

### 3.1. Skiciranje faznog portreta dvodimenzionalnog nelinearnog DS

#### Uputstvo za skiciranje faznog portreta nelinearnog DS

Za običnu DJ prvog reda  $y' = f(x, y)$  IZOKLINA je geometrijsko mesto tačaka u kojima polje pravaca ima istu vrednost, odnosno

$$\{(x, y) : f(x, y) = k, k = \text{const}\}$$

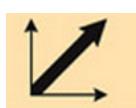
Analogno tome za DS

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

gde je  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , definišu se pojmovi:

- $x$ -NULA-IZOKLINA je skup tačaka u faznoj ravni za koje je  $dx/dt = 0$ , tj.  $f(x, y) = 0$ 
  - geometrijski duž  $x$ -nula-izokline je tangentni vektor  $(f, g) = (0, y')$ , pa su zato vektori vektorskog polja u faznom portretu paralelni sa  $y$ -osom:
    - $\uparrow$  ako je  $y' > 0$
    - $\downarrow$  ako je  $y' < 0$
- $y$ -NULA-IZOKLINA je skup tačaka u faznoj ravni za koje je  $dy/dt = 0$ , tj.  $g(x, y) = 0$ 
  - geometrijski duž  $y$ -nula-izokline je tangentni vektor  $(f, g) = (x', 0)$ , pa su zato vektori vektorskog polja u faznom portretu paralelni sa  $x$ -osom:
    - $\rightarrow$  ako je  $x' > 0$
    - $\leftarrow$  ako je  $x' < 0$

U delovima fazne ravni između nula-izoklina vektore vektorskog polja određujemo na sledeći način:



$$x' > 0, y' > 0 \quad x' < 0, y' > 0 \quad x' > 0, y' < 0 \quad x' < 0, y' < 0$$

	$f(x,y) > 0$	$f(x,y) = 0$	$f(x,y) < 0$
$g(x,y) > 0$			
$g(x,y) = 0$			
$g(x,y) < 0$			

### Primer 3.8. Skicirati fazni portret DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + e^{-y} \\ \frac{dy}{dt} &= -y.\end{aligned}$$

REŠENJE. Jedini položaj ravnoteže sistema je  $(-1, 0)$ . Matrica Jakobijana je

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-y} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = J(-1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_1 = -1 < 0$$

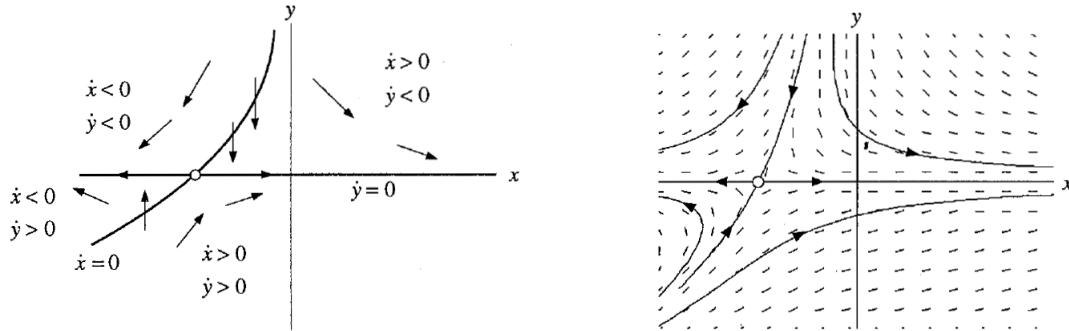
(sopstvene vrednosti matrice  $J_1$  su  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  i sopstveni vektori su  $v_1 = (1, 2)^T$  i  $v_2 = (1, 0)^T$ ). Dakle, PR je sedlo linearizovanog sistema, odnosno prema Teoremi 3.4. PR je nelinearno sedlo, čija je stabilna mnogostruktost tangentna u PR na pravac vektora  $v_1$ , a nestabilna mnogostruktost je tangentna u PR na  $x$ -osu.

Kako je  $y' = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ,  $x$ -osa je  $y$ -nula-izoklina. Za  $y = 0$  je

- $x' = x + 1 > 0$  za  $x > -1$  :  $\rightarrow$
- $x' = x + 1 < 0$  za  $x < -1$  :  $\leftarrow$

Dakle,  $y = 0, x > -1$  i  $y = 0, x < -1$  su pravolinijske trajektorije, odnosno ako podemo iz bilo koje tačke  $x$ -ose, izuzev PR  $(-1, 0)$ , ostajemo na  $x$ -osi i udaljavamo se od PR (poluprave su nestabilne mnogostrukosti sedla).

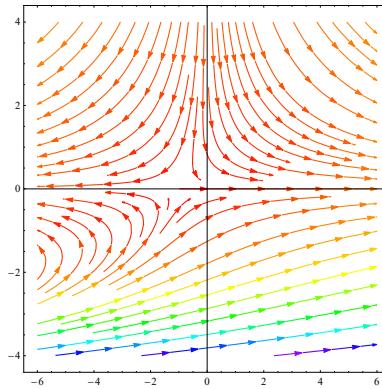
Dalje,  $x' = 0 \Leftrightarrow y = -\ln(-x)$ , ta kriva je  $x$ -nula-izoklina i duž gornjeg dela krive za  $x > -1$  je  $y' = \ln(-x) < 0$ , a duž donjeg dela krive za  $x < -1$  je  $y' = \ln(-x) > 0$ :



Slika 11: Primer 3.8. ~ (a) nula-izokline i vektorsko polje; (b) fazni portret

- za  $x > -1$  je  $y' = \ln(-x) < 0$  :  $\downarrow$
- za  $x < -1$  je  $y' = \ln(-x) > 0$  :  $\uparrow$

Nula-izokline dele ravan na oblasti u kojima se menja znak od  $x'$  i  $y'$  (Slika 11-(a)). Fazni portret DS prikazan je na Slici 11-(b) i Slici 12.  $\square$



Slika 12: Primer 3.8. ~ fazni portret nelinearnog DS

### Primer 3.9. Skicirati fazni portret DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2.\end{aligned}$$

REŠENJE.  $x$ -nula-izoklina je parabola  $y = x^2$ , a  $y$ -nula-izoklina je prava  $x = 2$ . Presek nula-izoklina je PR  $(2, 4)$ . Matrica Jakobijana je

$$J = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za tačku  $(2, 4)$  je

$$J_1 = J(2, 4) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_1 = -1 < 0$$

(sopstvene vrednosti matrice  $J_1$  su  $\lambda_1 = -2 - \sqrt{5}$ ,  $\lambda_2 = -2 + \sqrt{5}$  i sopstveni vektori su  $v_1 = (-2 + \sqrt{5}, 1)^T$ ,  $v_2 = (-2 - \sqrt{5}, 1)^T$ ). Dakle, PR je sedlo linearizovanog sistema, odnosno prema Teoremi 3.4. PR je nelinearno sedlo, sa stabilnom mnogostrukosti koja je tangentna u PR na pravac vektora  $v_2$  i nestabilnom mnogostrukosti koja je tangentna u PR na pravac vektora  $v_1$ .

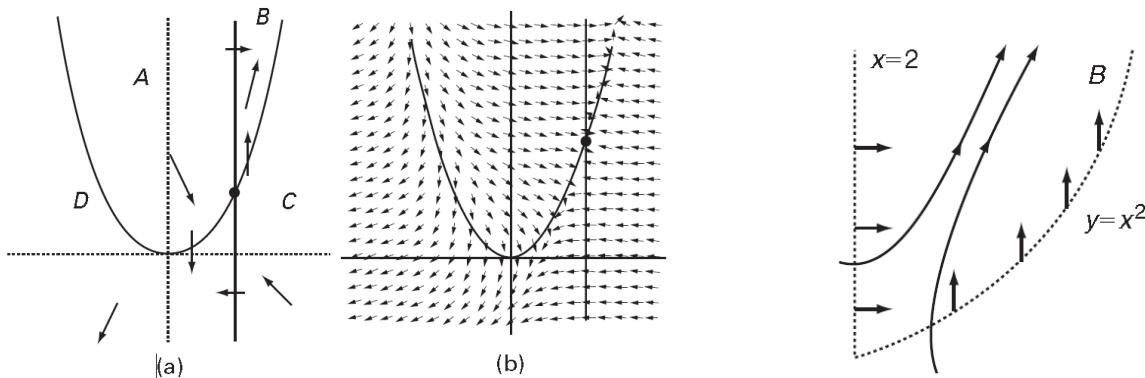
Duž  $x$ -nula-izokline  $y = x^2$  je

- $y' = x - 2 > 0$  za  $x > 2$  :  $\uparrow$
- $y' = x - 2 < 0$  za  $x < 2$  :  $\downarrow$

Duž  $y$ -nula-izokline  $x = 2$  je

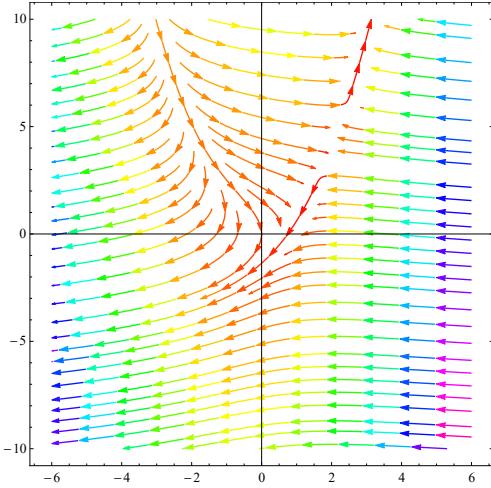
- $x' = y - 4 > 0$  za  $y > 4$  :  $\rightarrow$
- $x' = y - 4 < 0$  za  $y < 4$  :  $\leftarrow$

Smer strelica u faznom portretu prikazan je na Slici 13.



Slika 13: Primer 3.9. ~ nula-izokline i vektorsko polje

Nula-izokline dele  $\mathbb{R}^2$  na četiri oblasti  $A, B, C, D$ . Sve trajektorije koje polaze iz neke tačke oblasti  $B$  ostaju u toj oblasti i teže  $\infty$  kada  $t \rightarrow \infty$  u severoistočnom pravcu  $\nearrow$  (Slika 13-(c)). Sve trajektorije koje polaze iz neke tačke oblasti  $D$  ostaju u toj oblasti i teže  $-\infty$  kada  $t \rightarrow \infty$  u jugozapadnom pravcu  $\swarrow$ . Sve trajektorije koje polaze iz neke tačke unutar oblasti  $A$  i  $C$  mogu da "biraju" : mogu preseći nula-izoklinu i ući unutar oblasti  $B$  ili  $D$  gde ostaju, ili se približavaju sedlu  $(2, 4)$  do nekog vremenskog trenutka, nakon čega počinju da se udaljavaju od nestabilnog



Slika 14: Primer 3.9.  $\sim$  fazni portret nelinearnog DS

PR u pravcu njegove nestabilne mnogostrukosti. Fazni portret prikazan je na Slici 14.  $\square$

**Primer 3.10.** Ispitati tip položaja ravnoteže DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(3-x-2y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(2-x-y).\end{aligned}$$

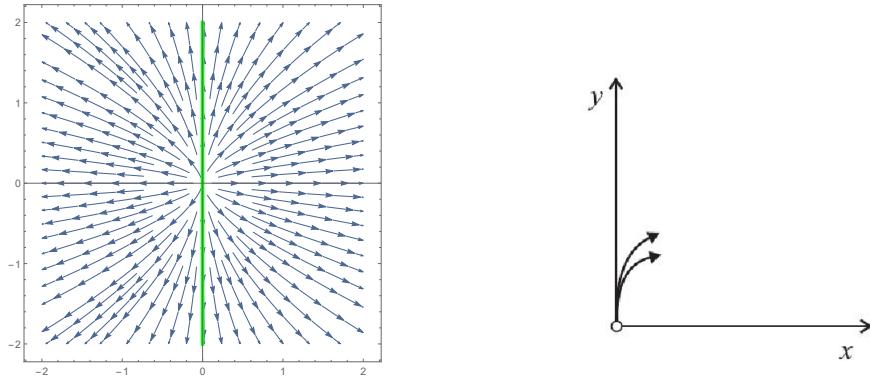
**REŠENJE.** Položaji ravnoteže sistema su:  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(0,2)$ ,  $P_3(3,0)$  i  $P_4(1,1)$ . Matrica Jakobijana je

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-x-2y \end{pmatrix}$$

Za PR  $P_1(0,0)$ : sopstvene vrednosti matrice

$$J_2 = J(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

su  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ , a sopstveni vektori su  $v_1 = (1,0)^T$ ,  $v_2 = (0,1)^T$ . PR  $(0,0)$  je NESTABILAN ČVOR linearizovanog sistema, odnosno prema Teoremi 3.5. **PR je nelinearan nestabilan čvor.** Fazni portret linearizovanog sistema je prikazan na Slici 15-(a). Trajektorije "napuštaju" koordinatni početak tangentno na pravac određen sporim sopstvenim vektorom  $v_2$ , tj. tangentno na  $y$ -osu. Fazni portret nelinearnog sistema u okolini  $(0,0)$  izgleda kao na Slici 15-(b).

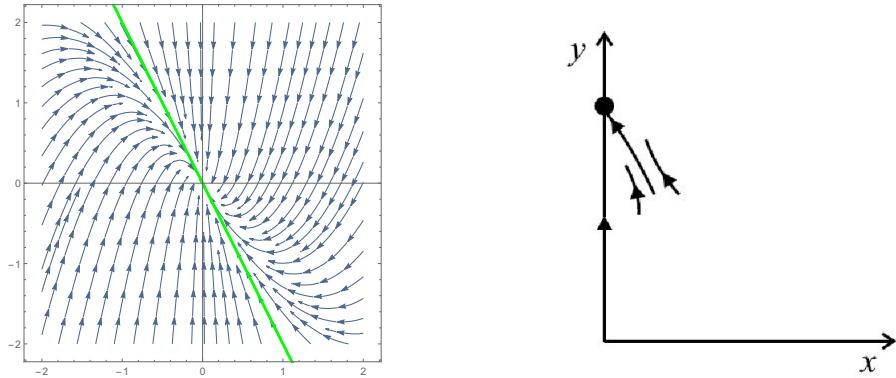


Slika 15: Primer 3.10.  $\sim$  PR  $(0, 0)$  je nestabilan čvor

Za PR  $P_2(0, 2)$ : sopstvene vrednosti matrice

$$J_1 = J(0, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

su  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$ , a sopstveni vektori su  $v_1 = (0, 1)^T$ ,  $v_2 = (-1, 2)^T$ . PR  $(0, 2)$  je STABILAN ČVOR linearizovanog sistema, odnosno prema Teoremi 3.4.  $(0, 2)$  je NELINEARAN STABILAN ČVOR. Fazni portret linearizovanog sistema je prikazan na Slici 16-(a). Trajektorije se približavaju PR  $(0, 2)$  tangentno na pravac određen sporim sopstvenim vektorom  $v_2$ . Fazni portret nelinearnog sistema u okolini  $(0, 2)$  izgleda kao na Slici 16-(b).

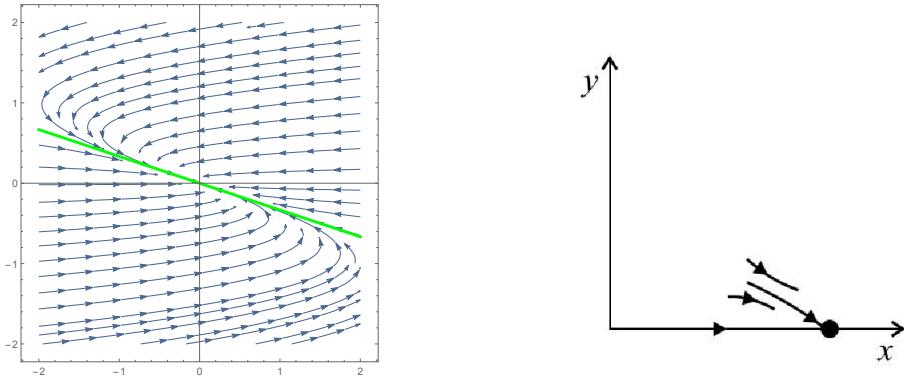


Slika 16: Primer 3.10.  $\sim$  PR  $(0, 2)$  je stabilan čvor

Za PR  $P_3(3, 0)$ : sopstvene vrednosti matrice

$$J_4 = J(3, 0) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

su  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -1$ , a sopstveni vektori su  $v_1 = (1, 0)^T$ ,  $v_2 = (-3, 1)^T$ . PR  $(3, 0)$  je STABILAN ČVOR linearizovanog sistema, odnosno Prema Teormi 3.4.  $(3, 0)$  je



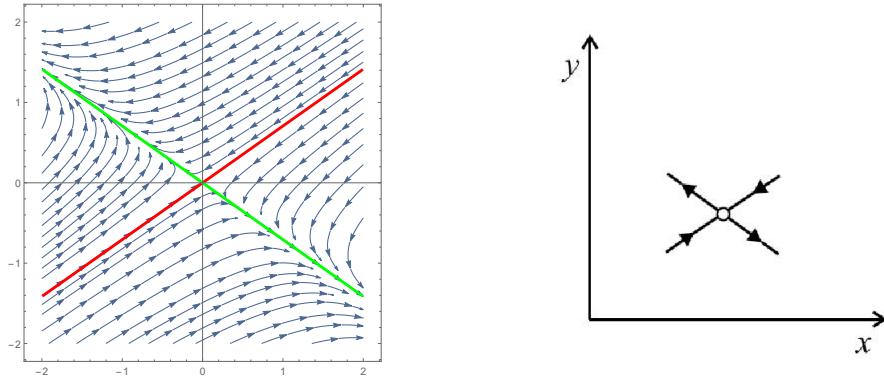
Slika 17: Primer 3.10.  $\sim \text{PR } (3, 0)$  je stabilan čvor

**NELINEARAN STABILAN ČVOR.** Fazni portret linearizovanog sistema je prikazan na Slici 18-(a). Trajektorije se približavaju stabilnom čvoru tangentno na spori pravac određen sopstvenim vektorom  $v_2$ . Fazni portret nelinearnog sistema u okolini  $(3, 0)$  izgleda kao na Slici 18-(b).

Za PR  $(1, 1)$ : sopstvene vrednosti matrice

$$J_3 = J(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

su  $\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}$ ,  $\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}$ , a sopstveni vektori su  $v_1 = (\sqrt{2}, 1)^T$ ,  $v_2 = (-\sqrt{2}, 1)^T$ . PR  $(1, 1)$  je SEDLO linearizovanog sistema, odnosno prema Teormi 3.4.  $(1, 1)$  je NELINEARNO SEDLO. Pravci određeni sopstvenim vektorom  $v_1$  su stabilni, a pravci određeni sopstvenim vektorom  $v_2$  su nestabilni pravci sedla. Fazni portret linearizovanog sistema i fazni portret nelinearnog sistema u okolini  $(1, 1)$  je prikazan na Slici 17-(b).



Slika 18: Primer 3.10.  $\sim \text{PR } (1, 1)$  je sedlo

Duž  $x$ -nula-izokline  $x = 0$  je

- $y' = y(2 - y) > 0$  za  $0 < y < 2$  :  $\uparrow$

- $y' = y(2 - y) < 0$  za  $y < 0$  i  $y > 2$  :  $\downarrow$

Duž  $x$ -nula-izokline  $x + 2y = 3$  je

- $y' = y(y - 1) > 0$  za  $y < 0$  i  $y > 1$  :  $\uparrow$
- $y' = y(y - 1) < 0$  za  $0 < y < 1$  :  $\downarrow$

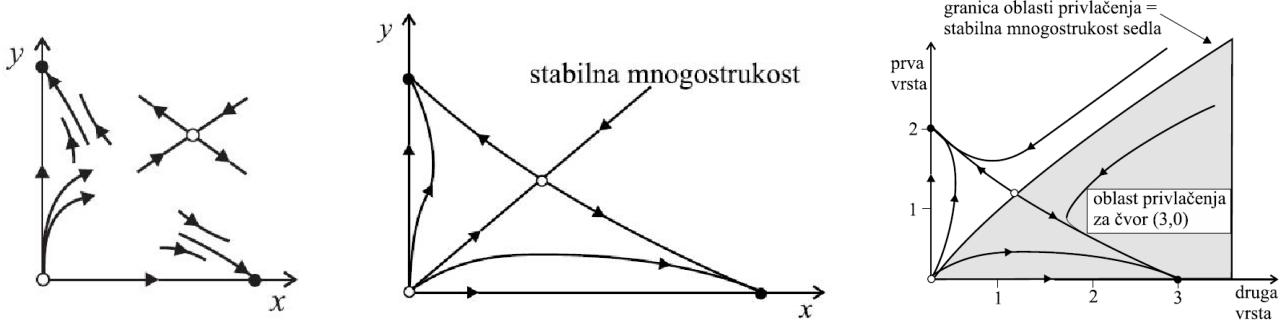
Duž  $y$ -nula-izokline  $y = 0$  je

- $x' = x(3 - x) > 0$  za  $0 < x < 3$  :  $\rightarrow$
- $x' = x(3 - x) < 0$  za  $x < 0$  i  $x > 3$  :  $\leftarrow$

Duž  $y$ -nula-izokline  $x + y = 2$  je

- $x' = x(x - 1) > 0$  za  $x < 0$  i  $x > 1$  :  $\rightarrow$
- $x' = x(x - 1) < 0$  za  $0 < x < 1$  :  $\leftarrow$

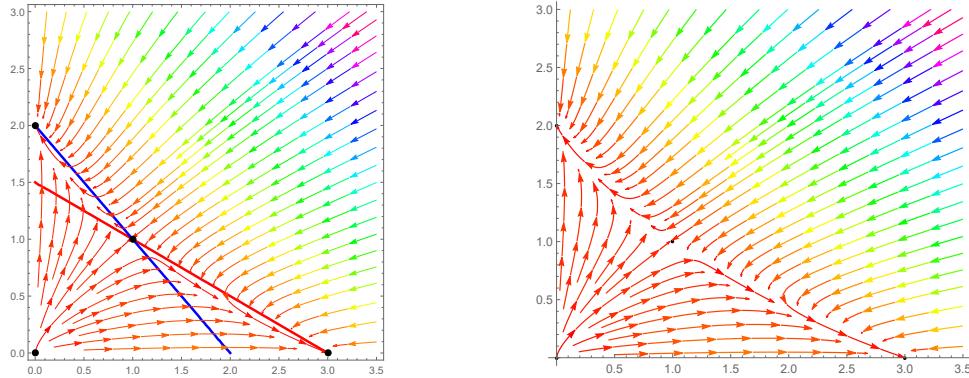
Kako su sva četiri PR nehiperbolična fazni porteti nelinearnog DS biće u okolini tih PR topološki konjugovan faznom portretu odgovarajućeg linearizovanog sistema. Korišćenjem sve četiri slike možemo skicirati fazni portret (Slika 19-(a).) Primetimo da koordinatne ose sadrže pravolinijske trajektorije, jer je  $x' = 0$  za  $x = 0$  i  $y' = 0$  za  $y = 0$ . Dalje prema osećaju možemo dopuniti ostatak faznog portreta (Slika 19-(b).). Pre svega, trajektorije koje polaze iz neke tačke u okolini  $(0, 0)$  koji je nestabilan PR, približavaće se stabilnom čvoru  $P_3(3, 0)$  na  $x$ -osi, a neke se približavaju stabilnom čvoru  $P_2(0, 2)$  na  $y$ -osi. U sredini mora postojati trajektorija koja kao da "ne može da se odluci" na koju stranu da krene, tako da završava u sedlu  $(1, 1)$ . Te dve trajektorije su **stabilne mnogostrukosti sedla**, prikazane na Slici 19-(b).



Slika 19: Primer 3.10.

Dati DS ima dva stabilna PR  $P_2, P_3$ . Takvu karakteristiku DS nazivano *bistabilnost* DS. U slučaju bistabilnosti DS od posebnog interesa je odrediti *oblasti*

privlačnosti  $\mathcal{B}(P_i)$ ,  $i = 2, 3$ , za dva stabilna PR, odnosno za dva atraktora DS. Oblast privlačnosti stabilnog PR sadrže sve tačke fazne ravni za koje važi da trajektorija koja polazi iz te tačke se približava PR kada  $t \rightarrow \infty$ . Trajektorije koje polaze ispod stabilne mnogostrukosti sedla približavaće se stabilnom čvoru  $P_3(3, 0)$  na  $x$ -osi, dok sve trajektorije koje polaze iznad stabilne mnogostrukosti sedla približavaće se stabilnom čvoru  $P_2(0, 2)$  na  $y$ -osi. Dakle, stabilne mnogostrukosti sedla predstavljaju separatrise između oblasti privlačnosti  $\mathcal{B}(P_2)$  i  $\mathcal{B}(P_3)$ .  $\square$



Slika 20: Primer 3.10. ~ fazni portret nelinearnog DS

**Primer 3.11.** Skicirati fazni portret DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 - 1 \\ \frac{dy}{dt} &= -xy.\end{aligned}$$

**REŠENJE.**  $x$ -nula-izokline su prave  $x = \pm 1$ , a  $y$ -nula-izoklina su prave  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Položaji ravnoteže su  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .

Matrica Jakobijana je

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ -y & -x \end{pmatrix}.$$

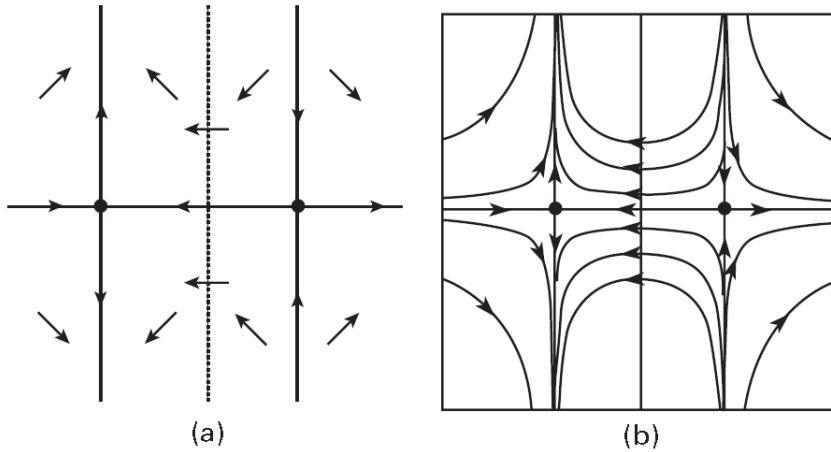
Za PR je

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dakle, oba PR su sedla linearizovanog DS, pa i nelinearna sedla datog DS. Za sedlo  $(1, 0)$   $x$ -osa je nestabilan pravac, a  $y$ -osa je stabilan pravac, dok za sedlo  $(-1, 0)$   $x$ -osa je stabilan pravac, a  $y$ -osa je nestabilan pravac.

Duž  $x$ -nula-izokline  $x = 1$  je

- $y' = -y > 0$  za  $y < 0$  :  $\uparrow$



Slika 21: Primer 3.11. ~ (a) nula-izokline i vektorsko polje; (b) fazni portret

- $y' = -y < 0$  za  $y > 0$  :  $\downarrow$

Dakle,  $x = 1, y < 0$  i  $x = 1, y > 0$  su pravolinijske trajektorije, odnosno ako podđemo iz bilo koje tačke prave  $x = 1$ , izuzev PR  $(1, 0)$ , ostajemo na toj pravoj i približavamo se PR (poluprave su stabilne mnogostrukosti sedla).

Duž  $x$ -nula-izokline  $x = -1$  je

- $y' = y > 0$  za  $y > 0$  :  $\uparrow$
- $y' = y < 0$  za  $y < 0$  :  $\downarrow$

Dakle,  $x = -1, y < 0$  i  $x = -1, y > 0$  su pravolinijske trajektorije, odnosno ako podđemo iz bilo koje tačke prave  $x = -1$ , izuzev PR  $(-1, 0)$ , ostajemo na toj pravoj i udaljavamo se od PR (poluprave su nestabilne mnogostrukosti sedla).

Duž  $y$ -nula-izokline  $x = 0$  je

- $x' = -1 < 0$  za svako  $x$  :  $\leftarrow$

Duž  $y$ -nula-izokline  $y = 0$  je

- $x' = x^2 - 1 > 0$  za  $x < -1$  i  $x > 1$  :  $\rightarrow$
- $x' = x^2 - 1 < 0$  za  $x \in (-1, 1)$  :  $\leftarrow$

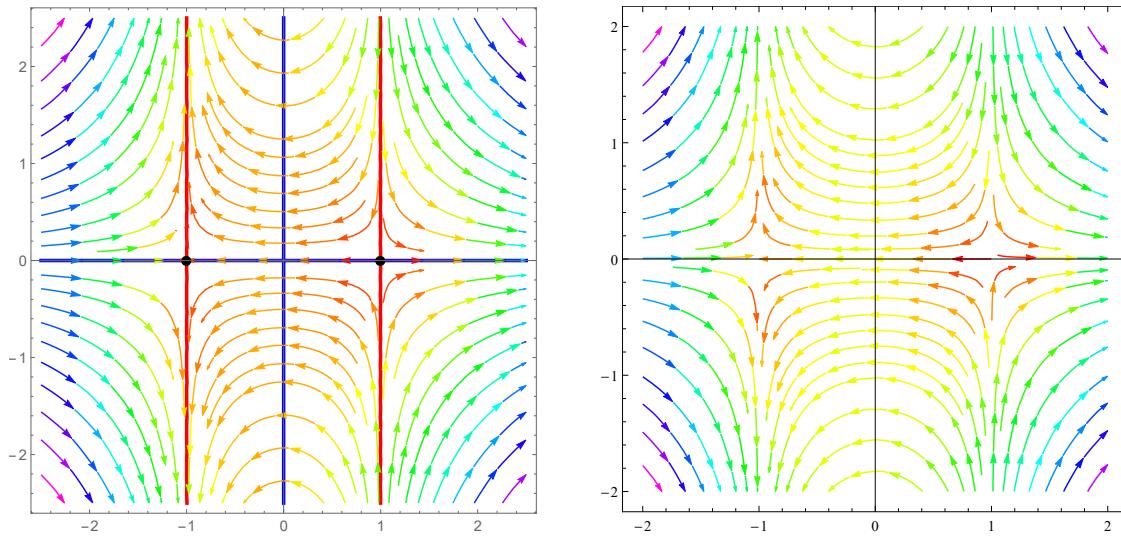
Dakle,

$$y = 0, \quad x < -1, \quad y = 0, \quad -1 < x < 1, \quad y = 0, \quad x > 1$$

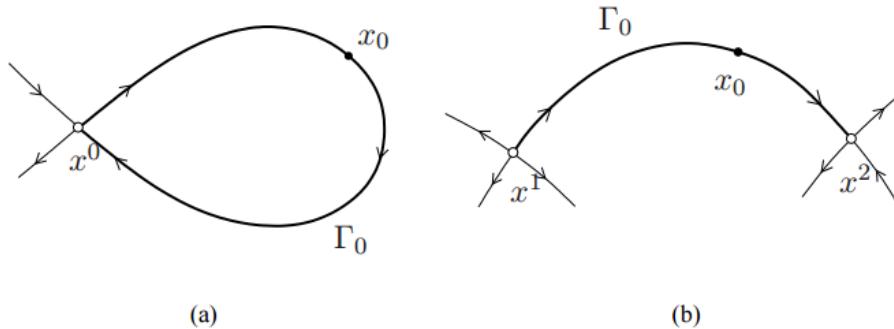
su pravolinijske trajektorije. Ako podđemo iz bilo koje tačke  $x$ -ose, za  $x < -1$  ostajemo na toj pravoj i približavamo se PR  $(-1, 0)$  (poluprava je stabilna mnogostrukost sedla). Ako podđemo iz bilo koje tačke  $x$ -ose, za  $x > 1$  ostajemo na

toj pravoj i udaljavamo se od PR  $(1, 0)$  (poluprava je nestabilna mnogostruktost sedla). Deo  $x$ -ose za  $x \in (-1, 1)$  pripada stabilnoj mnogostruktosti PR  $(-1, 0)$  ali i nestabilnoj mnogostruktosti PR  $(1, 0)$ , odnosno sve trajektorije koje polaze sa neke tačke  $x$ -ose za  $x \in (-1, 1)$  udaljavaju se od PR  $(1, 0)$  i približavaju se PR  $(-1, 0)$ . Takvu trajektoriju nazivamo *heterociklična trajektorija* odnosno *heterociklična veza* PR  $(-1, 0)$  i  $(1, 0)$ .

Nula-izokline i smer strelica u faznom portretu, kao i fazni portret prikazani su na Slici 21 i Slici 22.  $\square$



Slika 22: Primer 3.11. ~ fazni portret nelinearnog DS



Slika 23: (a) homociklična trajektorija PR  $x^0$ ; (b) heterociklična trajektorija PR  $x^1$  i  $x^2$ .

**Definicija 9 [Heterociklična trajektorija]** Neka su  $\hat{x}_1$  i  $\hat{x}_2$  položaji ravnoteže DS. Trajektorija  $\gamma_{x_0} = \{\Phi^t(x_0), t \in I_{x_0}\}$  kroz tačku  $x_0 \in \mathbb{E}$  naziva se **heterociklična veza** između položaja ravnoteže  $\hat{x}_1$  i  $\hat{x}_2$  (Slika 23 – (b)) ako je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^t(x_0) = \hat{x}_2, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi^t(x_0) = \hat{x}_1$$

Trajektorija  $\gamma_{x_0} \subset \mathcal{W}^u(\hat{x}_1)$  i  $\gamma_{x_0} \subset \mathcal{W}^s(\hat{x}_2)$ , gde je  $\mathcal{W}^u(\hat{x}_1)$  nestabilna mnogostruktost PR  $\hat{x}_1$ , a  $\mathcal{W}^s(\hat{x}_2)$  stabilna mnogostruktost PR  $\hat{x}_2$ .

**Primer 3.12.** Skicirati fazni portret DJ  $x'' + x^3 - x = 0$ .

REŠENJE. Datu DJ možemo da napišemo u obliku DS

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3. \end{aligned}$$

PR su  $(0, 0)$ ,  $(\pm 1, 0)$ . Matrica Jakobijana je

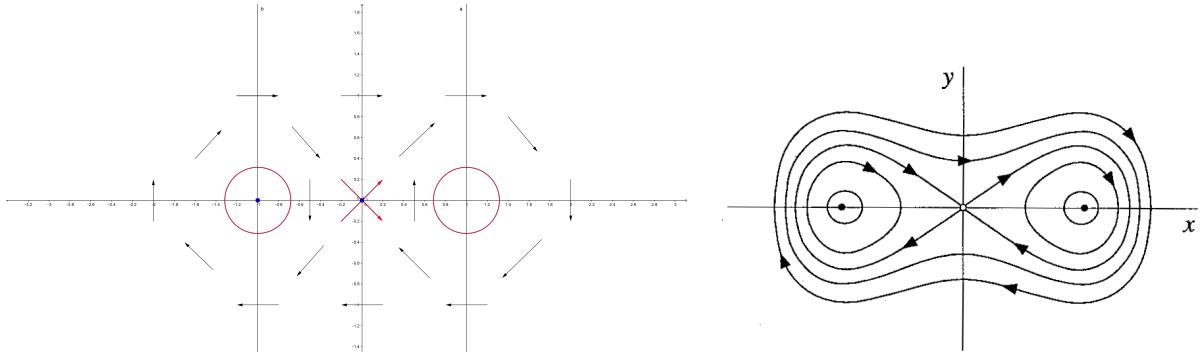
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_1 = J(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_1 = 2 > 0, \quad p = \text{tr } J_1 = 0,$$

$$J_2 = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_2 = -1 < 0$$

(sopstvene vrednosti matrice  $J(\pm 1, 0)$  su  $\pm i\sqrt{2}$ , a sopstvene vrednosti matrice  $J(0, 0)$  su  $\pm 1$  i odgovarajući sopstveni vektori su  $v_{1,2} = (\pm 1, 1)^T$ ). Dakle,  $(0, 0)$  je sedlo linearizovanog sistema, pa kako je  $F \in C^1(\mathbb{R})$ , PR  $(0, 0)$  je nelinearno sedlo sa stabilnom mnogostrukosti tangentnom u PR na pravac vektora  $(-1, 1)^T$  i nestabilnom mnogostrukosti tangentnom u PR na pravac vektora  $(1, 1)^T$ . PR  $(\pm 1, 0)$  su centri linearizovanog DS. O stabilnosti nehiperboličnih PR  $(\pm 1, 0)$  ne možemo doći do zaključka primenom teoreme Hatman-Grobmana. Napominjemo da prema Primeru 3.4. dodavanjem nelinearnog člana centar linearizovanog sistema može biti transformisan u stabilan ili nestabilan fokus, tako da u ovom slučaju treba biti pažljiv. U ovom primeru se to neće desiti i centar linearizovanog sistema ostaće centar nelinearnog sistema (dati DS je DS Hamiltona i prema Teoremi 10 centar linearizovanog sistema ostaće centar nelinearnog sistema - videti Primer 3.12A.).

$x$ -nula-izoklina je  $x$ -osa, a  $y$ -nula-izokline su prave  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ .



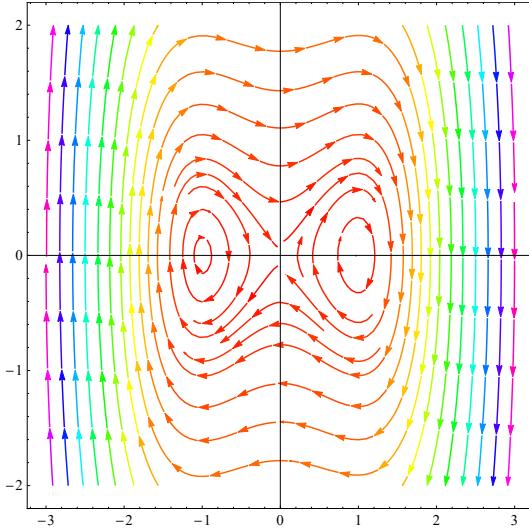
Slika 24: Primer 3.12. ~ (a) nula-izokline i vektorsko polje; (b) fazni portret

Duž  $x$ -nula-izokline  $y = 0$  je

- $y' = x(1 - x^2) > 0$  za  $x < -1$  ili  $x \in (0, 1)$  :  $\uparrow$
- $y' = x(1 - x^2) < 0$  za  $x \in (-1, 0)$  ili  $x > 1$  :  $\downarrow$

Duž  $y$ -nula-izoklina  $x = 0, x = \pm 1$  je

- $x' = y > 0$  za  $y > 0$  :  $\rightarrow$
- $x' = y < 0$  za  $y < 0$  :  $\leftarrow$



Slika 25: Primer 3.12. ~ fazni portret nelinearnog DS

Svaki od centara okružen je zatvorenim trajektorijama koje odgovaraju periodičnim rešenjima. Postoje takođe veće zatvorene trajektorije unutar kojih se nalaze sva tri PR. Specijalno, imamo dve trajektorije koje izgledaju kao da polaze iz sedla u koordinatnom početku u pravcu nestabilne mnogostrukosti, ali se nakon izvesnog vremena vraćaju i približavaju koordinatnom početku u pravcu stabilne

mnogostrukosti sedla. Tačnije te trajektorije se približavaju  $(0, 0)$  kada  $t \rightarrow \pm\infty$ . Takve trajektorije se nazivaju *homociklične* trajektorije PR  $(0, 0)$ .  $\square$

**Definicija 10 [Homociklična trajektorija]** Neka je  $\hat{x}_1$  položaj ravnoteže DS. Trajektorija  $\gamma_{x_0} = \{\Phi^t(x_0), t \in I_{x_0}\}$  kroz tačku  $x_0 \in \mathbb{E}$  naziva se **homociklična trajektorija** položaja ravnoteže  $\hat{x}_1$  (Slika 23 – (a)) ako je

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi^t(x_0) = \hat{x}_1$$

Trajektorija  $\gamma_{x_0} \subset \mathcal{W}^u(\hat{x}_1)$  i  $\gamma_{x_0} \subset \mathcal{W}^s(\hat{x}_1)$ , gde su  $\mathcal{W}^s(\hat{x}_1)$  i  $\mathcal{W}^u(\hat{x}_1)$  stabilna i nestabilna mnogostruktost PR  $\hat{x}_1$ .

**Primer 3.13.** Skicirati fazni portret DJ  $x'' - x^3 + x = 0$ .

REŠENJE. Datu DJ možemo da napišemo u obliku DS

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 - x. \end{aligned}$$

PR su  $(0, 0)$ ,  $(\pm 1, 0)$ . Matrica Jakobijana je

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

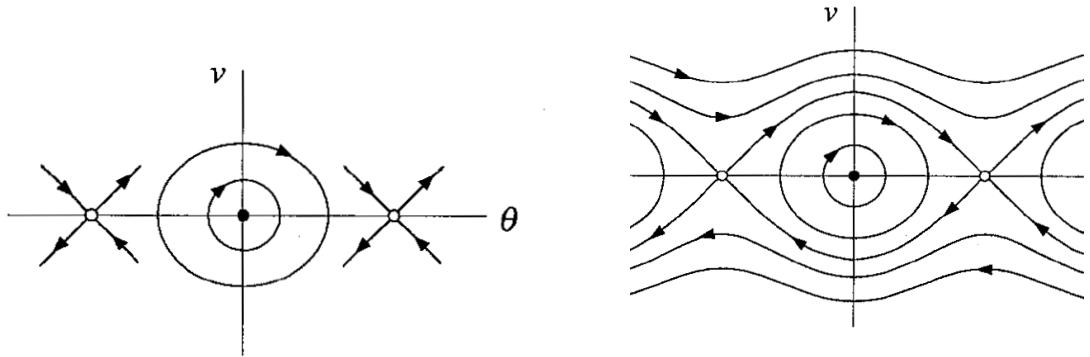
$$J_1 = J(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_1 = -2 < 0,$$

$$J_2 = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_2 = 1 > 0, \quad p = \text{tr } J_2 = 0.$$

(sopstvene vrednosti matrice  $J(\pm 1, 0)$  su  $\pm\sqrt{2}$  i odgovarajući sopstveni vektori su  $(\pm\sqrt{2}/2, 1)^T$ , a sopstvene vrednosti matrice  $J(0, 0)$  su  $\pm i$ ). Dakle,  $(\pm 1, 0)$  su sedla, a  $(0, 0)$  je centar linearizovanog DS. PR  $(\pm 1, 0)$  su nelinearna sedla. Za oba sedla stabilne mnogostrukosti tangentne su u PR na pravac vektora  $(-\sqrt{2}/2, 1)^T$ , a nestabilne mnogostrukosti su tangentne u PR na pravac vektora  $(\sqrt{2}/2, 1)^T$ .

Koordinatni početak iako je nehiperbolični PR o čijoj stabilnosti ne možemo doći do zaključka primenom teoreme Hatman-Grobmana ostaće nelinearan centar (videti Primer 3.13A. - dati DS je DS Hamiltona).

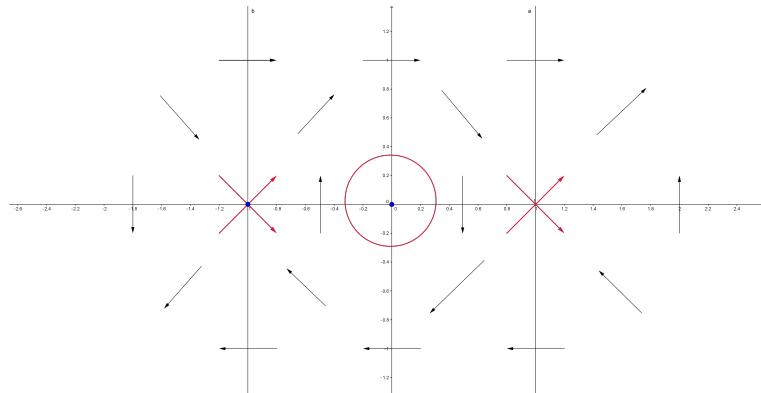
$x$ -nula-izoklina je  $x$ -osa, a  $y$ -nula-izokline su prave  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ .



Slika 26: Primer 3.13. ~ fazni portret nelinearnog DS

Duž  $x$ -nula-izokline  $y = 0$  je

- $y' = x(x^2 - 1) > 0$  za  $x \in (-1, 0)$  ili  $x > 1$  :  $\uparrow$
- $y' = x(x^2 - 1) < 0$  za  $x < -1$  ili  $x \in (0, 1)$  :  $\downarrow$

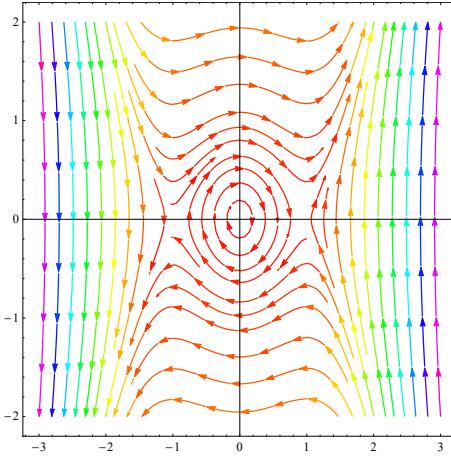


Slika 27: Primer 3.13. ~ nula-izokline i vektorsko polje

Duž  $y$ -nula-izoklina  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$  je

- $x' = y > 0$  za  $y > 0$  :  $\rightarrow$
- $x' = y < 0$  za  $y < 0$  :  $\leftarrow$

Imamo dve heterociklične trajektorije odnosno heterociklične veze između PR  $(-1, 0)$  i  $(1, 0)$ , duž gornje se sve trajektorije udaljavaju od PR  $(-1, 0)$  i približavaju PR  $(1, 0)$ , dok se duž donje heterociklične trajektorije sve trajektorije udaljavaju od PR  $(1, 0)$  i približavaju PR  $(-1, 0)$ .  $\square$



Slika 28: Primer 3.13. ~ fazni portret nelinearnog DS

**Primer 3.14.** Skicirati fazni portret DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + x^2 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2xy.\end{aligned}$$

REŠENJE. PR su  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(0,1)$ ,  $P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $P_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ . Matrica Jakobijskog je

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 1-2y \\ -1-2y & -2x \end{pmatrix}.$$

$$J_1 = J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_1 = 1 > 0, \quad p = \text{tr } J_1 = 0$$

Koordinatni početak je centar linearizovanog sistema, dakle nehiperbolični PR o čijoj stabilnosti ne možemo doći do zaključka primenom teoreme Hartman-Grobmana. Dati DS je DS Hamiltona (videti Primer 3.14A.), pa će  $P_1$  biti **nelinearan centar**.

$$J_2 = J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_2 = -3 < 0.$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{3}, \quad v_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)^T, \quad \lambda_2 = \sqrt{3}, \quad v_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)^T$$

PR  $P_2$  je sedlo linearizovanog sistema, pa će biti **nelinearno sedlo**, čija je stabilna mnogostruktost tangentna u  $P_2$  na pravac vektora  $v_1$  i nestabilna mnogostruktost

tangentna na vektor  $v_2$ .

$$J_3 = J\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_3 = -3 < 0.$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{3}, \quad v_3 = (1, 0)^T, \quad \lambda_4 = \sqrt{3}, \quad v_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)^T$$

PR  $P_3$  je sedlo linearizovanog sistema, pa će biti **nelinearno sedlo**, čija je stabilna mnogostruktost tangentna u  $P_3$  na pravac vektora  $v_3$  i nestabilna mnogostruktost tangentna na vektor  $v_4$ .

$$J_4 = J\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow q = \det J_4 = -3 < 0.$$

$$\lambda_5 = -\sqrt{3}, \quad v_5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)^T, \quad \lambda_6 = \sqrt{3}, \quad v_6 = (1, 0)^T$$

PR  $P_4$  je sedlo linearizovanog sistema, pa će biti **nelinearno sedlo**, čija je stabilna mnogostruktost tangentna u  $P_4$  na pravac vektora  $v_5$  i nestabilna mnogostruktost tangentna na vektor  $v_6$ .

$x$ -nula-izokline su krive  $x = \pm\sqrt{y^2 - y}$ , a  $y$ -nula-izokline su prave  $x = 0$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .

Duž  $x$ -nula-izokline  $x = \sqrt{y^2 - y}$  je

- $y' = -\sqrt{y^2 - y}(1 + 2y) > 0$  za  $y < -\frac{1}{2}$  :  $\uparrow$
- $y' = -\sqrt{y^2 - y}(1 + 2y) < 0$  za  $y > -\frac{1}{2}$  :  $\downarrow$

Duž  $x$ -nula-izokline  $x = -\sqrt{y^2 - y}$  je

- $y' = \sqrt{y^2 - y}(1 + 2y) > 0$  za  $y > -\frac{1}{2}$  :  $\uparrow$
- $y' = \sqrt{y^2 - y}(1 + 2y) < 0$  za  $y < -\frac{1}{2}$  :  $\downarrow$

Duž  $y$ -nula-izokline  $x = 0$  je

- $x' = y - y^2 > 0$  za  $0 < y < 1$  :  $\rightarrow$
- $x' = y - y^2 < 0$  za  $y < 0$  i za  $y > 1$  :  $\leftarrow$

Duž  $y$ -nula-izokline  $y = -\frac{1}{2}$  je

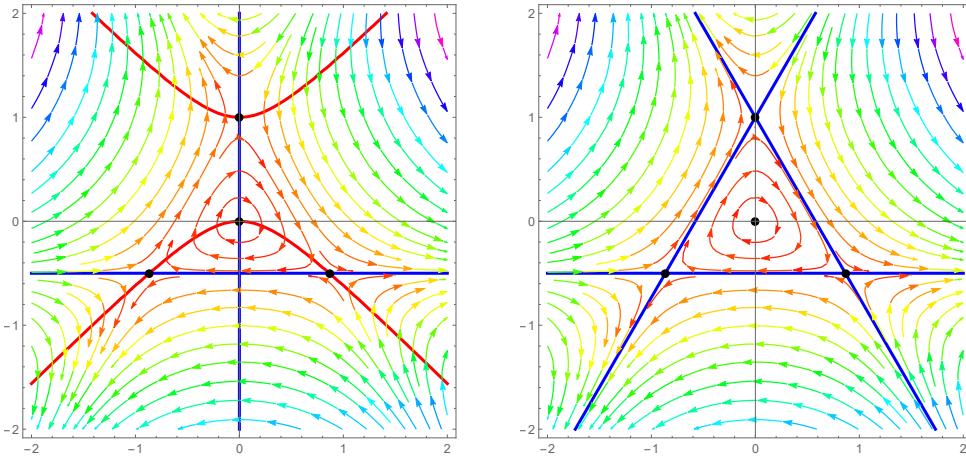
- $x' = x^2 - \frac{3}{4} > 0$  za  $x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$  i za  $x > \frac{\sqrt{3}}{2}$  :  $\rightarrow$
- $x' = x^2 - \frac{3}{4} < 0$  za  $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$  :  $\leftarrow$

Dakle,

$$\begin{aligned} t_1 : \quad & y = -\frac{1}{2}, \quad x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t_2 : \quad & y = -\frac{1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t_3 : \quad & y = -\frac{1}{2}, \quad x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

su pravolinijske trajektorije. Ako podemo iz bilo koje tačke poluprave  $t_1$  ostajemo na toj pravoj i približavamo se PR  $P_3$  (poluprava je stabilna mnogostruktost sedla). Ako podemo iz bilo koje tačke poluprave  $t_3$  ostajemo na toj pravoj udaljavajući se od PR  $P_4$  (poluprava je nestabilna mnogostruktost sedla). Deo prave  $y = -1/2$  za  $x \in (-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$  pripada stabilnoj mnogostruktosti PR  $P_3$  ali i nestabilnoj mnogostruktosti PR  $P_4$ , odnosno sve trajektorije koje polaze sa neke tačke koja pripada  $t_2$  udaljavaju se od PR  $P_4$  i približavaju se PR  $P_3$ . Dakle,  $t_2$  je *heterociklična* trajektorija, odnosno *heterociklična veza* PR  $P_3$  i  $P_4$ .

Nula-izokline i fazni portret prikazani su na Slici 29.



Slika 29: Primer 3.14. ~ (a) nula-izokline i fazni portret DS; (b) fazni portret i tri heterociklične veze između sedala

Primetimo da je  $v_3 = v_6$ , odnosno da se stabilan pravac  $v_3$  sedla  $P_3$  poklapa sa nestabilnim pravcem  $v_6$  sedla  $P_4$ , što ukazuje na postojanje heterociklične veze između ova dva sedla. Kako je takođe  $v_1 = v_4$  i  $v_2 = v_5$ , ispitajmo da li postoje i heterociklične veze između sedala  $P_2$  i  $P_3$ , kao i između sedala  $P_2$  i  $P_4$ . Naime, prava

kroz  $P_2$  i  $P_3$  je  $y = \sqrt{3}x + 1$  i sadrži stabilan pravac sedla  $P_2$  određen vektorom  $v_1$  i nestabilan pravac sedla  $P_3$  određen vektorom  $v_4$ . Pokažimo da su

$$\begin{aligned} t_4 : \quad & y = \sqrt{3}x + 1, \quad x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t_5 : \quad & y = \sqrt{3}x + 1, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 0, \\ t_6 : \quad & y = \sqrt{3}x + 1, \quad x > 0 \end{aligned}$$

pravolinijske trajektorije DS, odnosno da je  $y = \sqrt{3}x + 1$  rešenje obične DJ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-x(1+2y)}{y+x^2-y^2} \Leftrightarrow x(1+2y)dx + (y+x^2-y^2)dy = 0$$

Zaista,

$$x(3+2\sqrt{3}x)dx + (-2x^2-\sqrt{3}x)\sqrt{3}dx = x(3+2\sqrt{3}x)dx - x(2\sqrt{3}x+3)dx = 0.$$

Dakle,  $t_4, t_5, t_6$  su pravolinijske trajektorije DS. Poluprava  $t_4$  je nestabilna mnogostruktost sedla  $P_3$ , poluprava  $t_6$  je stabilna mnogostruktost sedla  $P_2$ , dok je  $t_5$  *heterociklična veza* između sedla  $P_2$  i  $P_3$  i sve trajektorije koje polaze sa neke tačke koja pripada  $t_5$  udaljavaju se od PR  $P_3$  i približavaju se PR  $P_2$ . Analogno se može pokazati da je

$$t_7 : y = -\sqrt{3}x + 1, \quad 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

heterociklična veza između sedla  $P_2$  i  $P_4$  i sve trajektorije koje polaze sa neke tačke koja pripada  $t_7$  udaljavaju se od PR  $P_2$  i približavaju se PR  $P_4$ .  $\square$

### Sistemi Hamiltona

**Definicija 11** Dvodimenzionalni nelinearni DS naziva se SISTEM HAMILTONA ako postoji funkcija  $H \in C^2(E)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^2$  tako da se sistem može predstaviti u obliku

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Funkcija  $H(x, y)$  naziva se HAMILTONIJAN DS.

### Teorema 7 Dvodimenzionalni nelinearni DS

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad f, g \in C^1(E), \quad t \in \mathbb{R},$$

je sistem Hamiltona u povezanoj oblasti  $E$  ako i samo ako

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \quad (x, y) \in E.$$

DOKAZ. ( $\Rightarrow:$ ) Ako je dvodimenzionalni nelinearni DS (11) sistem Hamiltona, postoji funkcija  $H \in C^2(E)$ , tako da je

$$(7) \quad f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \quad g(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).$$

Kako su  $f, g \in C^1(E)$ , diferenciranjem prve jednakosti u (7) po  $x$ , a druge po  $y$  dobija se

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial H^2(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial H^2(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad (x, y) \in E.$$

Kako je  $H \in C^2(E)$  sledi jednakost mešovitih parcijalnih izvoda, odnosno (6).

( $\Leftarrow:$ ) Obrnuto, ako važi relacija (6) moguće je efektivno odrediti funkciju  $H \in C^{(2)}(E)$ , tako da važi (7), pa je DS (11) sistem Hamiltona.

Neka je  $(x_0, y_0) \in E$  proizvoljna tačka. Kako je  $E$  povezana oblast, iz  $\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = f(x, y)$  za svako  $(x, y) \in E$ , sledi

$$H(x, y) = \int_{y_0}^y f(x, t) dt + \psi(x),$$

gde je  $\psi$  proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija. Funkciju  $\psi$  odredujemo iz relacije

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{y_0}^y f(x, t) dt \right) + \psi'(x) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = -g(x, y)$$

Zbog neprekidnosti funkcija  $f$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  i uslova (6) dobija se

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= -g(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{y_0}^y f(x, t) dt \right) \\ &= -g(x, y) - \int_{y_0}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \\ &= -g(x, y) + \int_{y_0}^y \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} dt = -g(x, y_0) \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\psi(x) = - \int_{x_0}^x g(t, y_0) dt + c_1.$$

Dakle,

$$(8) \quad H(x, y) = \int_{y_0}^y f(x, t) dt - \int_{x_0}^x g(t, y_0) dt + c.$$

Kako je  $f, g \in C^1(E)$

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = f(x, y),$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} &= \int_{y_0}^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt - g(x, y_0) = - \int_{y_0}^y \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} dt - g(x, y_0) \\ &= -g(x, y) + g(x, y_0) - g(x, y_0) = -g(x, y), \end{aligned}$$

funkcija  $H$  odredjena sa (8) zadovoljava (7) i  $H \in C^{(2)}(E)$ , pa je DS (11) sistem Hamiltona.  $\boxtimes$

**Teorema 8** *Hamiltonian DS Hamiltona koji nije identički jednak konstanti je integral tog sistema.*

**DOKAZ.** Neka je  $(x(t), y(t))$  proizvoljno rešenje DS (4).

$$\begin{aligned} \frac{dH(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y} y'(t) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \left( -\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 \\ &\Rightarrow H(x(t), y(t)) = \text{const.} \end{aligned}$$

Dakle, Hamiltonian ima konstantnu vrednost duž proizvoljnog rešenja  $(x(t), y(t))$  i kako je  $H \in C^2(E)$ ,  $H \not\equiv \text{const.}$ ,  $H(x, y)$  predstavlja integral DS (4).  $\square$

U primenama sistemi u kojima energija nije funkcija vremena nazivaju se **konzervativni**. Sistem Hamiltona je zapravo konzervativni sistem. Posmatrajmo pravolinijsko kretanje čestice mase  $m$ , duž  $x$ -ose pod dejstvom nelinearne sile  $F(x)$ . Diferencijalna jednačina kretanja, prema II Njutnovom zakonu, je  $mx'' + F(x) = 0$ . Ako je  $V(x)$  potencijalna energija određena sa  $F(x) = -dV(x)/dx$ , imamo

$$mx'' + F(x) = 0 \Rightarrow mx''x' - \frac{dV(x)}{dx}x' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m(x')^2 + V(x) \right] = 0$$

Dakle, ukupna energija sistema koja je zbir kinetičke i potencijalne energije ima kao funkciju vremena konstantnu vrednost:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(x')^2 + V(x) = c.$$

**Definicija 12** *Položaj ravnoteže  $x^*$  nelinearnog DS  $x' = f(x)$  naziva se **nedegenerativni** ako matrica  $Df(x^*)$  nema sopstvene vrednosti jednake nula. Ako je bar jedna sopstvena vrednost matrice Jakobijana  $Df(x^*)$  jednaka nuli, položaj ravnoteže  $x^*$  nelinearnog DS se naziva **degenerativni**.*

Dakle, nedegenerativni PR nelinearnog DS u ravni je ili hiperbolični PR ili centar linearizovanog sistema. Degenerativni PR nelinearnog DS su neizolovani PR linearizovanog sistema.

**Teorema 9** *Svaki nedegenerativni PR DS Hamiltona je sedlo ili centar odgovarajućeg linearizovanog DS.*

DOKAZ. Matrica Jakobijana linearizovanog sistema u PR  $M(x_0, y_0)$  je

$$(9) \quad J_0 = J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0, y_0) & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Kako je PR nedegenerativni

$$D = \det(J_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 \neq 0,$$

pa uvezši u obzir da je

$$T = \text{tr}(J_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

PR je sedlo akko je  $D < 0$ , odnosno PR je centar akko je  $D > 0$ .  $\square$

Primetimo da je svaki PR  $(x_0, y_0)$  DS Hamiltona (4) stacionarna tačka Hamiltonijana  $H(x, y)$  tog sistema.

**Lema 1** *Ako je položaj ravnoteže  $\mathbf{0} = (0, 0)$  DS Hamiltona (4) nelinearan fokus, tada tačka  $(0, 0)$  ne predstavlja ni strogi lokalni minimum niti strogi lokalni maksimum Hamiltonijana  $H(x, y)$  tog sistema.*

DOKAZ. Ako je  $\mathbf{0}$  nelinearan fokus DS Hamiltona (4), prema Definiciji 3.4. postoji  $\delta > 0$  tako da za svako  $0 < r_0 < \delta$  i  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  za rešenje DS u polarnim koordinatama koje zadovoljava početni uslov  $r(0) = r_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$  važi  $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$  i  $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow \pm\infty$ , odnosno za svako  $(x_0, y_0) \in N_\delta(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  je

$$(10) \quad x(t, x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad y(t, x_0, y_0) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Prepostavimo da je  $\mathbf{0}$  strogi lokalni minimum Hamiltonijana  $H(x, y)$ , tj. da za svako  $(x, y) \in N_\delta(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  je  $H(x, y) > H(0, 0)$ . Medjutim, prema Teoremi 8 je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)) = H(x_0, y_0),$$

a prema (10) je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)) = H(0, 0),$$

za svako  $(x_0, y_0) \in N_\delta(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ , što je kontradikcija.  $\square$

**Teorema 10** *Svaki nedegenerativni PR analitičkog DS Hamiltona (4) je ili nelinearno sedlo ili nelinearan centar.*

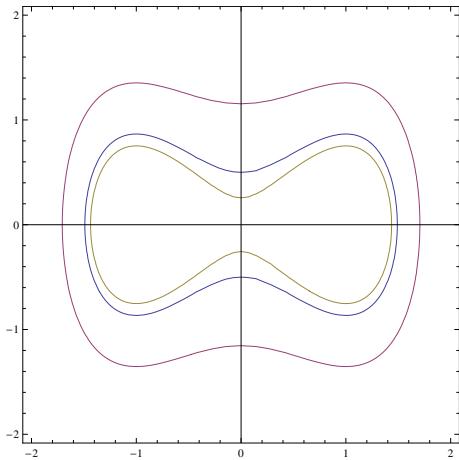
- (i) PR  $\mathbf{0} = (0, 0)$  je nelinearno sedlo DS Hamiltona (4) ako i samo ako tačka  $(0, 0)$  nije tačka lokalnog ekstremuma Hamiltonijana tog DS.
- (ii) ako je  $(0, 0)$  tačka lokalnog ekstremuma Hamiltonijana tog DS, onda je PR  $\mathbf{0} = (0, 0)$  nelinearan centar DS Hamiltona (4).

DOKAZ. Prepostavimo da je  $\mathbf{0} = (0, 0)$  nedegenerativni PR DS Hamiltona (4). Tada je  $D \neq 0$ . Prema Teoremi 8  $\mathbf{0}$  je sedlo ili centar odgovarajućeg linearizovanog DS. Tačka  $\mathbf{0}$  je stacionarna tačka funkcije  $H(x, y)$  (objasniti zašto?).

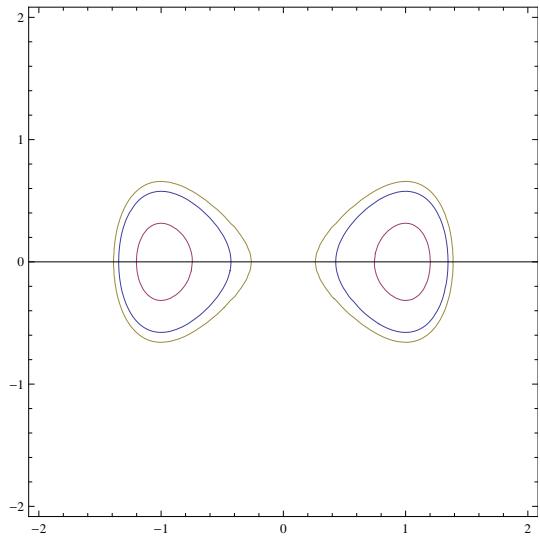
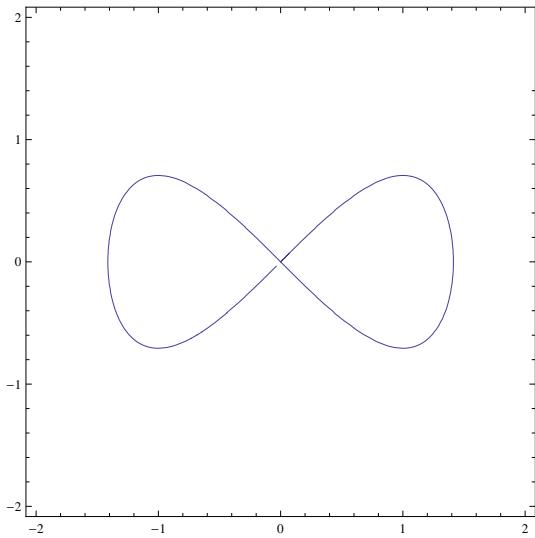
**(I)** Stacionarna tačka  $\mathbf{0}$  funkcije  $H(x, y)$  nije tačka lokalnog ekstremuma funkcije  $H(x, y)$  akko je  $D < 0$  akko je PR  $\mathbf{0}$  sedlo linearizovanog sistema akko je PR  $\mathbf{0}$  nelinearno sedlo DS Hamiltona (4) (prema Teoremi 3.3. jer je  $H \in C^1(E)$ ).

**(II)** Ako je  $\mathbf{0}$  tačka lokalnog ekstremuma Hamiltonijana tog DS, onda je  $D > 0$  odnosno onda  $\mathbf{0}$  je centar linearizovanog sistema. Prema Teoremi 3.6., kako je  $H$  analitička u  $E$ , zaključujemo da je  $\mathbf{0}$  nelinearan fokus ili nelinearan centar DS Hamiltona (4). Ako prepostavimo da je  $\mathbf{0}$  nelinearan fokus DS (4), prema Lemu 1  $(0, 0)$  nije lokalni ekstremum funkcije  $H(x, y)$ , što je kontradikcija. Dakle, PR  $\mathbf{0}$  mora biti nelinearan centar DS Hamiltona (4).  $\square$

U pogledu određivanja faznog portreta DS Hamiltona, značajno je prepoznati oblik sistema zbog činjenice da za crtanje faznog portreta je dovoljno nacrtati krive  $H(x, y) = \text{const}$ , jer  $H(x, y) = \text{const}$  predstavlja implicitnu jednačinu fazne



Slika 30: Krive  $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{8}$ ,  $H(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{2}{3}$ ,  $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{30}$



Slika 31: (a)  $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 0$ ; (b)  $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{5}$ ,  $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{12}$ ,  $H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{30}$

trajektorije DS. Orjentaciju faznih trajektorija određujemo preko odgovarajućeg vektorskog polja.

**Primer 3.12A.** Posmatrajmo DS (2) iz Primera 3.12. Hamiltonijan ovog sistema je

$$H(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Na Slici 30 i Slici 31 prikazane su krive  $H(x, y) = c$  za vrednosti

$$c \in \left\{ -\frac{1}{5}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{30}, \frac{1}{8}, \frac{2}{3} \right\}$$

što će zajedno sa orjentacijom vektorskog polja dati upravo fazni portret na Slici 24.

PR  $(\pm 1, 0)$  su centri linearizovanog DS. Kako je

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 = 3x_0^2 - 1$$

imamo da je  $D(\pm 1, 0) = 2 > 0$  i  $H_{xx}(\pm 1, 0) = 2 > 0$ , pa su tačke  $(\pm 1, 0)$  tačke lokalnog minimuma funkcije  $H(x, y)$ , odakle prema Teoremi 10 predstavljaju nelinearan centar.  $\square$

**Primer 3.13A.** Posmatrajmo DS (3) iz Primera 3.13. Hamiltonian ovog sistema je

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}.$$

$(0, 0)$  je centar linearizovanog DS. Kako je  $D(x_0, y_0) = 1 - 3x_0^2$ , imamo da je  $D(0, 0) = 1 > 0$ , i  $H_{xx}(0, 0) = 1 > 0$ , pa je  $(0, 0)$  tačka lokalnog minimuma funkcije  $H(x, y)$ , odakle prema Teoremi 10 predstavlja nelinearan centar.  $\square$

**Primer 3.14A.** Posmatrajmo DS iz Primera 3.14. Hamiltonian ovog sistema je

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + x^2 y.$$

$(0, 0)$  je centar linearizovanog DS. Kako je  $D(x_0, y_0) = -4x_0^2 + (1 + 2y_0)^2$ , imamo da je  $D(0, 0) = 1 > 0$ , i  $H_{xx}(0, 0) = 1 > 0$ , pa je  $(0, 0)$  tačka lokalnog minimuma funkcije  $H(x, y)$ , odakle prema Teoremi 10 predstavlja nelinearan centar.  $\square$

### Gradijentni sistemi

**Definicija 13** Ako postoji funkcija  $G \in C^2(E)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  tako da se nelinearan DS može predstaviti u obliku

$$x' = -\nabla G(x), \quad \nabla G = \left( \frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right)^T$$

DS naziva se GRADIJENTI DS sa potencijalnom funkcijom  $G$ .

**Teorema 11** Dvodimenzionalni nelinearni DS

$$(11) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad f, g \in C^1(E), \quad t \in \mathbb{R},$$

je gradijentni u povezanoj oblasti  $E$  ako i samo ako

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \quad (x, y) \in E.$$

DOKAZ. ( $\Rightarrow:$ ) Ako je dvodimenzionalni nelinearni DS (11) gradijentni, postoji funkcija  $G \in C^2(E)$ , tako da je

$$(13) \quad f(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x, y), \quad g(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial y}(x, y).$$

Kako su  $f, g \in C^1(E)$ , diferenciranjem prve jednakosti u (13) po  $y$ , a druge po  $x$  dobija se

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial G^2(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial G^2(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (x, y) \in E.$$

Kako je  $G \in C^2(E)$  sledi jednakost mešovitih parcijalnih izvoda, odnosno (12).

( $\Leftarrow:$ ) Obrnuto, ako važi relacija (12) moguće je efektivno odrediti funkciju  $G \in C^{(2)}(E)$ , tako da važi (13), pa je DS (11) gradijentni.

Neka je  $(x_0, y_0) \in E$  proizvoljna tačka. Kako je  $E$  povezana oblast, iz  $-\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$  za svako  $(x, y) \in E$ , sledi

$$-G(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y) dt + \psi(y),$$

gde je  $\psi$  proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija. Funkciju  $\psi$  odredujemo iz relacije

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{x_0}^x f(t, y) dt \right) + \psi'(y) = -\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = g(x, y)$$

Zbog neprekidnosti funkcija  $f$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  i uslova (12) dobija se

$$\begin{aligned} \psi'(y) &= g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{x_0}^x f(t, y) dt \right) \\ &= g(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dt \\ &= g(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial g(t, y)}{\partial t} dt = g(x_0, y) \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\psi(y) = \int_{y_0}^y g(x_0, t) dt + c_1.$$

Dakle,

$$(14) \quad G(x, y) = - \int_{x_0}^x f(t, y) dt - \int_{y_0}^y g(x_0, t) dt + c.$$

Kako je  $f, g \in C^1(E)$

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = -f(x, y),$$

i

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} &= - \int_{x_0}^x \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dt - g(x_0, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial g(t, y)}{\partial t} dt - g(x_0, y) \\ &= -g(x, y) + g(x_0, y) - g(x_0, y) = -g(x, y),\end{aligned}$$

funkcija  $G$  odredjena sa (14) zadovoljava (13) i  $G \in C^2(E)$ , pa je DS (11) gradijentni.  $\square$

Matrica Jakobijana linearizovanog sistema u PR  $M(x_0, y_0)$  gradijentnog DS

$$(15) \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial y}(x, y), \quad G \in C^2(E), \quad t \in \mathbb{R},$$

je

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x_0, y_0) & -\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & -\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

što predstavlja simetričnu matricu, odakle zaključujemo da su sve njene sopstvene vrednosti realne. Dakle, nedegenerativni PR gradijentnog DS je ili sedlo ili stabilan (nestabilan) čvor linearizovanog DS. Za matricu  $J_0 = J(0, 0)$  je

$$D = \det(J_0) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0, 0) - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(0, 0) \right)^2,$$

$$T = \text{tr}(J_0) = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, 0) - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0, 0).$$

Svaki PR gradijentnog DS (15) je stacionarna tačka potencijalne funkcije  $G(x, y)$ .

**Teorema 12** *Svaki nedegenerativni PR gradijentnog DS (15) je ili nelinearno sedlo ili nelinearan čvor.*

(i) *PR  $\mathbf{0} = (0, 0)$  je nelinearno sedlo gradijentnog DS (15) akko  $(0, 0)$  nije tačka lokalnog ekstremuma potencijalne funkcije  $G \in C^2(E)$ .*

(ii) *ako je  $(0, 0)$  tačka lokalnog minimuma (maksimuma) potencijalne funkcije  $G \in C^3(E)$ , onda je PR  $\mathbf{0} = (0, 0)$  nelinearan stabilan (nestabilan) čvor DS (15).*

**DOKAZ.** Prepostavimo da je  $\mathbf{0} = (0, 0)$  nedegenerativni PR DS (15). Tada je  $\mathbf{0}$  ili sedlo ili stabilan (nestabilan) čvor ili stabilna (nestabilna) zvezda ili stabilan

(nestabilan) degenerisani čvor odgovarajućeg linearizovanog DS. Dakle,  $D > 0$  ili  $D < 0$ .

**(I)** Stacionarna tačka  $\mathbf{0}$  funkcije  $G(x, y)$  nije tačka lokalnog ekstremuma funkcije  $G(x, y)$  akko je  $D < 0$  akko je PR  $\mathbf{0}$  sedlo linearizovanog sistema akko je PR  $\mathbf{0}$  nelinearno sedlo DS (15) (prema Teoremi 3.3. jer je  $G \in C^1(E)$ ).

**(II)** Ako je  $\mathbf{0}$  tačka lokalnog ekstremuma funkcije  $G(x, y)$  onda je  $D > 0$ . Ako je  $T = \text{tr}(J_0) < 0$ , PR  $\mathbf{0}$  je stabilan čvor ili stabilna zvezda ili stabilan degenerisani čvor linearizovanog sistema, a ako je  $T = \text{tr}(J_0) > 0$ , PR  $\mathbf{0}$  je nestabilan čvor ili nestabilna zvezda ili nestabilan degenerisani čvor linearizovanog sistema. Prema Teoremi 3.4., kako je  $G \in C^3(E)$ , zaključujemo da je PR  $\mathbf{0}$  stabilan (nestabilan) nelinearan čvor DS (15).

Kako je

$$D > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0, 0) > \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(0, 0) \right)^2 > 0,$$

zaključujemo da su  $G_{xx}(0, 0)$  i  $G_{yy}(0, 0)$  istog znaka. Dakle, ako je  $G_{xx}(0, 0) < 0 \Rightarrow G_{yy}(0, 0) < 0$ ,  $(0, 0)$  je tačka lokalnog maksimuma funkcije  $G(x, y)$ , i kako je u tom slučaju  $T > 0$ , PR  $\mathbf{0}$  je nestabilan nelinearan čvor DS (15). Ako je  $G_{xx}(0, 0) > 0 \Rightarrow G_{yy}(0, 0) > 0$ ,  $(0, 0)$  je tačka lokalnog minimuma funkcije  $G(x, y)$ , i kako je onda  $T < 0$ , PR  $\mathbf{0}$  je stabilan nelinearan čvor DS (15).  $\square$

### Primer 3.15. Nelinearan DS

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x(x-1)(2x-1) \\ \frac{dy}{dt} &= -2y. \end{aligned}$$

je gradijentni sa potencijalnom funkcijom  $G(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$ . PR su  $(0, 0), (1/2, 0), (1, 0) \sim (0, 0), (1, 0)$  su stabilne zvezde linearizovanog DS, a  $(1/2, 0)$  je sedlo linearizovanog DS. Prema Teoremi 3.4.  $(0, 0), (1, 0)$  su stabilni nelinearni čvorovi, a prema Teoremi 3.3.  $(1/2, 0)$  je nelinearno sedlo posmatranog DS.

Medjutim, korišćenjem Teoreme 12 do zaključka o tipu PR možemo doći bez linearizacije. Naime, kako je

$$G_{xx}(0, 0) = G_{xx}(1, 0) = 2 > 0, \quad G_{yy}(1, 0) = G_{yy}(1, 0) = 2 > 0,$$

$$G_{xy}(0, 0) = G_{xy}(1, 0) = 0,$$

imamo da je

$$D_{(0,0)} = G_{xx}(0, 0)G_{yy}(0, 0) - (G_{xy}(0, 0))^2 = 4 > 0, \quad G_{xx}(0, 0) = 2 > 0,$$

$$D_{(1,0)} = G_{xx}(1,0)G_{yy}(1,0) - (G_{xy}(1,0))^2 = 4 > 0, \quad G_{xx}(1,0) = 2 > 0,$$

pa su tačke  $(0, 0)$  i  $(1, 0)$  tačke lokalnog minimuma funkcije  $G(x, y)$ , odnosno prema Teoremi 12 stabilni nelinearni čvorovi datog DS. S druge strane, kako je

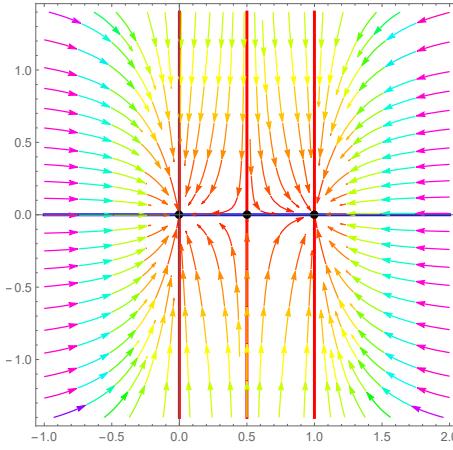
$$G_{xx}(1/2, 0) = -1, \quad G_{yy}(1/2, 0) = 2, \quad G_{xy}(1/2, 0) = 0$$

imamo da je

$$D_{(1/2,0)} = G_{xx}(1/2, 0)G_{yy}(1/2, 0) - (G_{xy}(1/2, 0))^2 = -2 < 0,$$

tako da tačka  $(1/2, 0)$  nije tačka lokalnog ekstremuma funkcije  $G(x, y)$ , i prema Teoremi 12 je nelinearno sedlo datog DS.

Fazni portret DS prikazan je na slici 32.  $\square$

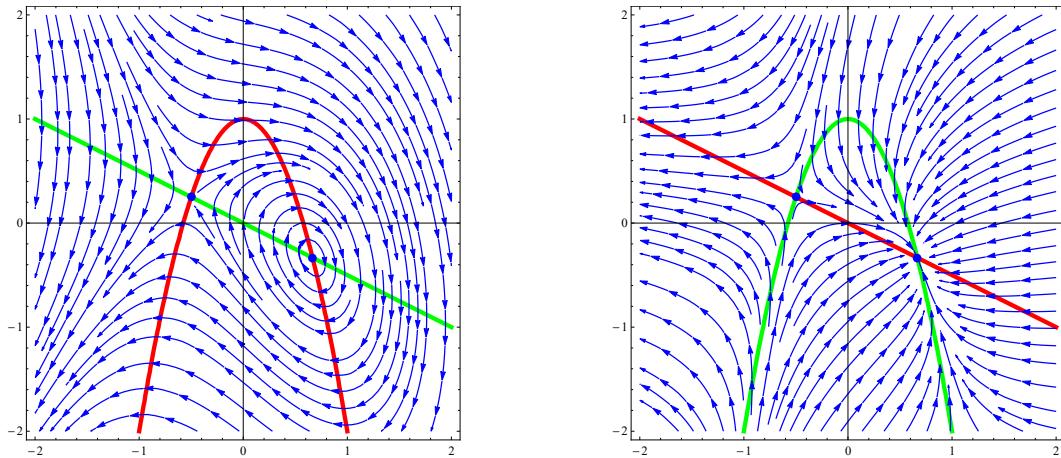


Slika 32: Primer 3.15.  $\sim$  fazni portret gradijentnog DS

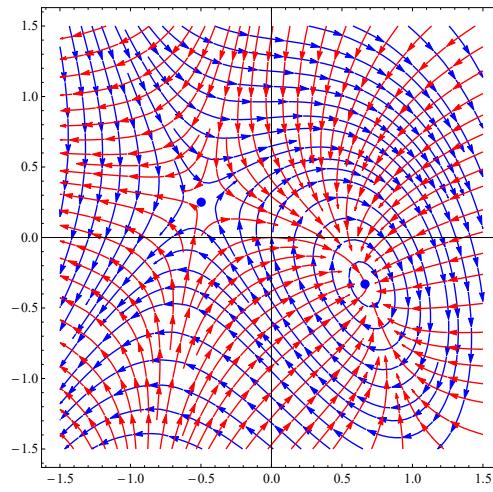
**Primer 3.16.** Posmatrajmo funkciju  $H(x, y) = x^3 + xy - x + y^2 = G(x, y)$  i formirajmo odgovarajući DS Hamiltona i gradijentni DS

$$(DSH) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y \end{array} \right. \quad (GDS) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial y} = -x - 2y \end{array} \right.$$

Oba DS imaju iste PR  $(-1/2, 1/4)$ ,  $(2/3, -1/3)$ . Linearizacijom utvrđujemo da je za (DSH) : PR  $(-1/2, 1/4)$  sedlo, dok je PR  $(2/3, -1/3)$  centar (Slika 33-(a)), dok je za (GDS) : PR  $(-1/2, 1/4)$  takođe sedlo, a PR  $(2/3, -1/3)$  je stabilan čvor (Slika 33-(b)). Primetimo da su fazne trajektorije DS Hamiltona i gradijentnog DS iste funkcije (Hamiltonian (DSH) i potencijalna funkcija (GDS) je ista funkcija) međusobno ortogonalne (Slika 34).



Slika 33: Primer 3.16. ~ fazni portret i nula izokline (a) DS Hamiltona; (b) gradijentnog DS



Slika 34: Ortogonalnost faznih trajektorija DS Hamiltona i gradijentnog DS iste funkcije - Primer 3.16.

### Reversibilni sistemi

Mnogi mehanički sistemi imaju svojstvo simetrije u odnosu na vreme, tj. dinamika sistema je ista bez obzira da li vreme teče unapred ili unazad. Dvodimenzionalni nelinearni DS (11) je REVERSIBILAN ako je ili funkcija  $f$  neparna po  $y$ , a  $g$  parna po  $y$ , tj,

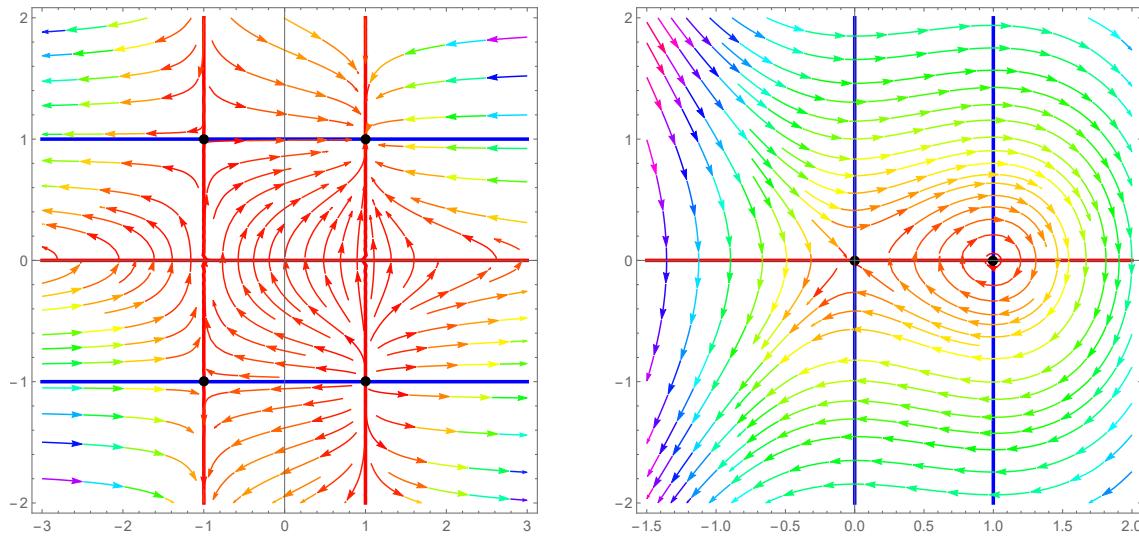
$$f(x, -y) = -f(x, y), \quad g(x, -y) = g(x, y)$$

ili funkcija  $f$  parna po  $x$ , a  $g$  neparna po  $x$ , tj,

$$f(-x, -y) = f(x, y), \quad g(-x, -y) = -g(x, y)$$

U prvom slučaju trajektorije su simetrične u odnosu na  $x$ -osu, dok u drugom slučaju trajektorije su simetrične u odnosu na  $y$ -osu.

**Teorema 13** Svaki nedegenerativni PR reversibilnog DS (11) koji je centar linearizovanog DS je nelinearan centar.



Slika 35: Fazni portret reversibilnog DS : (a) Primer 3.17. ; (b) Primer 3.18.

### Primer 3.17. Nelinearan DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4y(1-x^2) \\ \frac{dy}{dt} &= 1-y^2.\end{aligned}$$

je reversibilan. PR su  $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1) \sim (1,1)$  je stabilan čvor,  $(1,-1)$  je nestabilan čvor, a  $(-1,-1), (-1,1)$  su sedla DS. Fazni portret DS prikazan je na slici 35-(a).

### Primer 3.18. Nelinearan DS

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^2.\end{aligned}$$

je reversibilan. PR su  $(0,0), (1,0) \sim (0,0)$  je sedlo,  $(1,0)$  je centar linearizovanog DS (nehiperbolični PR). Prema Teoremi 13  $(1,0)$  je nelinearan centar posmatranog DS. Fazni portret DS prikazan je na slici 35-(b).