

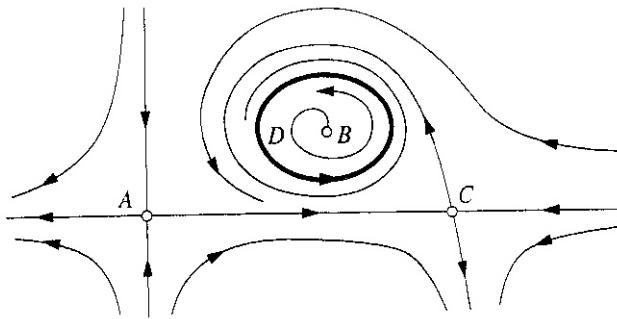
### 3. Fazni portret dvodimenzionalnog nelinearnog DS

NELINEARAN SISTEMA DJ:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

gde je  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Za nelinearan sistem, najčešće je nemoguće odrediti analitički oblik rešenja, tako da je kvalitativna analiza nelinearnih sistema DJ od posebnog značaja. Cilj je odrediti fazni portret sistema na osnovu svojstava funkcija  $f(x, y)$  i  $g(x, y)$ .



Slika 1: Fazni portret nelinearnog sistema DJ.

Fazna trajektorija dinamičkog sistema (1) može biti:

- \* **položaj ravnoteže** - tačke  $A$ ,  $B$  i  $C$  na Slici 1.
- \* **glatka kriva bez samopreseka**
- \* **zatvorena glatka kriva** ( kriva  $D$  na Slici 1.) kojoj odgovaraju periodična rešenja, tj. rešenja za koja važi  $X(t + T) = X(t)$  za svako  $t$  i neko  $T > 0$

Da bi odredili fazni portret DS neophodno je:

- ✓ odrediti položaje ravnoteže;
- ✓ ispitati ponašanje trajektorija u okolini položaje ravnoteže i stabilnost tih PR (npr. PR  $A$ ,  $B$  i  $C$  na Slici 1. su *nestabilni*);
- ✓ ispitati egzistenciju izolovanih zatvorenih trajektorija (graničnog cikla);
- ✓ ispitati stabilnost graničnog cikla (zatvorena kriva  $D$  je *stabilna* - trajektorije i sa unutrašnje i sa spoljašnje strane se spiralno približavaju krivoj  $D$ );
- ✓ skicirati fazni portret određivanjem vektorskog polja i trajektorija sa naznačenim pravcima.

## Topološka ekvivalentnost i konjugovanost nelinearnih DS

**Definicija 1** Neka su  $\varphi^t : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  i  $\psi^t : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  tokovi DS

$$(2) \quad \begin{aligned} (i) \quad & x' = f(x), \quad f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (ii) \quad & y' = g(y), \quad g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad \mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n.$$

Za DS (2) kažemo da su TOPOLOŠKI EKVIVALENTNI ako postoji homeomorfizam  $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  (neprekidno, bijektivno preslikavanje, čiji je inverz neprekidan) i neprekidno preslikavanje  $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , za koje je  $t \mapsto \tau(t, x)$  strogo rastuća bijekcija, tako da za svako  $t \in \mathbb{R}$  i svako  $x \in \mathbb{X}$  važi

$$(3) \quad h(\varphi^t(x)) = \psi^{\tau(t,x)}(h(x)).$$

Ako homeomorfizam  $h$  preslikava fazne trajektorije jednog sistema u fazne trajektorije drugog sistema, pri čemu se čuva orijentacija trajektorija (ako je tok  $\varphi^t$  usmeren od  $x_1$  do  $x_2$  iz  $\mathbb{X}$ , tada je tok  $\psi^t$  usmeren od  $h(x_1)$  do  $h(x_2)$  iz  $\mathbb{Y}$ ), za DS kažemo da su topološki ekvivalentni.

Za DS (2) kažemo da su TOPOLOŠKI  $C^k$ -EKVIVALENTNI,  $k \geq 1$  ako postoji  $C^k$ -difeomorfizam  $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  ( $k$ -puta neprekidno-diferencijabilno, bijektivno preslikavanje, čiji je inverz  $k$ -puta neprekidno-diferencijabilan) za koji važi (3).

Ako je specijalno  $\tau(t, x) = t$  za svako  $t \in \mathbb{R}$  i svako  $x \in \mathbb{X}$ , DS (2) su TOPOLOŠKI KONJUGOVANI. Dakle, DS (2) su TOPOLOŠKI KONJUGOVANI ako postoji homeomorfizam  $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  tako da važi

$$(4) \quad h(\varphi^t(x)) = \psi^t(h(x)), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Ako homeomorfizam  $h$  preslikava fazne trajektorije jednog DS u fazne trajektorije drugog DS, pri čemu se čuva orijentacija trajektorija, ali i vremenska parametrizacija duž trajektorija, za DS kažemo da su topološki konjugovani.

Za DS (2) kažemo da su TOPOLOŠKI  $C^k$ -KONJUGOVANI,  $k \geq 1$  ako postoji  $C^k$ -difeomorfizam  $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$  ( $k$ -puta neprekidno-diferencijabilno, bijektivno preslikavanje, čiji je inverz  $k$ -puta neprekidno-diferencijabilan) za koji važi (4).

$$\begin{aligned} h \circ \varphi^t &= \psi^t \circ h \Rightarrow \varphi^t = h^{-1} \circ \psi^t \circ h \\ x_0 &\xrightarrow{\varphi^t} \varphi^t(x_0) \\ h \downarrow &\qquad\qquad\qquad \downarrow h \\ y_0 &\xrightarrow{\psi^t} \psi^t(y_0) \end{aligned}$$

DIJAGRAM TOPOLOŠKE KONJUGOVANOSTI DS

**Lema 1** *Položaj ravnoteže DS preslikava se u položaj ravnoteže njemu topološki konjugovanog DS.*

DOKAZ. Ako su DS (2) topološki konjugovani,  $h$  odgovarajući homeomorfizam za koji važi (4) i ako je  $x^*$  PR DS (2)-(i), a  $y^* = h(x^*)$ , pokazaćemo da je  $y^*$  PR DS (2)-(ii). Naime, ako je  $\varphi^t$  tok DS (2)-(i),  $\psi^t$  tok DS (2)-(ii), tada kako je  $\varphi^t(x^*) = x^*$  za svako  $t$ , biće

$$\psi^t(y^*) = \psi^t(h(x^*)) = h(\varphi^t(x^*)) = h(x^*) = y^*. \quad \square$$

**Lema 2** *Periodične trajektorije DS preslikavaju se u periodične trajektorije njemu topološki konjugovanog DS, pri čemu su periodi tih trajektorija jednaki.*

DOKAZ. Neka su DS (2) topološki konjugovani i  $h$  odgovarajući homeomorfizam za koji važi (4). Neka je  $x_0 \in \mathbb{X}$ ,  $h(x_0) = y_0$  i  $\varphi^t(x_0)$  periodična trajektorija DS (2)-(i) sa periodom  $T$ , tj.  $\varphi^t(x_0) = \varphi^{t+T}(x_0)$ . Pokažimo da je trajektorija DS (2)-(ii) koja polazi iz  $y_0 = h(x_0)$  takođe periodična trajektorija sa periodom  $T$ , tj. da je  $\psi^t(y_0) = \psi^{t+T}(y_0)$ . Zaista,

$$\psi^t(y_0) = \psi^t(h(x_0)) = h(\varphi^t(x_0)) = h(\varphi^{t+T}(x_0)) = \psi^{t+T}(y_0). \quad \square$$

Treba napomenuti da periodi periodičnih trajektorija topološki ekvivalentnih DS **ne moraju biti jednaki**.

### Linearizacija nelinearnog DS - I deo

Neka su funkcije  $f, g \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$  i neka u dovoljno maloj okolini položaja ravnoteže  $(x_0, y_0)$  nema drugih položaja ravnoteže sistema (1). Razvojem funkcija  $f(x, y)$  i  $g(x, y)$  u Tejlorov red oko tačke  $(x_0, y_0)$  do prvog izvoda imamo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + R_1(x, y), \\ g(x, y) &= g'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + g'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + R_2(x, y), \end{aligned}$$

jer je  $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ . Kako su  $R_1(x, y) = O(r^2)$ ,  $R_2(x, y) = O(r^2)$ , gde je  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  imamo

$$\frac{R_i(x, y)}{r} \rightarrow 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{kada } r \rightarrow 0.$$

Odbacivanjem nelinearnih članova dobija se linearan sistema DJ sa konstantnim koeficijentima:

$$\begin{aligned} x' &= f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = F(x, y) \\ y' &= g'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + g'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = G(x, y). \end{aligned}$$

Smenom  $X = x - x_0$ ,  $Y = y - y_0$ , položaja ravnoteže  $(x_0, y_0)$  transliramo u koordinatni početak  $(0, 0)$ , pa možemo posmatrati linearan DS sa konstantnim koeficijentima

$$(5) \quad \begin{aligned} x' &= f'_x(x_0, y_0) \cdot x + f'_y(x_0, y_0) \cdot y \\ y' &= g'_x(x_0, y_0) \cdot x + g'_y(x_0, y_0) \cdot y. \end{aligned}$$

Sistem (5) se naziva **linearizovan sistem** odgovarajući položaju ravnoteže  $(x_0, y_0)$  nelinearnog sistema (1). Matrica linearizovanog sistema je

$$(6) \quad J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

i naziva se **JAKOBIJEVA MATRICA POLOŽAJA RAVNOTEŽE**  $(x_0, y_0)$  nelinearnog DS (1).

**PITANJE:** Da li linearizovan sistem daje kvalitativno korektnu sliku faznog portreta u okolini položaja ravnoteže, odnosno da li su fazni portreti ta dva DS topološki ekvivalentni ili topološki konjugovani u okolini položaja ravnoteže?

U opštem slučaju da li linearizovan sistem

$$(7) \quad X' = AX, \quad X \in \mathbb{R}^n$$

gde je

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*) = DF(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

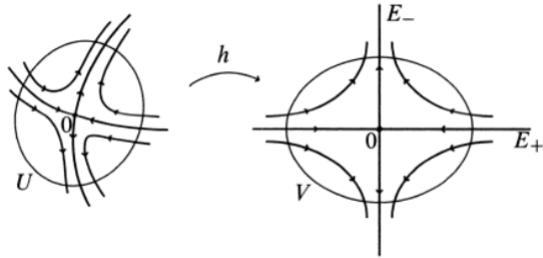
daje kvalitativno korektnu sliku faznog portreta nelinearnog DS

$$(8) \quad x' = F(x), \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n,$$

u okolini PR  $x^*$ ?

Odgovor na prethodno postavljeno pitanje daje **Hartman-Grobmanova teorema**, koja predstavlja jedan od najznačnijih rezultata u kvalitativnoj analizi nelinearnih DS i daje uslove pod kojima je lokalni fazni portret nelinearnog DS u okolini hiperboličnih položaja ravnoteže topološki konjugovan faznom portretu linearizovanog sistema.

**Definicija 2** Položaj ravnoteže  $x^*$  nelinearnog DS (8) naziva se **hiperbolički** ako je realni deo svake sopstvene vrednosti Jakobijevе matrice  $J(x^*) = Df(x^*)$  različit od nule. Ako je realni deo neke sopstvene vrednosti Jakobijevе matrice  $J(x^*)$  jednak nuli, položaj ravnoteže  $x^*$  nelinearnog DS (8) se naziva **nehiperbolički**.



Slika 2: Hartman-Grobmanova teorema

**Teorema 1 [Hartman-Grobmanova teorema]** Neka je  $E$  otvoren podskup od  $\mathbb{R}^n$ , takav da  $x^* \in E$ ,  $F \in C^1(E)$ ,  $F(x^*) = 0$  i neka je  $\Phi^t$  tok DS (8). Neka je  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  hiperbolički položaj ravnoteže linearizovanog DS (7). Tada postoji okoline  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x^* \in U$ ,  $\mathbf{0} \in V$  i homeomorfizam  $h : U \rightarrow V$ , takav da za svaku početnu tačku  $x_0 \in U$ , postoji otvoren interval  $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $t = 0 \in I_0$  tako da za svako  $t \in I_0$  važi

$$h \circ \Phi^t(x_0) = e^{At} h(x_0)$$

odnosno da je tok DS (8) topološki konjugovan toku  $e^{At}$  linearnog DS (7).

Homeomorfizam  $h$  preslikava trajektorije DS (8) u trajektorije DS (7), čuva orijentaciju trajektorija i parametrizaciju vremena duž trajektorija.

**Primer 3.1.** Ispitati stabilnost položaja ravnoteže DS

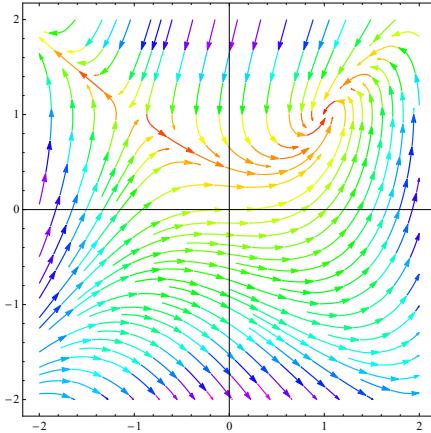
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - y \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

**REŠENJE.** Rešenja sistema  $f(x, y) = 1 - y = 0$ ,  $g(x, y) = x^2 - y^2 = 0$  su položaji ravnoteže DS:  $(1, 1)$  i  $(-1, 1)$ . Jakobijeva matrica je

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

Za PR imamo

$$J_1 = J(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = J(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$



Slika 3: Fazni portret nelinearnog sistema u Primeru 3.1.

Za PR  $(1, 1)$  je

$$q = \det J_1 = 2 > 0, \quad p = \text{tr } J_1 = -2 < 0, \quad \Delta = p^2 - 4q = -4 < 0$$

(sopstvene vrednosti matrice  $J_1$  su  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ ), pa je PR STABILAN FOKUS linearizovanog DS.

Za PR  $(-1, 1)$  je  $q = \det J_2 = -2 < 0$  (sopstvene vrednosti matrice  $J_2$  su  $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ , a sopstveni vektori su  $v_{1,2} = ((-1 \mp \sqrt{3})/2, 1)^T$ ), pa je PR SEDLO linearizovanog DS.

Primenom Teoreme HG zaključujemo da će hiperbolični PR  $(1, 1)$  biti stabilan PR datog nelineanog DS, a hiperbolični PR  $(-1, 1)$  će biti nestabilan. Fazni portret datog nelinearnog sistema prikazan je na Slici 3.  $\square$

**Primer 3.2.** Ispitati stabilnost položaja ravnoteže DS

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x(1 - x^2) + y. \end{aligned}$$

**REŠENJE.** Rešenja sistema  $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$  su položaji ravnoteže sistema:  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  i  $(1, 0)$ . Jakobijeva matrica je

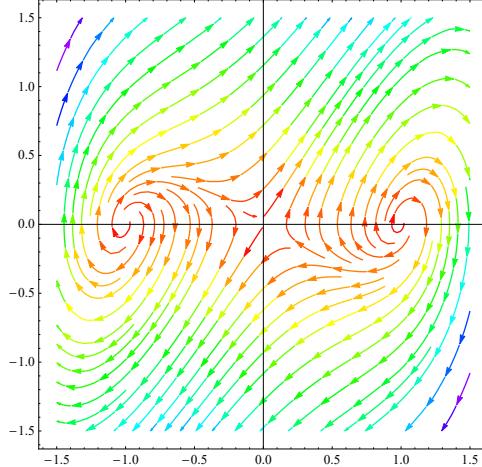
$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Za PR  $(-1, 0)$  i  $(1, 0)$ ,  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})$  su sopstvene vrednosti matrice

$$J_1 = J(-1, 0) = J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q = \det J_1 = 2 > 0, \quad p = \text{tr } J_1 = 1 > 0, \quad \Delta = p^2 - 4q = -7 < 0.$$

Oba PR su NESTABILNI FOKUSI linearizovanog DS.



Slika 4: Fazni portret nelinearnog sistema u Primeru 3.2.

Za PR  $(0, 0)$  je

$$J_2 = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_2 = -1 < 0$$

(sopstvene vrednosti matrice  $J_2$  su  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ ), tako da je PR SEDLO linearizovanog DS.

Sva tri PR su hiperbolični PR, pa primenom Teoreme HG zaključujemo da će sva tri PR  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$  biti nestabilni PR datog nelinearnog DS. Fazni portret datog nelinearnog sistema prikazan je na Slici 4.  $\square$

### Položaji ravnoteže nelinearnog DS u ravni

**TRANSFORMACIJA DS (1) PRELASKOM NA POLARNE KOORDINATE:** Vrlo često u cilju analize nelinearnog DS, kao i lakšeg rešavanja prelazimo na polarne koordinate

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = r(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Kako je  $x^2 + y^2 = r^2$  i  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ , imamo

$$(9) \quad xx' + yy' = rr', \quad \theta' = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{xy' - yx'}{r^2},$$

odakle je

$$\begin{aligned} r' &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + g(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta = \tilde{f}(r, \theta) \\ r\theta' &= g(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta = \tilde{g}(r, \theta) \end{aligned}$$

Prepostavimo u nastavku da je smenom  $X = x - x_0$ ,  $Y = y - y_0$ , položaj ravnoteže  $(x_0, y_0)$  transliran u koordinatni početak  $(0, 0)$ .

**Definicija 3**  $PR(0, 0)$  je CENTAR nelinearnog DS (1) ako postoji  $\delta > 0$  tako da svaka fazna trajektorija DS (1) u okolini  $N_\delta((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}$  je zatvorena trajektorija unutar koje se nalazi  $PR(0, 0)$ .

**Definicija 4**  $PR(0, 0)$  je STABILAN FOKUS nelinearnog DS (1) ako postoji  $\delta > 0$  tako da za svako  $0 < r_0 < \delta$  i  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  je  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  i  $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow \infty$ .  $PR(0, 0)$  je NESTABILAN FOKUS nelinearnog DS (1) ako postoji  $\delta > 0$  tako da za svako  $0 < r_0 < \delta$  i  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  je  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  i  $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow -\infty$ . Svaka trajektorija DS (8) koja zadovoljava  $r(t) \rightarrow 0$  i  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow \pm\infty$  kažemo da se spiralno približava  $PR$  kada  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Definicija 5**  $PR(0, 0)$  je STABILAN ČVOR nelinearnog DS (1) ako postoji  $\delta > 0$  tako da za svako  $0 < r_0 < \delta$  i  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  je  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow \infty$  i  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0) < \infty$ , tj. svaka trajektorija u okolini  $PR$  se približava  $PR$  tangentno na neki pravac kada  $t \rightarrow \infty$ .  $PR(0, 0)$  je NESTABILAN ČVOR nelinearnog DS (1) ako postoji  $\delta > 0$  tako da za svako  $0 < r_0 < \delta$  i  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  je  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow -\infty$  i  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t, r_0, \theta_0) < \infty$ , tj. svaka trajektorija u okolini  $PR$  "izlazi" iz  $PR$  tangentno na neki pravac i udaljava se od njega kada  $t \rightarrow \infty$ .

**Definicija 6**  $PR(0, 0)$  je SEDLO nelinearnog DS (1) ako postoji dve trajektorije  $\Gamma_1, \Gamma_2$  koje se približavaju  $(0, 0)$  kada  $t \rightarrow \infty$  (nazivaju se stabilne mnogostrukosti sedla) i dve trajektorije  $\Gamma_3, \Gamma_4$  koje se približavaju  $(0, 0)$  kada  $t \rightarrow -\infty$  (nazivaju se nestabilne mnogostrukosti sedla) i ako postoji  $\delta > 0$  tako da svaka trajektorija koja polazi iz okoline  $N_\delta((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}$  napušta tu okolinu kada  $t \rightarrow \pm\infty$ , pri čemu kada  $t \rightarrow +\infty$  trajektorije su paralelne sa stabilnim mnogostrukostima sedla, dok kada  $t \rightarrow -\infty$  trajektorije su paralelne sa nestabilnim mnogostrukostima sedla. Trajektorije  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  nazivaju se i separatrise sedla.

**Primer 3.3.** Ispitati tip i stabilnost položaja ravnoteže DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -y.\end{aligned}$$

REŠENJE. Položaj ravnoteže sistema je  $(0, 0)$ . Jakobijeva matrica je

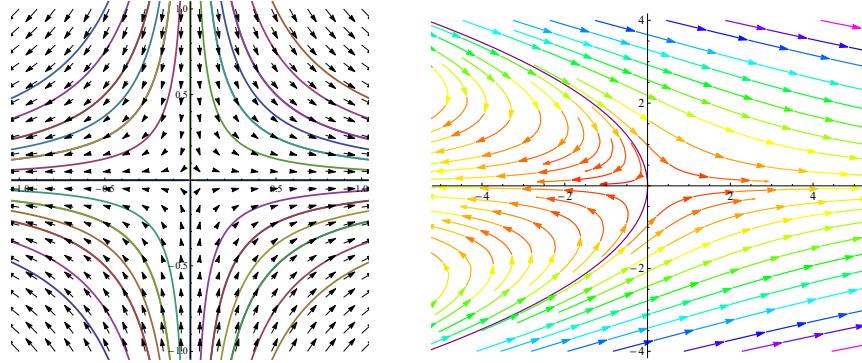
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0, 0) = J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_1 = -1 < 0,$$

pa je koordinatni početak SEDLO linearizovanog sistema sa stabilnim pravcem duž  $y$ -ose i nestabilnim pravcem duž  $x$ -ose. Fazni portret linearizovanog sistema prikazan je na Slici 5-(a).

Posmatrajmo sada nelinearan sistem. Njegovo rešenje koje zadovoljava početni uslov  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  je:

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{y_0^2}{3}\right)e^t - \frac{y_0^2}{3}e^{-2t}, \quad y(t) = y_0e^{-t}.$$

Za  $y_0 = 0$ , imamo kao i u linearном slučaju pravolinijsku trajektoriju  $x(t) = x_0e^t$ ,  $y(t) = 0$ , koja predstavlja *nestabilnu mnogostruktost nelinearnog sedla*. Ipak, za razliku od linearog slučaja,  $y$ -osa ne sadrži rešenja koja teže ka  $(0, 0)$ . Zaista, vektor  $(a^2, -a)^T$  je vektor vektorskog polja u proizvoljnoj tački  $(0, a)$   $y$ -ose.



Slika 5: Primer 3.3. ~ (a)  $(0, 0)$  je SEDLO linearizovanog DS ; (b) fazni portret nelinearnog sistema

Sa druge strane, postoji kriva duž koje sva rešenja teže ka  $(0, 0)$ , tj. *stabilnu mnogostruktost nelinearnog sedla*. Naime, neka je  $(x_0, y_0)$  proizvoljna tačka sa krive  $C : x + \frac{y^2}{3} = 0$  i neka je  $(x(t), y(t))$  rešenje datog sistema koje zadovoljava početni uslov  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ . Kako je  $x_0 + \frac{y_0^2}{3} = 0$ , to rešenje je

$$x(t) = -\frac{y_0^2}{3}e^{-2t}, \quad y(t) = y_0e^{-t} \implies x(t) + \frac{y(t)^2}{3} = 0 \text{ za svako } t.$$

Dakle, rešenje koje polazi iz tačke  $(x_0, y_0)$  sa krive  $C$  ostaje na krivoj  $C$  u kom vremenskom trenutku  $t$ . Štaviše, kada  $t \rightarrow \infty$ , to rešenje teži ka  $(0, 0)$ , tako da kriva  $C$  predstavlja **STABILNU MNOGOSTRUKOST** sedla  $(0, 0)$  datog DS - *stabilna trajektorija duž koje svako rešenje teži ka  $(0, 0)$ .* Primetimo, da je  $y$ -osa (stabilan pravac sedla linearizovanog DS) tangenta stabilne mnogostrukosti nelinearnog sedla DS.

Fazni portret nelinearnog sistema prikazan je na Slici 5-(b).  $\square$

**Definicija 7 Lokalna stabilna mnogostruktur položaja ravnoteže  $x_0$  je skup**

$$\mathcal{W}_{loc}^s(x_0) = \{x : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^t(x) = x_0\}$$

**Lokalna nestabilna mnogostruktur položaja ravnoteže  $x_0$  je skup**

$$\mathcal{W}_{loc}^u(x_0) = \{x : \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi^t(x) = x_0\}$$

Neka je  $v_k = a_k + ib_k$  generalisani sopstveni vektor odgovarajući sopstvenoj vrednosti  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  linearizovanog DS

$$(10) \quad x' = Ax, \quad A = [a_{ij}]_{n \times n}.$$

**Definicija 8 [Stabilan, nestabilan i centralni podprostor linearizovanog DS]**

$$E^s = \text{span}\{a_k, b_k \mid \alpha_k < 0\}$$

$$E^u = \text{span}\{a_k, b_k \mid \alpha_k > 0\}$$

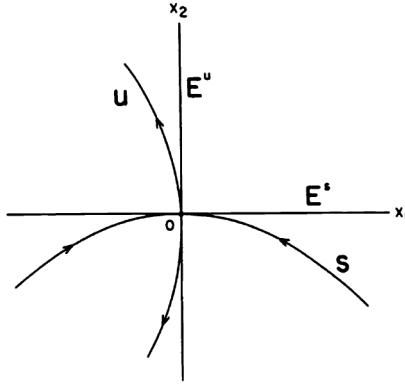
$$E^c = \text{span}\{a_k, b_k \mid \alpha_k = 0\}$$

*su, redom, stabilan, nestabilan i centralni podprostor linearizovanog DS (10).*

$E^s, E^c, E^u$  su podprostori vektorskog prostora  $\mathbb{R}^n$  čije baze čine realni i imaginari delovi generalisanih sopstvenih vektora  $v_k$  odgovarajućih sopstvenim vrednostima  $\lambda_k$  sa, redom, negativnim, jednakim nula i pozitivnim realnim delom i važi:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

**Teorema 2 [Teorema o stabilnoj i nestabilnoj mnogostrukosti PR]** *Neka je  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$  otvoren i  $x_0 \in \mathbb{E}$  hiperbolički PR DS (8) i neka je  $F \in C^1(\mathbb{E})$ . Neka matrica  $A = Df(x_0)$  ima s sopstvenih vrednosti sa negativnim realnim delom i  $n-s$  sopstvenih vrednosti sa pozitivnim realnim delom. Tada postoji  $s$ -dimenzionalna diferencijalna mnogostruktur  $\mathcal{W}_{loc}^s$  tangentna na stabilan podprostor  $E^s$  linearizovanog DS (7) u tački  $x_0$ . Takodje, postoji  $(n-s)$ -dimenzionalna diferencijalna mnogostruktur  $\mathcal{W}_{loc}^u$  tangentna na nestabilan podprostor  $E^u$  linearizovanog DS (7) u tački  $x_0$ .*



Slika 6: Stabilne i nestabilne mnogostrukosti sedla  $(0, 0)$  tangente u toj tački na stabilne i nestabilne pravce linearnog sedla

### Linearizacija nelinearnog DS - II deo

Naredni primer, pokazuje da linearizovani sistem ne daje uvek tačan zaključak o tipu PR  $(0, 0)$  nelinearnog DS  $\sim$  u slučaju kada je  $(0, 0)$  centar linearizovanog sistema - nehiperbolički PR.

**Primer 3.4.** Ispitati tip položaja ravnoteže DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

REŠENJE. Položaj ravnoteže sistema je  $(0, 0)$ . Jakobijeva matrica je

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

čije su sopstvene vrednosti  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

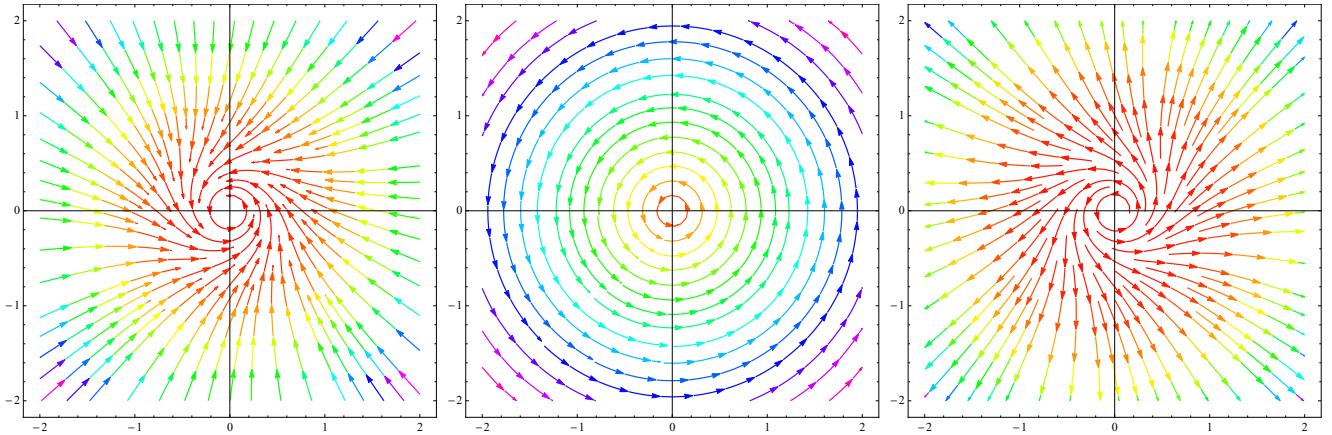
Kako je  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ ,  $(0, 0)$  je centar linearizovanog sistema, dakle nehiperbolični PR datog sistema.

Da bi analizirali nelinearan sistem, prelazimo na polarne koordinate i dobijamo prema (9)

$$rr' = x(-y + ax(x^2 + y^2)) + y(x + ay(x^2 + y^2)) = a(x^2 + y^2)^2 = ar^4 \implies r' = ar^3.$$

i

$$\theta' = \frac{x(x + ay(x^2 + y^2)) - y(-y + ax(x^2 + y^2))}{r^2} = 1.$$



Slika 7: Fazni portret nelinearnog sistema u Primeru 3.4. za  $a < 0$ ,  $a = 0$ ,  $a > 0$

Dakle, u polarnim koordinatama dati nelinearan sistem ima oblik

$$r' = ar^3, \quad \theta' = 1,$$

čije rešenje koje zadovoljava početni uslov  $r(t) = r_0$ ,  $\theta(t) = \theta_0$  za  $a > 0$  je:

$$r(t) = r_0(1 - 2r_0^2at)^{-1/2} \quad \text{za } t < \frac{1}{2r_0^2a}, \quad \theta = t + \theta_0,$$

dok za  $a < 0$  je:

$$r(t) = r_0(1 - 2r_0^2at)^{-1/2} \quad \text{za } t > \frac{1}{2r_0^2a}, \quad \theta = t + \theta_0.$$

Sistem u ovom obliku može se lako analizirati. Sve trajektorije rotiraju oko  $(0, 0)$  sa istom ugaonom brzinom  $\theta' = 1$ .

- ★ ako je  $a < 0$ , tada  $r(t) \rightarrow 0$ ,  $\theta(t) \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow \infty$ , a PR je stabilan fokus nelinearnog DS (prema Definiciji 4);
- ★ ako je  $a = 0$ , tada  $r(t) = r_0$  za svako  $t$ , a PR je centar;
- ★ ako je  $a > 0$ , tada  $r(t) \rightarrow 0$ ,  $\theta(t) \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow -\infty$ , a PR je nestabilan fokus nelinearnog DS (prema Definiciji 4).

Dakle, dodavanjem nelinearnog člana centar linearnog sistema transformiše se u fokus (stabilan ili nestabilan) nelinearnog DS, pa **ne možemo koristiti linearizaciju sistema za određivanje faznog portreta u okolini nehiperboličnog PR.**  $\square$

Naredni primer pokazuje da prepostavka  $F \in C^1(\mathbb{E})$  nije dovoljna da zaključimo da će tip PR nelinearnog DS i linearizovanog DS ostati isti, odnosno da

nelinearan DS bude topološki  $\mathcal{C}^1$ –ekvivalentan linearizovanom DS (videti Primer 2.6. gde je pokazano da su za linearni DS u ravni stabilna zvezda i stabilan fokus topološki ekvivalentni, ali da nisu topološki  $\mathcal{C}^1$ –ekvivalentni).

**Primer 3.5. (stabilna zvezda  $\rightarrow$  nelinearan stabilan fokus)** Posmatrajmo DS

$$\begin{aligned} x' &= -x - \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} = f(x, y), \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ y' &= -y - \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} = g(x, y), \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

i definišimo  $F(0, 0) = (f(0, 0), g(0, 0)) = (0, 0)$ . Primetimo da je  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , ali  $F \notin C^2(\mathbb{R}^2)$ .

PR  $(0, 0)$  je *stabilna zvezda* linearizovanog sistema, jer je

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dakle, prema Teoremi HG hiperolični PR  $(0, 0)$  će biti stabilan PR datog nelinearnog sistema, ali da bi odredili tip PR transformišemo DS prelaskom na polarne koordinatame

$$r' = -r, \quad \theta' = \frac{1}{\ln r}$$

čije rešenje koje zadovoljava početni uslov  $r(t) = r_0$ ,  $\theta(t) = \theta_0$  je

$$r(t) = r_0 e^{-t}, \quad \theta(t) = \theta_0 - \ln \left( 1 - \frac{t}{\ln r_0} \right).$$

Kako je  $r(t) \rightarrow 0$ ,  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow \infty$ , prema Definiciji 4 koordinatni početak je *stabilan fokus* nelinearnog DS.

Dakle, ako je  $F \in C^1(\mathbb{E})$ , zvezde i degenerisani čvorovi linearizovanog sistema mogu biti transformisani nelinearnim izrazima u DS u fokus ili čvor (videti Primer 3.6), ali za razliku od centra linearizovanog sistema (koji može preći bilo u stabilan bilo u nestabilan fokus ili ostati nelinearan centar), NJIHOVA STABILNOST SE NE MENJA. Na primer, stabilna zvezda može se transformisati u stabilan fokus (kao u prethodnom primeru), ali ne i u nestabilan fokus. Ovaj zaključak je verodostojan klasifikaciji položaja ravnoteže prikazanom na Slici 2.26: stabilna (nestabilna) zvezda i stabilan (nestabilan) degenerisani čvor leži u stabilnoj (nestabilnoj) oblasti  $pq$ – ravni, dok se centar nalazi na granici između stabilne i nestabilne oblasti  $pq$ – ravni.

Naredna teorema garantuje da je pod pretpostavkom  $F \in C^2(E)$ , nelinearan DS (8) topološki  $\mathcal{C}^1$ -konjugovan linearizovanom DS (7).

**Teorema 3 [Hartmanova teorema]** *Neka je  $E$  otvoren podskup od  $\mathbb{R}^n$ , takav da  $x^* \in E$ ,  $F \in C^2(E)$ ,  $F(x^*) = 0$  i neka je  $\Phi^t$  tok DS (8). Neka je  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  hiperbolički položaj ravnoteže linearizovanog DS (7). Tada postoji okoline  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x^* \in U$ ,  $\mathbf{0} \in V$  i  $C^1$ -difeomorfizam  $H : U \rightarrow V$ , takav da za svaku početnu tačku  $x_0 \in U$ , postoji otvoren interval  $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ ,  $0 \in I$ , tako da za svako  $t \in I_0$  važi*

$$H \circ \Phi^t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

odnosno da je tok DS (8) topološki  $\mathcal{C}^1$ -konjugovan toku  $e^{At}$  linearizovanog DS (7).

Naredna teorema daje potreban i dovoljan uslov da sedlo linearizovanog DS bude sedlo nelinearnog DS.

NELINEARNO SEDLO  $\iff$  LINEARNO SEDLO :

**Teorema 4** *Neka je  $E$  otvoren podskup od  $\mathbb{R}^2$ , takav da  $(0, 0) \in E$  i neka je  $F \in C^1(E)$ ,  $F(0, 0) = 0$ . Neka je  $\mathbf{0} = (0, 0)$  hiperbolički PR DS (1). Tada je  $\mathbf{0}$  nelinearno sedlo DS (1) ako i samo ako je sedlo linearizovanog DS (7).*

Na osnovu Primera 3.5. stabilna zvezda linearizovanog DS može postati stabilan fokus, ali takođe može postati i stabilan čvor nelinearnog DS. Koristeći vrlo uobičajenu klasifikaciju PR linearizovanog DS

- ”SINK” = stabilan čvor + stabilan fokus + stabilna zvezda + stabilan degenerativni čvor
- ”SOURCE” = nestabilan čvor + nestabilan fokus + nestabilna zvezda + nestabilan degenerativni čvor
- ”SINK NODE” = stabilan čvor (stable node) + stabilna zvezda (stable star node) + stabilan degenerativni čvor (degenerative node)  $\rightarrow$  dve negativne sopstvene vrednosti matrice sistema
- ”SOURCE NODE” = nestabilan čvor (unstable node) + nestabilna zvezda (unstable star node) + nestabilan degenerativni čvor (degenerative node)  $\rightarrow$  dve pozitivne sopstvene vrednosti matrice sistema

Teorema Hartman-Grobmana garantuje da će "sink" ("source") linearizovanog DS ostati "sink" ("source") nelinearnog DS. Naredna teorema kaže da pod malo jačim pretpostavkama od pretpostavke  $F \in C^1(E)$  hiperbolički PR koji je stabilan fokus linearizovanog DS ostaje stabilan fokus nelinearnog DS, dok stabilan čvor ("sink node") linearizovanog DS ostaje stabilan čvor nelinearnog DS, odnosno nestabilan čvor ("source node") linearizovanog DS ostaje nestabilan čvor nelinearnog DS.

**Teorema 5** *Neka je  $E$  otvoren podskup od  $\mathbb{R}^2$ , takav da  $(0,0) \in E$  i neka je  $F \in C^2(E)$ ,  $F(0,0) = 0$ . Neka je  $\mathbf{0} = (0,0)$  hiperbolički PR DS (1).*

(i) **0** stabilan (nestabilan) fokus DS (1) ako i samo ako je stabilan (nestabilan) fokus linearizovanog DS (7).

(ii) **0** stabilan (nestabilan) čvor DS (1) ako i samo ako je stabilan (nestabilan) čvor linearizovanog DS (7).

$$\begin{array}{ccc}
(A) & \text{NELINEARAN ČVOR} & \iff \text{LINEARAN ČVOR} \\
& \swarrow & \searrow \\
& \text{"SOURCE NODE"} & \text{"SINK NODE"} \\
& \Updownarrow & \Updownarrow \\
& \text{NESTABILAN NELINEARAN ČVOR} & \text{STABILAN NELINEARAN ČVOR} \\
(B) & \text{NELINEARAN FOKUS} & \iff \text{LINEARAN FOKUS}
\end{array}$$

**Primer 3.6. (nestabilna zvezda  $\rightarrow$  nelinearan nestabilan čvor)** Posmatrajmo DS

$$\frac{dx}{dt} = x - xy, \quad \frac{dy}{dt} = y + 2xy.$$

PR su  $(0,0)$  i  $(-1/2, 1)$ . Jakobijeva matrica je  $J(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 2y & 1+2x \end{pmatrix}$ .

Za tačku  $(-1/2, 1)$  je

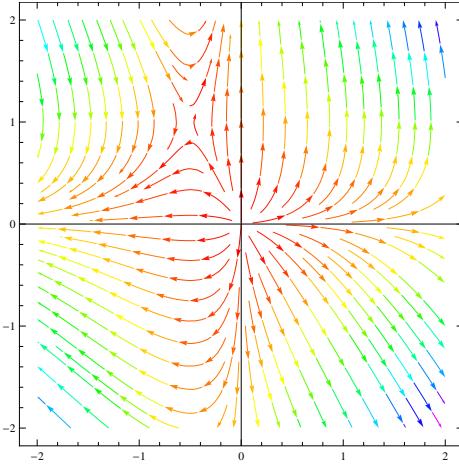
$$J_2 = J(-1/2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

odnosno  $(-1/2, 1)$  je SEDLO linearizovanog sistema (sopstvene vrednosti matrice  $J_2$  su  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ).

Za tačku  $(0,0)$  je

$$J_1 = J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q = \det J_1 = 1 > 0, \quad p = \operatorname{tr} J_1 = 2 > 0, \quad \Delta = p^2 - 4q = 0$$



Slika 8: Fazni portret nelinearnog sistema u Primeru 3.6.

tako da je koordinatni početak **NESTABILNA ZVEZDA** linearizovanog sistema.

Kako je  $F(x, y) = (x - xy, y + 2xy)$ ,  $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , prema Teoremi 4 ( $-1/2, 1$ ) je sedlo datog nelinearnog DS, a prema Teoremi 5  $(0, 0)$  je nestabilan čvor nelinearnog DS. Fazni portret datog nelinearnog sistema prikazan je na Slici 8.  $\square$

U Primeru 3.5. dat je primer DS kada centar linearizovanog DS može biti centar nelinearnog DS ili stabilan (nestabilan) fokus nelinearnog DS. Medjutim, centar linearizovanog DS može postati još jedan tip PR nelinearnog DS koji nazivamo centar-fokus.

**Definicija 9** *PR  $(0, 0)$  je CENTAR-FOKUS nelinearnog DS (1) ako postoji niz zatvorenih trajektorija  $\Gamma_n$ , tako da se  $\Gamma_{n+1}$  nalazi unutar oblasti ograničene zatvorenom trajektorijom  $\Gamma_n$  i da  $\Gamma_n \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$ , pri čemu svaka trajektorija koja se nalazi između  $\Gamma_n$  i  $\Gamma_{n+1}$  se spiralno približava ili  $\Gamma_n$  ili  $\Gamma_{n+1}$  kada  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

**Primer 3.7. (centar  $\rightarrow$  centar-fokus)** Posmatrajmo DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} = g(x, y).\end{aligned}$$

i definišimo  $f(0, 0) = 0, g(0, 0) = 0$ , tako da je za  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ ,  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Sistem u polarnim koordinatama je oblika

$$(11) \quad \frac{dr}{dt} = r \sin \frac{\pi}{r}, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

DS (11) ima PR  $(0, 0)$  i niz zatvorenih trajektorija  $\Gamma_n : r = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pored toga,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} > 0 \quad \text{za } \frac{1}{2m+1} < r < \frac{1}{2m} \\ \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} < 0 \quad \text{za } \frac{1}{2m} < r < \frac{1}{2m-1},\end{aligned}$$

za  $m \in \mathbb{N}$ . Dakle, za  $\frac{1}{2m+1} < r < \frac{1}{2m}$ , rešenje  $r = r(\theta)$  monotono raste kada  $\theta \rightarrow \infty$ , dok za  $\frac{1}{2m} < r < \frac{1}{2m-1}$  rešenje  $r = r(\theta)$  monotono opada kada  $\theta \rightarrow \infty$ . Sve fazne trajektorije izmedju zatvorenih trajektorija  $\Gamma_{2m+1}$  i  $\Gamma_{2m}$  spiralno se udaljavaju od  $\Gamma_{2m+1}$  i približavaju krivoj  $\Gamma_{2m}$ , dok sve fazne trajektorije izmedju zatvorenih trajektorija  $\Gamma_{2m}$  i  $\Gamma_{2m-1}$  spiralno se približavaju krivoj  $\Gamma_{2m-1}$  i udaljavaju od krive  $\Gamma_{2m-1}$ . PR  $(0, 0)$  je centar-fokus, pri čemu je  $(0, 0)$  centar linearizovanog DS.

**Teorema 6** Neka je  $\mathbb{E}$  otvoren podskup od  $\mathbb{R}^2$ , takav da  $(0, 0) \in \mathbb{E}$  i neka je  $F \in C^1(\mathbb{E})$ ,  $F(0, 0) = 0$ . Ako je  $\mathbf{0}$  centar linearizovanog DS (7), onda je centar ili centar-fokus ili fokus nelinearnog DS.

Medjutim, centar-fokus ne postoji u analitičkim DS, odnosno imamo

**Teorema 7** Neka je  $\mathbb{E}$  otvoren podskup od  $\mathbb{R}^2$ , takav da  $\mathbf{0} = (0, 0) \in \mathbb{E}$  i neka je  $F(0, 0) = 0$  i  $F$  je analitička funkcija u  $\mathbb{E}$ . Ako je  $(0, 0)$  centar linearizovanog DS (7), tada je  $\mathbf{0}$  ili nelinearan centar ili nelinearan fokus DS (1).

LINEARAN CENTAR  $\implies$  NELINEARAN CENTAR ILI NELINEARAN FOKUS