, preslikavanje

$$(y_1, y_2) = h(x_1, h_2) = \left(x_1 - \frac{x_2}{2} \ln |x_2|, x_2 \right)$$

je homeomorfizam posmatranih DS za koji važi (11), tako da su oni topološki konjugovani. Ali kako h nije diferencijabilno u $\mathbf{0}$, DS nisu topološki \mathcal{C}^1 -konjugovani u okolini $\mathbf{0}$.

Definicija 2 Matrica $A = (a_{ij})_{n \times n}$ je **hiperbolična** ako je realni deo svake njene sopstvene vrednosti različit od nule. Ako je realni deo neke sopstvene vrednosti matrice A jednak nuli, matrica se naziva **nehiperbolična**.

Položaj ravnoteže $(0, 0)$ DS (2) je hiperbolični (nehiperbolični), ako je matrica A tog DS hiperbolična (nehiperbolična).

Naredna teorema daje klasifikaciju topološki konjugovanih hiperboličkih linearnih DS u ravni.

Teorema 3 *Neka su matrice $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ i $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$ hiperbolične. Tada su linearni DS (7) i (8) topološki konjugovani i istovremeno i topološki ekvivalentni ako i samo ako matrice A i B imaju jednak broj sopstvenih vrednosti sa negativnim realnim delom (dakle i jednak broj sopstvenih vrednosti sa pozitivnim realnim delom).*

Posledica 1 *Neka je matrica $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ hiperbolična. Tada je linearni DS (7) topološki konjugovan tačno jednom od sledećih linearnih DS čija je matrica:*



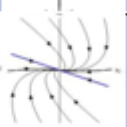




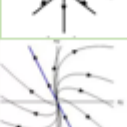

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dve negativne sopstvene vrednosti} = \text{hyperbolic sink};$$

stabilan čvor, stabilna zvezda, stabilan degenerisani čvor, stabilan fokus;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dve pozitivne sopstvene vrednosti} = \text{hyperbolic source};$$

nestabilan čvor, nestabilna zvezda, nestabilan degenerisani čvor, nestabilan fokus;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dve sopstvene vrednosti različitog znaka} = \text{hyperbolic saddle}.$$

(n_+, n_-)	Sopstvene vrednosti	Fazni portret	Tip PR
(0,2)	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 < \mu_2 < 0$		Stabilan čvor
	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 = \mu_2 < 0$		Stabilna zvezda
			Stabilan degenerisani čvor
	$\mu_{1,2} \in \mathbb{C}, \text{Re}(\mu_{1,2}) < 0$		Stabilan fokus
(1,1)	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 < 0 < \mu_2$		Sedlo
(2,0)	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 > \mu_2 > 0$		Nestabilan čvor
	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 = \mu_2 > 0$		Nestabilna zvezda
			Nestabilan degenerisani čvor
	$\mu_{1,2} \in \mathbb{C}, \text{Re}(\mu_{1,2}) > 0$		Nestabilan fokus

Slika 29: Topološki konjugovane klase hiperboličkih PR DS u ravni, gde je n_+ , n_- broj sopstvenih vrednosti sa pozitivnim, negativnim realnim delom

Primer 2.6. (Topološka ekvivalentnost zvezde i fokusa): Posmatrajmo DS

$$(1) \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - y \end{cases}$$

PR $(0, 0)$ je stabilna zvezda DS (1), odnosno stabilan fokus DS (2). Trajektorije DS (1) su pravolinijske, dok su trajektorije DS (2) spiralne. Sopstvene vrednosti DS (1) su $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, a DS (2) su $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

Prelaskom na polarne koordinate

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = r(t), \quad \theta = \theta(t),$$

kako je $x^2 + y^2 = r^2$ i $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, imamo

$$(14) \quad xx' + yy' = rr', \quad \theta' = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{xy' - yx'}{r^2},$$

odakle se dobija da su posmatrani DS oblika

$$(1^*) \begin{cases} \rho' = -\rho \\ \theta' = 0 \end{cases} \quad (2^*) \begin{cases} \rho' = -\rho \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

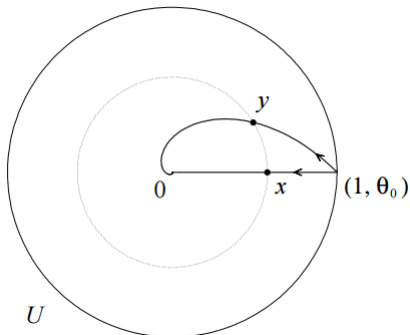
čija su rešenja

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{-t} \\ \theta = \theta_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{-t} \\ \theta = t + \theta_0 \end{cases}$$

DS (1) i (2) nisu topološki glatko ekvivalentni, ali jesu topološki ekvivalentna npr. unutar jedinične kružnice za centrom u koordinatnom početku

$$U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(\rho, \theta) : \rho \leq 1\}.$$

Dokažimo ovo tako što ćemo konstruisati na odgovarajući način homeomorfizam $h : U \rightarrow U$.



Slika 30: Konstrukcija homeomorfizma za topološku ekvivalentnost zvezde i fokusa

Posmatrajmo tačku $X \neq 0$, $X \in U$ sa polarnim koordinatama (ρ_0, θ_0) . Neka je τ vreme koje je potrebno tački $(1, \theta_0)$ sa ruba oblasti U da stigne do tačke X krećući se duž trajektorije DS (1). To vreme zavisi samo od ρ_0 i jednako je $\theta(\rho_0) = -\ln \rho_0$. Posmatrajmo dalje trajektoriju DS (2) koja polazi iz tačke $(1, \theta_0)$ i neka je $Y = (\rho_1, \theta_1)$ tačka te trajektorije u koju nakon vremena $\tau(\rho_0)$ stigne tačka $(1, \theta_0)$. Dakle, preslikavanje $h(X) = Y$, $X = (\rho_0, \theta_0) \mapsto Y = (\rho_1, \theta_1)$ je definisano sa

$$h : \begin{cases} \rho_1 = \rho_0 \\ \theta_1 = \theta_0 - \ln \rho_0 \end{cases}$$

Za $X = (0, 0)$ je $h(X) = (0, 0)$. Konstruisano preslikavanje predstavlja transformaciju kruga U u samog sebe koja ma koju kružnicu $\rho_0 = R$ rotira za ugao koji zavisi od ρ_0 . Taj ugao je nula za $\rho_0 = 1$. Preslikavanje je očigledno neprekidno, i invertibilno i preslikava trajektorije DS (1) u trajektorije DS (2), čuvajući vremensku orijentaciju. Dakle, dva DS su topološki ekvivalentna.

S druge strane, homeomorfizam h nije diferencijabilan na U . Naime, $h \in C^1(U \setminus \{0\})$, ali h nije diferencijabilno za $X = 0$. Da bi ovo pokazali odredimo

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(0, 0) & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}(0, 0) \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(0, 0) & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}(0, 0) \end{pmatrix}$$

Kako je $x_1 = \rho_0 \cos \theta_0$ i $x_2 = \rho_0 \sin \theta_0$ imamo

$$y_1 = \rho_1 \cos \theta_1 = \rho_0 \cos(\theta_0 - \ln \rho_0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \left(\arctg \frac{x_2}{x_1} - \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

$$y_2 = \rho_1 \sin \theta_1 = \rho_0 \sin(\theta_0 - \ln \rho_0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \left(\arctg \frac{x_2}{x_1} - \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Prema tome,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{y_1(x_1, 0) - y_1(0, 0)}{x_1 - 0} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{|x_1| \cos(\ln |x_1|) - 0}{x_1}$$

Kako poslednja granična vrednost ne postoji, zaključujemo da preslikavanje h nije diferencijabilno u $(0, 0)$, odnosno da DS (1) i (2) nisu topološki glatko ekvivalentni.

U narednoj teoremi dajemo topološku klasifikaciju nehiperboličkih linearnih DS u ravni.

Teorema 4 *Neka je matrica $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ nehiperbolična (ima bar jednu sopstvenu vrednost čiji je realni deo 0). Tada je linearni DS (7) topološki ekvivalentan tačno jednom od sledećih linearnih DS čija je matrica:*

Matrica sistema	Sopstvene vrednosti	Fazni portret
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 = \mu_2 = 0$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 > 0 = \mu_2$	
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 < 0 = \mu_2$	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_1 = 0 = \mu_2$	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\mu_{1,2} \in \mathbb{C}, \mu_{1,2} = \pm \beta i$	

Slika 31: Topološki ekvivalentne klase nehiperboličkih PR DS u ravni

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *nula matrica;*
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *jedna sopstvena vrednost nula i druga pozitivna;*
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *jedna sopstvena vrednost nula i druga negativna;*
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *dve sopstvene vrednosti jednake nuli i jedan sopstveni vektor;*
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *par čisto imaginarnih sopstvenih vrednosti $\pm i\beta$.*